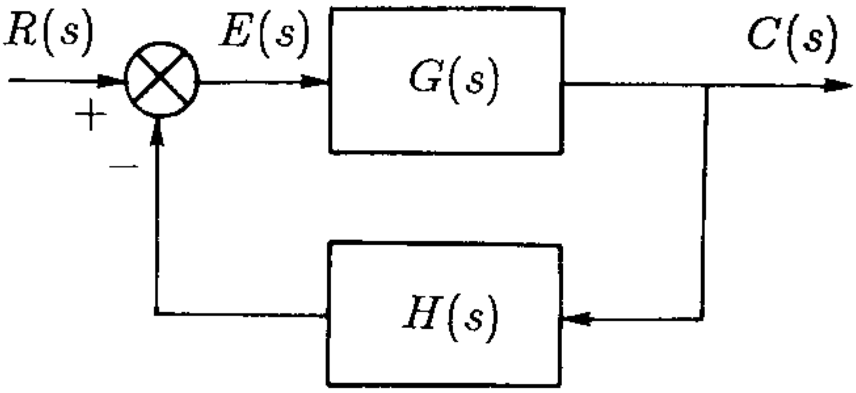
Luogo delle radici

- Si consideri lo schema in retroazione:



- L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$1 + G(s)\,H(s) = 0$$

- Si suppone che il prodotto $G(s)\,H(s)$ sia una funzione razionale fratta posta nella forma

$$G(s)\,H(s) = K_1\,\frac{(s-z_1)\,(s-z_2)\,\ldots\,(s-z_m)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\,\ldots\,(s-p_n)}\,, \qquad n \geq m$$

e che la costante di guadagno K_1 sia positiva.

- Al variare del parametro K_1 da 0 a ∞, le radici dell'equazione caratteristica descrivono una curva nel piano s, cui si dà il nome di *luogo delle radici*.

- Il luogo delle radici risulta di grande utilità per giudicare l'effetto di variazioni della costante di guadagno sulla stabilità e sulla risposta del sistema in retroazione.

- Il metodo si può modificare facilmente per ottenere le variazioni delle radici dell'equazione caratteristica in funzione di parametri diversi dalla costante di guadagno di anello, come ad esempio poli o zeri del sistema ad anello aperto: in tali versioni modificate il metodo viene indicato con il nome di *contorno delle radici*.

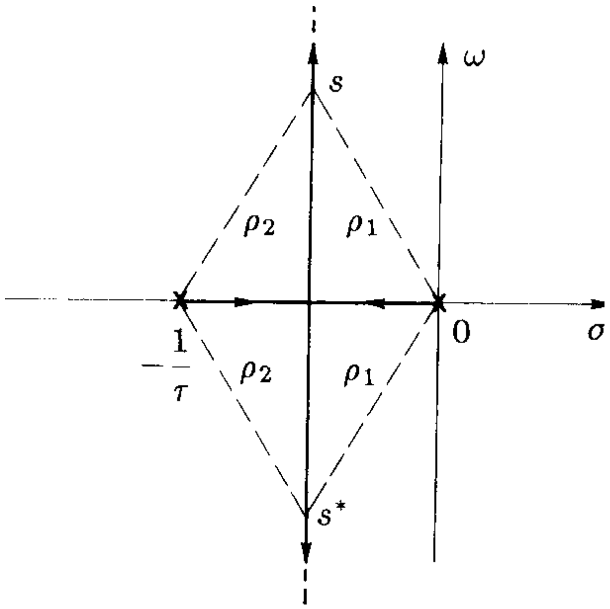
- Posto
$$G_1(s) := \frac{(s-z_1)(s-z_2)\ \ldots\ (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ \ldots\ (s-p_n)}$$
l'equazione caratteristica del sistema può essere riscritta come
$$1 + K_1\, G_1(s) = 0$$

- Se la costante K_1 è positiva, si ha che
$$|G_1(s)| = \frac{1}{K_1}\,, \quad \arg G_1(s) = (2\,\nu+1)\,\pi \quad (\nu \text{ intero})$$

- Se K_1 è negativa, si ha
$$|G_1(s)| = -\frac{1}{K_1}\,, \quad \arg G_1(s) = 2\,\nu\,\pi \quad (\nu \text{ intero})$$

- L'equazione relativa agli argomenti è sufficiente per la costruzione del luogo, mentre la prima serve per la graduazione del luogo stesso in funzione di K_1.

- Esempio. Dato il sistema
$$G(s)\,H(s) = \frac{K_1}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$
al variare di K_1 da 0 a ∞ si ottiene l'andamento riportato a fianco.



Proprietà del luogo delle radici

Il luogo delle radici presenta alcune proprietà che ne vincolano l'andamento e ne agevolano la costruzione.

