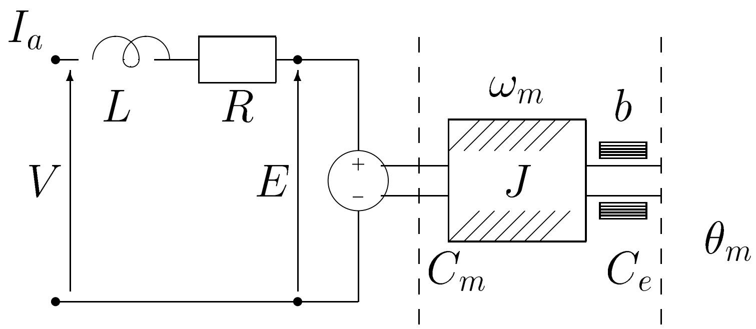
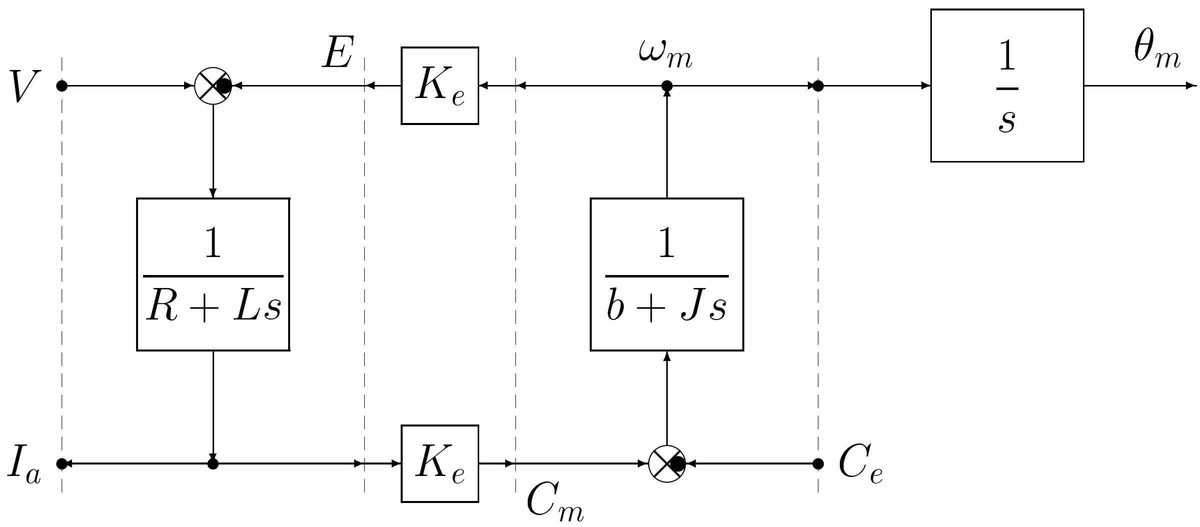
Motore elettrico in corrente continua.

- Schema fisico di un motore elettrico in corrente continua:



- Schema a blocchi POG del motore:



- Significato delle principale variabili del sistema:

V	Tensione in ingresso al motore (V);
I_a	Corrente nel circuito di armatura (A);
C_m	Coppia motrice (N m);
C_r	Coppia resistente (N m);
E	Tensione contro-elettromotrice (V);
ω_m	Velocità angolare del motore (rad/s);
θ_m	Posizione angolare del motore (rad);
L	Induttanza del circuito di armatura (H);
R	Resistenza del circuito di armatura (Ω);
K_e	Costante di coppia (o di f.c.e.m.) (N m/A);
b	Coefficiente di attrito lineare del motore (N m s/rad);
J	Momento di inerzia del motore (Kg m^2);

Il principio di funzionamento dei motori elettrici è il seguente: l'interazione fra i due campi magnetici di statore e di rotore genera la coppia motrice desiderata.

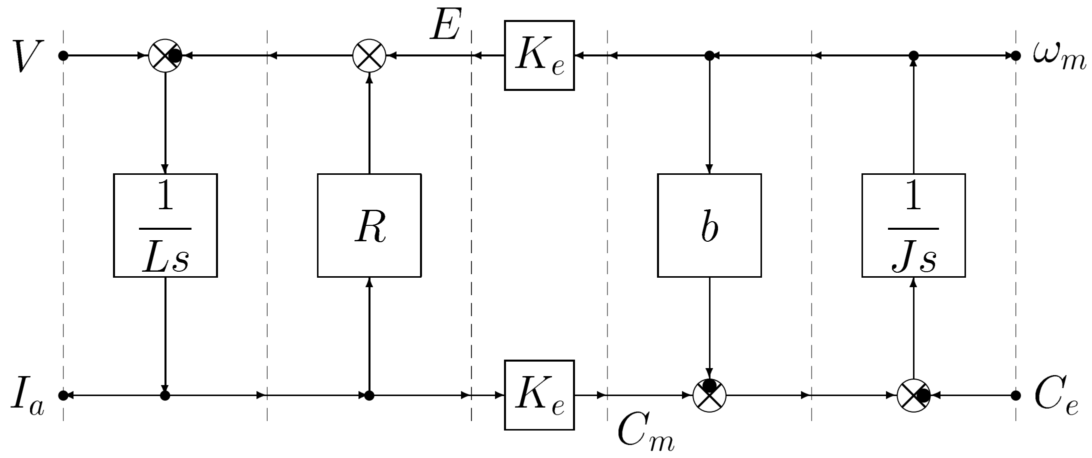
Per il principio di conservazione dell'energia, la costante $K_\mathbf{e}$ è sia la costante di proporzionalità che lega la corrente di armatura I_a alla coppia motrice C_m, sia la costante di proporzionalità che lega la forza contromotrice E alla velocità angolare ω_m:

$$C_m = K_e I_a \qquad\qquad E = K_e \omega_m$$

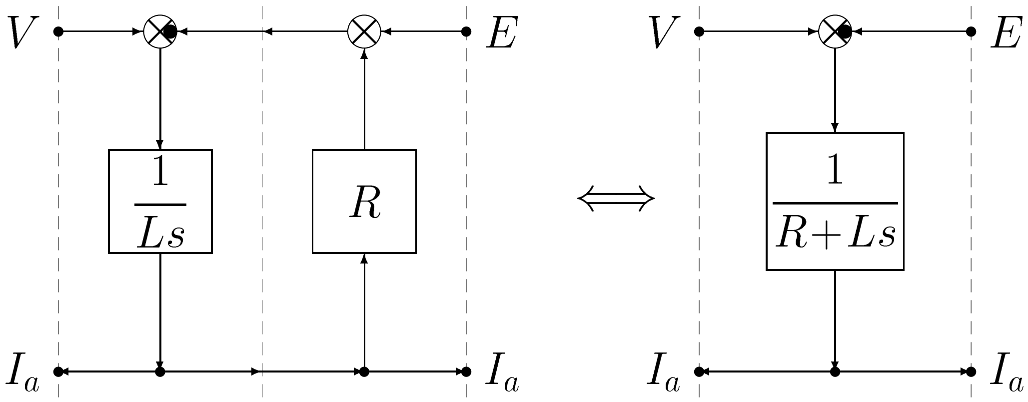
Il sistema è descritto dalle seguenti 2 equazioni differenziali:

$$\begin{cases} L\dot{I}_a &= -RI_a - K_e\,\omega_m + V \\ J\dot{\omega}_m &= K_e I_a - b\,\omega_m - C_e \end{cases}$$

Una equivalente rappresentazione grafica POG del sistema è la seguente:

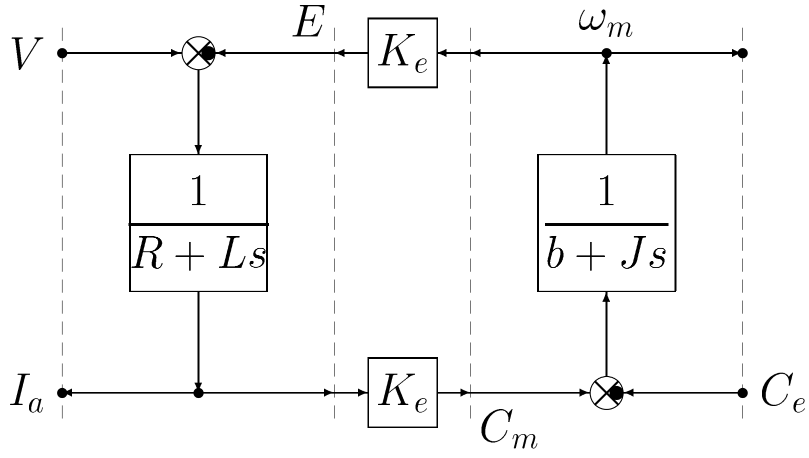


Il sistema dinamico composto dalla serie di una resistenza R e di una induttanza L può essere descritto graficamente utilizzando un solo blocco:



Una analoga considerazione può essere fatta per il momento di inerzia J e l'attrito b.

Applicando la formula di Mason al seguente schema POG



si ottiene il seguente legame tra la variabile di uscita ω_m e le variabili di ingresso V e C_e:

$$\omega_m(s) = G_1(s)V(s) + G_2(s)C_e(s)$$

dove $G_1(s)$ lega l'ingresso di controllo V all'uscita ω_m

$$G_1(s) = \frac{K_e}{(R + L\,s)(b + J\,s) + K_e^2}$$

mentre $G_2(s)$ lega l'ingresso di disturbo C_e all'uscita ω_m:

$$G_2(s) = \frac{-(R + L\,s)}{(R + L\,s)(b + J\,s) + K_e^2}$$

La descrizione dello stesso sistema nello spazio degli stati è la seguente:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_e}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ -C_e \end{bmatrix} \\ \omega_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega_m \end{bmatrix} \end{cases}$$

che in forma compatta è:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} \end{cases}$$

Le due funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$ si ottengono della descrizione del sistema nello spazio degli stati nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} G_1(s) & G_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{C}(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Il legame statico tra i segnali di ingresso (costanti) e la variabile di uscita si ottiene ponendo $s = 0$ nelle funzioni di trasferimento:

$$\bar{\omega}_m = \frac{K_e}{R\,b + K_e^2}\bar{V} - \frac{R}{R\,b + K_e^2}\bar{C}_e$$

I poli del sistema (coincidenti con gli autovalori della matrice A) sono le radici dell'equazione caratteristica $L\,J\,s^2 + (R\,J + b\,L)\,s + R\,b + K_e^2 = 0$:

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega = \frac{-(R\,J + b\,L) \pm \sqrt{(R\,J + b\,L)^2 - 4\,L\,J(R\,b + K_e^2)}}{2\,L\,J}$$

dove:

$$\sigma = \frac{-(R\,J + b\,L)}{2\,L\,J}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{4\,L\,J(R\,b + K_e^2)} - (R\,J + b\,L)^2}{2\,L\,J}$$

Si hanno radici complesse coniugate se:

$$R\,J + b\,L \leq 2\sqrt{L\,J(R\,b + K_e^2)}$$

La pulsazione naturale del sistema è:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{R\,b + K_e^2}{L\,J}}$$

Il coefficiente di smorzamento è:

$$\delta = \frac{R\,J + b\,L}{2\sqrt{L\,J(R\,b + K_e^2)}}$$