- **Proprietà 1.** Il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della funzione di trasferimento ad anello aperto $K_1\, G_1(s)$, che si intersecano sulle radici multiple. Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ e termina in uno zero di $G_1(s)$ o in un punto all' infinito.

- **Proprietà 2.** Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

- **Proprietà 3.** Se la costante K_1 è positiva, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e poli. Se la costante K_1 è negativa, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e poli.

- **Proprietà 4.** Se la costante K_1 è positiva, l'angolo secondo il quale il luogo delle radici lascia un polo p_i è

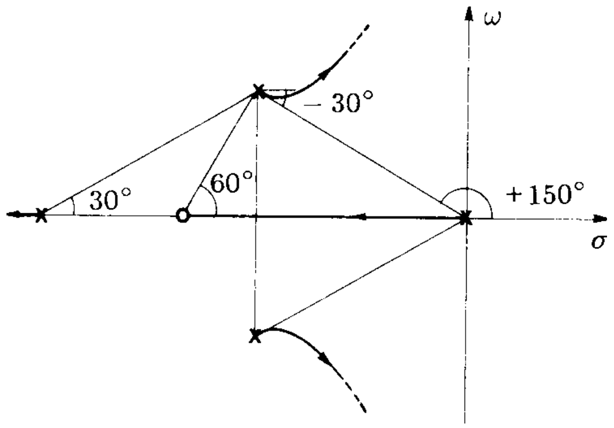
$$(2\,\nu+1)\,\pi + \sum_{j=1}^{m} \arg\,(p_i - z_j) - \sum_{j\in\mathcal{J}'} \arg\,(p_i - p_j)\ ,$$

in cui è $\mathcal{J}' := \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$; l' angolo secondo il quale il luogo tende a uno zero z_i è

$$(2\,\nu+1)\,\pi - \sum_{j\in\mathcal{J}''} \arg\,(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^{n} \arg\,(z_i - p_j)\ ,$$

in cui è $\mathcal{J}'' := \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m\}$. Se la costante K_1 è negativa, nell'enunciato si sostituisce $2\nu\pi$ a $(2\nu+1)\,\pi$.

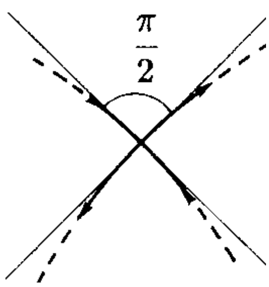
- Esempio:

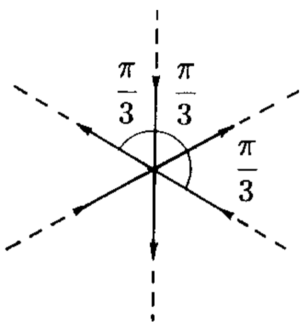


- **Proprietà 5.** Una radice multipla di ordine h corrisponde a un punto comune ad h rami del luogo delle radici, in cui, oltre alla $1+K_1G_1(s)=0$, sono soddisfatte le relazioni che esprimono l'annullarsi delle derivate della funzione di guadagno di anello fino alla $(h-1)$-esima.

$$\frac{d}{ds}G_1(s)=0\,,\;\ldots\;,\;\frac{d^{h-1}}{ds^{h-1}}G_1(s)=0$$

- I due rami che convergono in un punto corrispondente ad una radice doppia, vi convergono da direzioni opposte; nel punto si originano altri due rami, che ne divergono secondo direzioni opposte, disposte a $90°$ rispetto alle direzioni di arrivo dei primi.





- **Proprietà 6.** In corrispondenza di una radice di ordine h il luogo presenta h rami entranti e h rami uscenti, alternati fra di loro, le cui tangenti dividono lo spazio circostante in settori uguali, di π/h radianti.

- **Proprietà 7.** Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right)$$

se la costante K_1 è positiva, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{(2\,\nu+1)\,\pi}{n-m} \qquad (\nu = 0,\, 1,\, \ldots\,,\, n-m-1)$$

se la costante K_1 è negativa, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{2\,\nu\,\pi}{n-m} \qquad (\nu = 0,\, 1,\, \ldots\,,\, n-m-1)$$

- La proprietà 7 comporta un'interessante conseguenza: gli asintoti di un sistema in retroazione negativa avente funzione di trasferimento di anello stabile e a fase minima (cioè con tutti i poli e gli zeri nel semipiano sinistro del piano complesso) intersecano l'asse immaginario in punti diversi dall'origine, il che spiega il fatto che i poli dominanti, cioè quelli che per primi, all'aumentare del guadagno, tendono a passare nel semipiano destro, sono di regola complessi coniugati.

- Per il tracciamento del luogo delle radici, specie per ciò che riguarda i rami corrispondenti ai poli dominanti, è utile la conoscenza dei punti di intersezione del luogo con l'asse immaginario e dei relativi valori del parametro K_1. Poiché tali punti corrispondono al limite di stabilità del sistema in retroazione, per la loro determinazione si può impiegare il criterio di Routh, che fornisce il valore di K_1 corrispondente al limite di stabilità: risolvendo l'equazione ausiliaria, si ottengono poi i valori della pulsazione in corrispondenza dei quali avviene l'intersezione con l'asse immaginario.

Esempio. Si consideri la funzione di trasferimento di anello

$$G(s)\,H(s) = \frac{K_1}{s\,(s+1)\,(s+2)} \; .$$

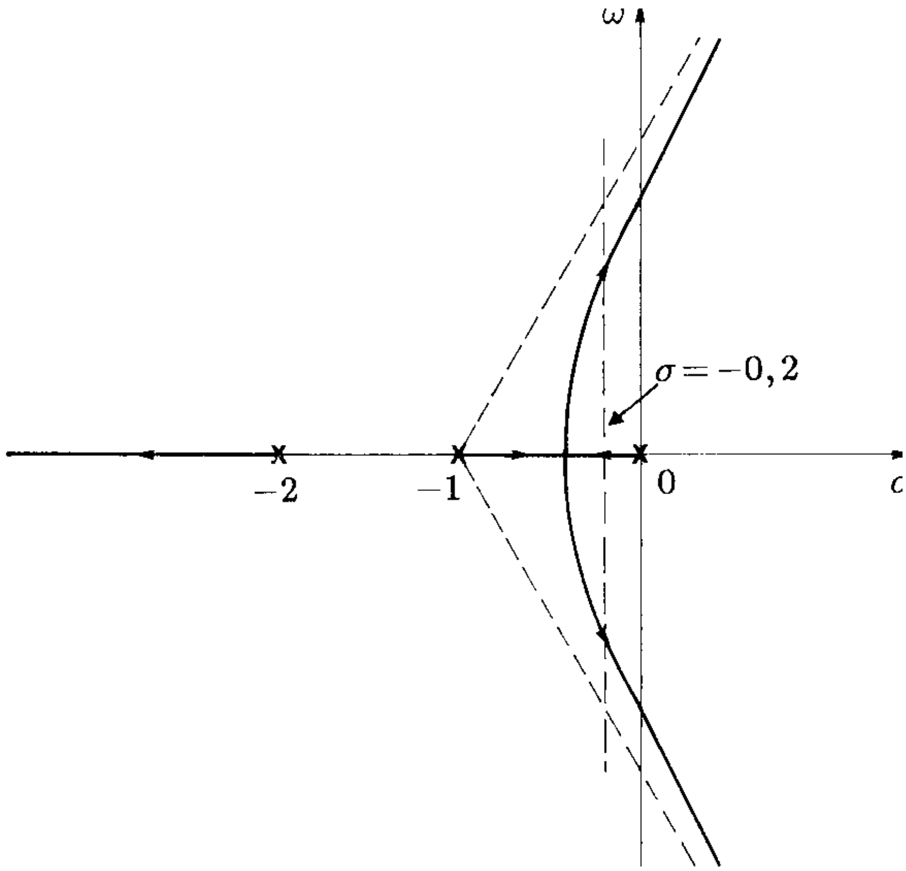
Essendo $n-m=3$, il luogo delle radici presenta tre asintoti che si incontrano nel punto:

$$\sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

e formano con l'asse reale gli angoli:

$$\vartheta_{a0} = 60^\circ \;, \quad \vartheta_{a1} = 180^\circ \;, \quad \vartheta_{a2} = -60^\circ$$

L'andamento del luogo delle radici è il seguente:



Nota: all'aumentare di K il sistema retroazionato diventa instabile.

Il punto di diramazione sull'asse reale si ottiene risolvendo l'equazione ottenuta derivando l'equazione caratteristica.

$$\frac{d}{ds}[1 + G(s)\,H(s)] = 0 \qquad \rightarrow \qquad 3\,s^2 + 6\,s + 2 = 0 \; .$$

Essa ammette due radici reali, una delle quali non appartiene al luogo. L'altra, che costituisce il punto di diramazione cercato, è $s_0 = -0.422$.

L'equazione caratteristica è

$$s\,(s+1)\,(s+2) + K_1 = 0 \; ,$$

cioè

$$s^3 + 3\,s^2 + 2\,s + K_1 = 0$$

La tabella di Routh ad essa relativa è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & K_1 \\ 1 & (6-K_1)/3 & 0 \\ 0 & K_1 & \end{array}$$

Il limite di stabilità è dato da $K_1 = 6$. Sostituendo nella tabella tale valore, si ottiene l'equazione ausiliaria

$$3\,s^2 + 6 = 0\ ,$$

che ammette le radici $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2} = \pm j\,1.41$. Queste corrispondono alle intersezioni del luogo con l'asse immaginario.
Il procedimento indicato può servire anche per trovare le intersezioni del luogo delle radici con una retta verticale $\sigma = \lambda$ diversa dall'asse immaginario.
Per ottenere queste intersezioni basta utilizzare il cambiamento di variabile $z := s - \lambda$, cioè operare la sostituzione $s = z + \lambda$ nell'equazione caratteristica e applicare il criterio di Routh all'equazione in z così ottenuta.
Ad esempio, per calcolare l'intersezione del luogo delle radici con la retta verticale $\sigma = -0.2$, nell'equazione caratteristica del sistema si opera la sostituzione $s = z - 0.2$ ottenendo:

$$z^3 + 2.4\,z^2 + 0.92\,z - 0.288 + K_1 = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 0.92 \\ 2 & 2.4 & -0.288+K_1 \\ 1 & 2.208-(K_1-0,288) & \\ 0 & -0.288+K_1 & \end{array}$$

Le intersezioni con l'asse verticale $\sigma = -0.2$ avvengono per:

$$K_{1a} = 0.288 \qquad \text{e} \qquad K_{1b} = 2.496$$

a cui corrispondono i seguenti poli:

$$p_a = -0.2 \qquad \text{e} \qquad p_{b1,2} = -0.2 \pm j\sqrt{\frac{2.208}{2.4}} = -0.2 \pm j\,0.96$$

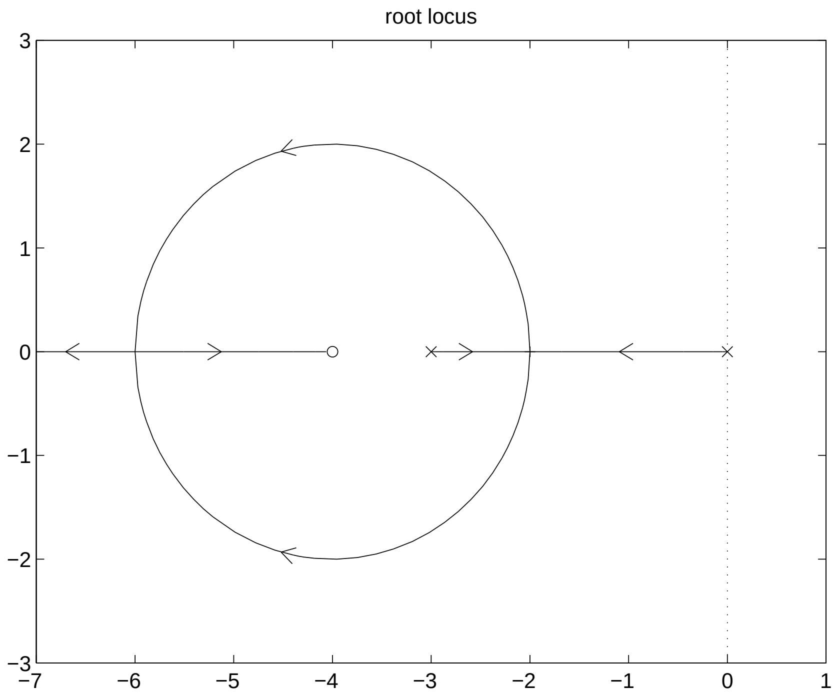
Esempio. Disegnare qualitativamente il luogo delle radici del seguente sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$.

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+3)}$$

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+4)}{s(s+3)} = 0$$

Il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$ è il seguente:



I punti di diramazione sull'asse reale si determinano come segue:

$$\frac{d}{d\,s}\left[\frac{K(s+4)}{s(s+3)}\right] = 0 \quad \rightarrow \quad s(s+3) - (s+4)(2s+3) = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + 8s + 12 = 0$$

I punti di diramazione sono posizionati in $\sigma_1 = -2$ e in $\sigma_1 = -6$. I corrispondenti valori di K si ricavano nel modo seguente:

$$K_1 = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=\sigma_1} = 1, \qquad\qquad K_2 = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=\sigma_1} = 9$$

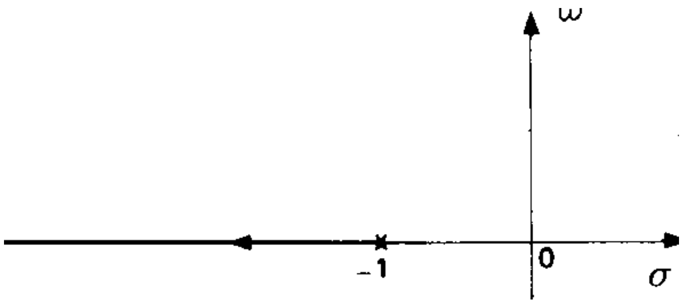
Nota. I due rami del luogo delle radici di un sistema avente solo due poli e uno zero, se escono dall'asse reale si spostano sempre lungo un tratto di circonferenza che ha centro nello zero e raggio $R = \sqrt{d_1 d_2}$, dove d_1 e d_2 sono la distanza dello zero dai 2 poli. Nel caso in esame si ha:

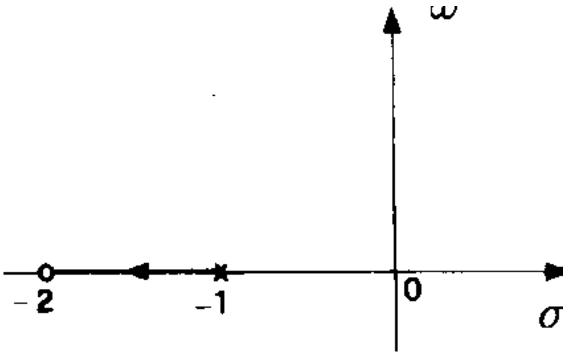
$$R = \sqrt{(4-1)(4-3)} = 2$$

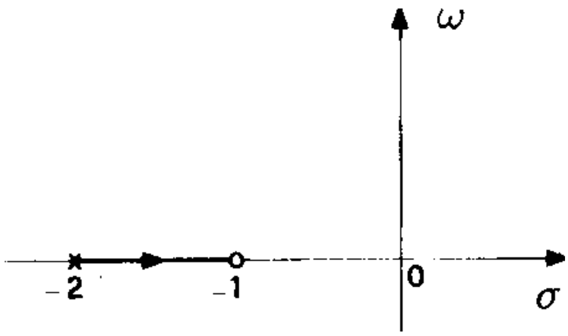
In questo caso, i punti di diramazione potevano anche essere calcolati utilizzando questa proprietà: $\sigma_1 = -4 + 2 = -2$, $\sigma_2 = -4 - 2 = -6$.

Alcuni esempi di luoghi delle radici

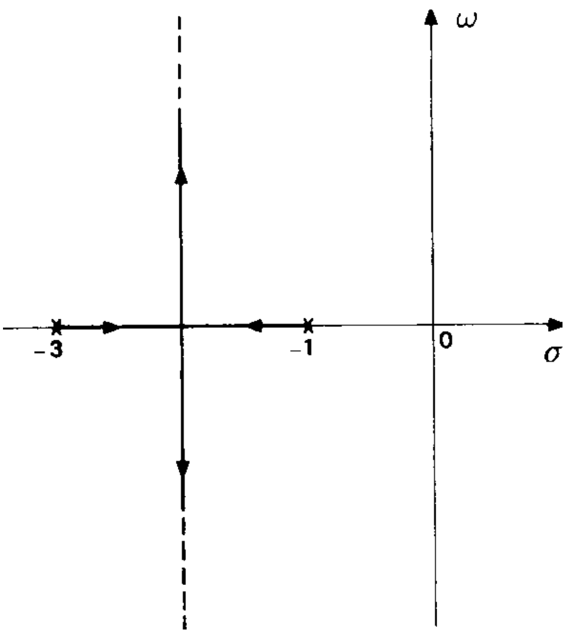
- Luogo delle radici di sistemi del primo ordine:

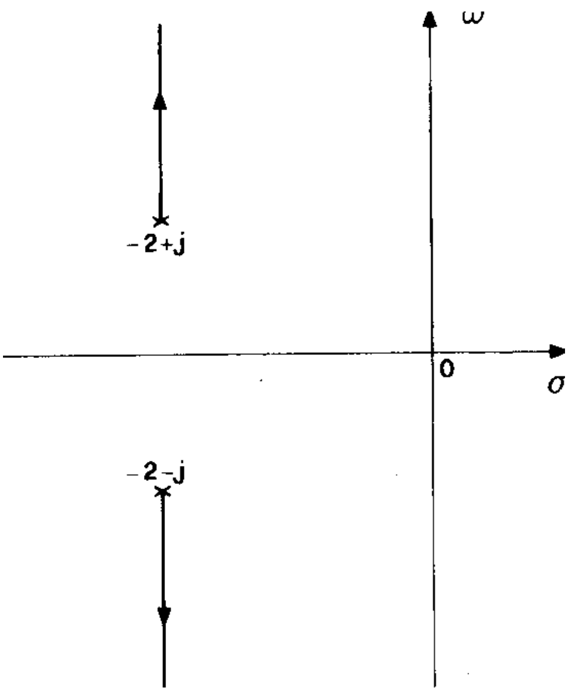




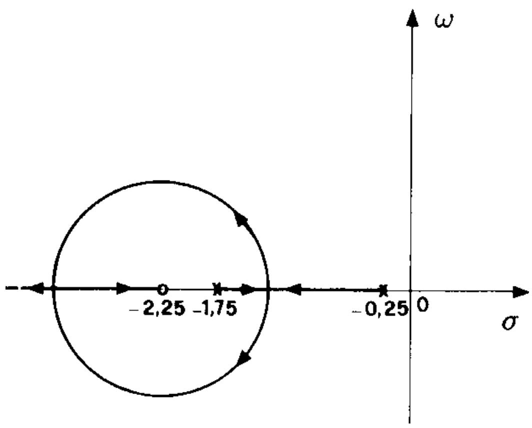


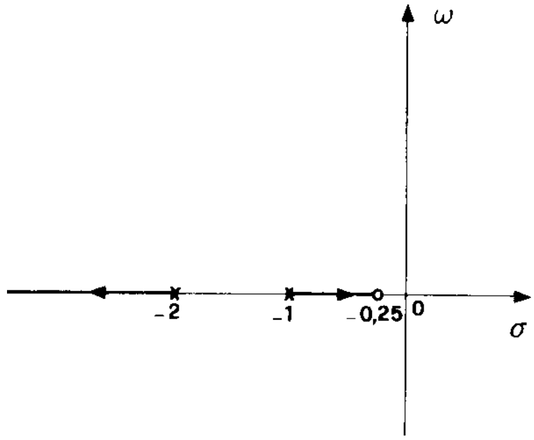
- Luogo delle radici di sistemi del secondo ordine:

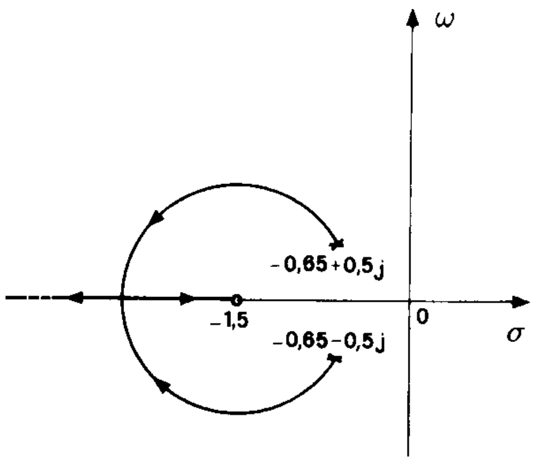


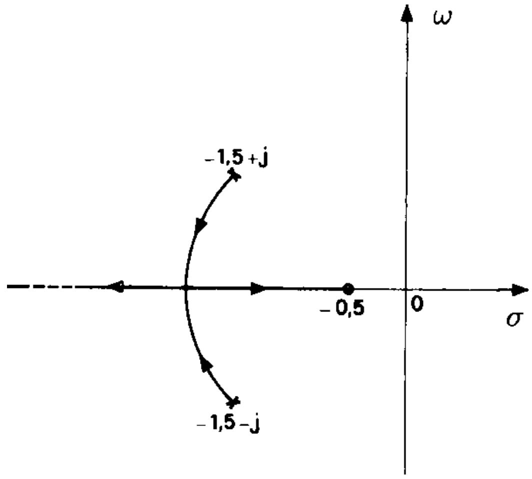


- Luogo delle radici di sistemi del secondo ordine:

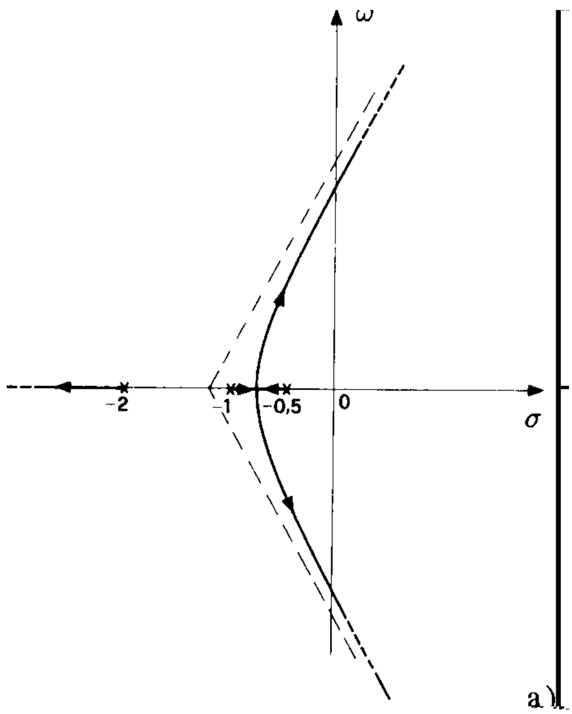


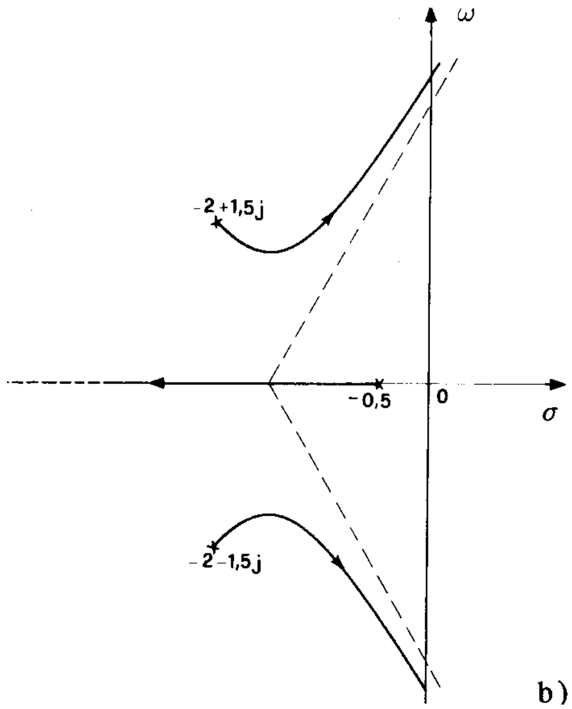




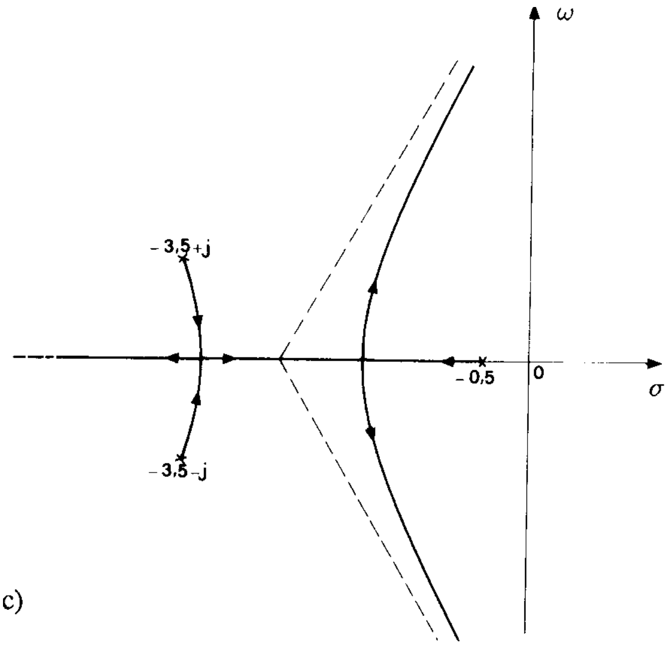


- Luogo delle radici di sistemi del terzo ordine:

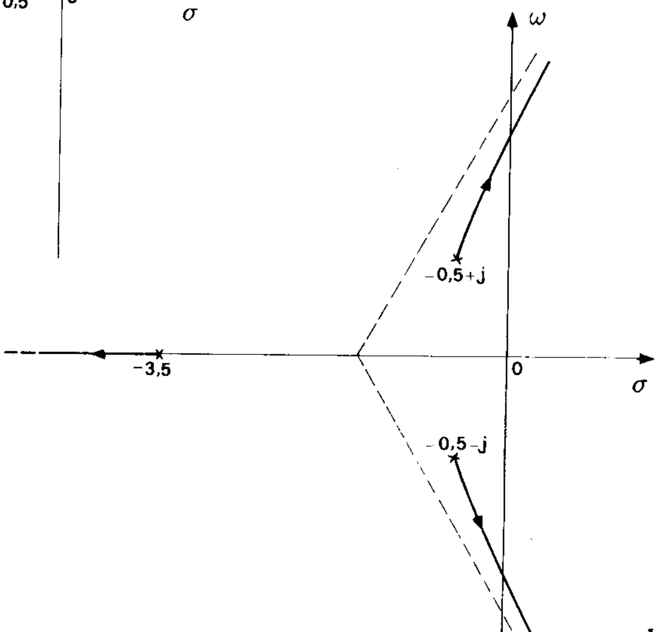




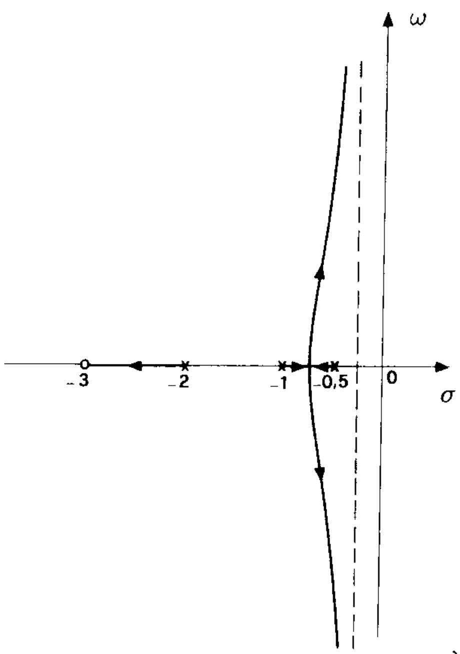
- Luogo delle radici di sistemi del terzo ordine:



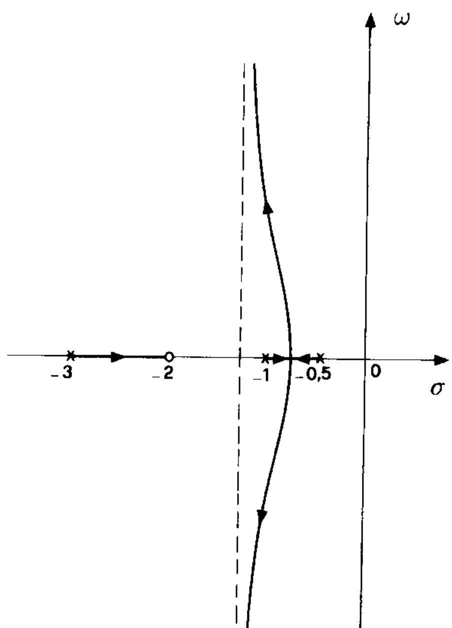
c)



d)

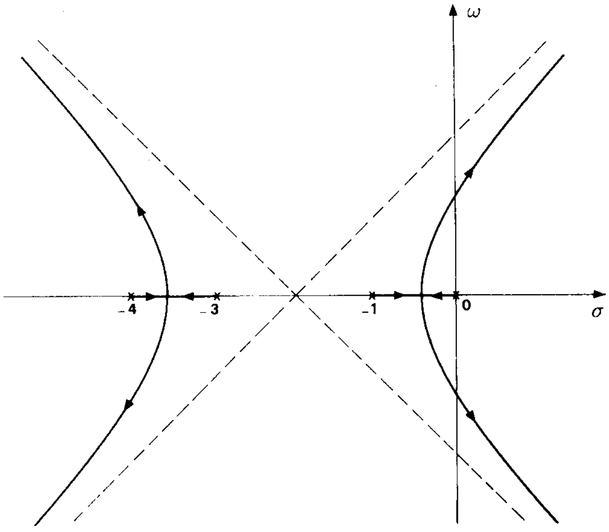


e)

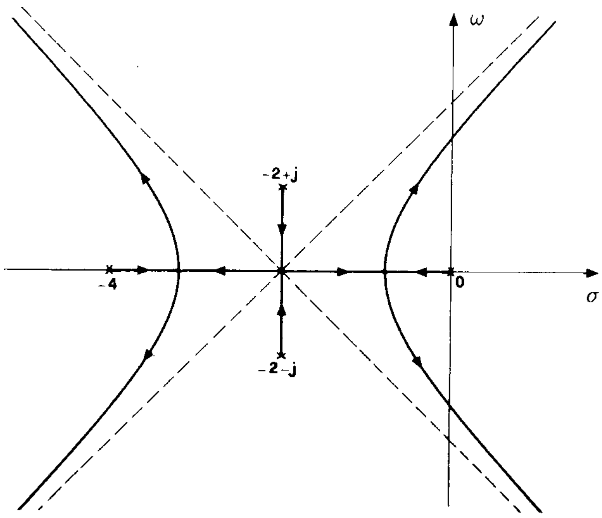


f)

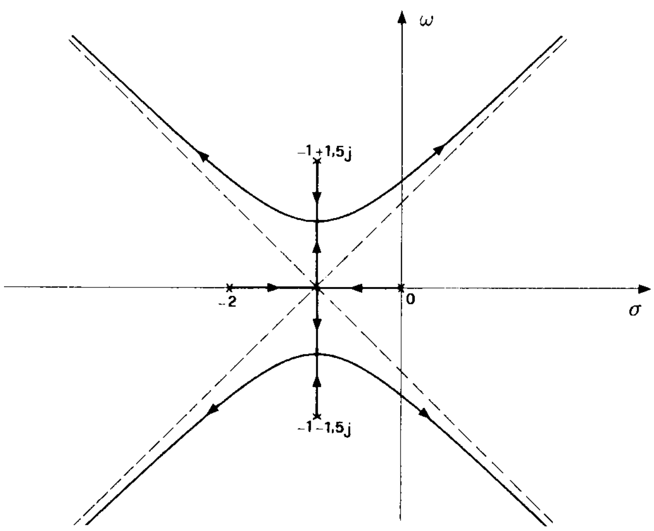
- Luogo delle radici di sistemi del quarto ordine:



a)



b)



c)