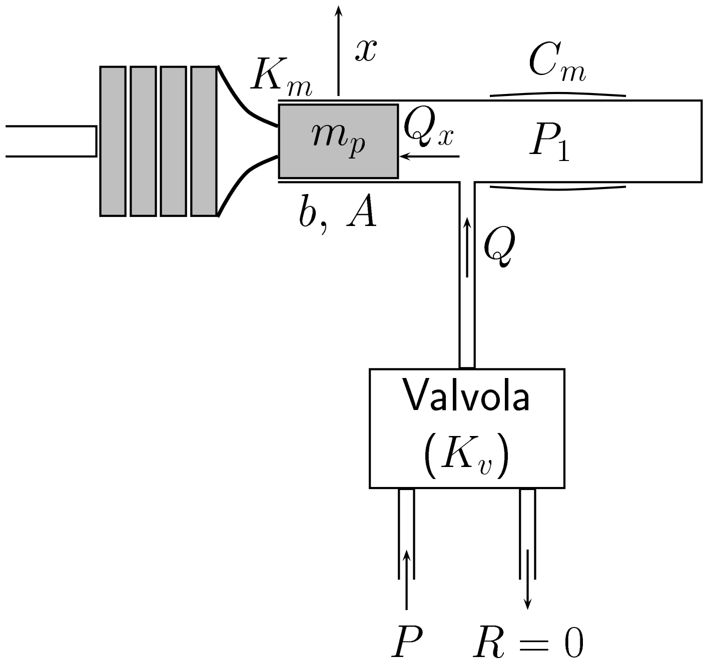
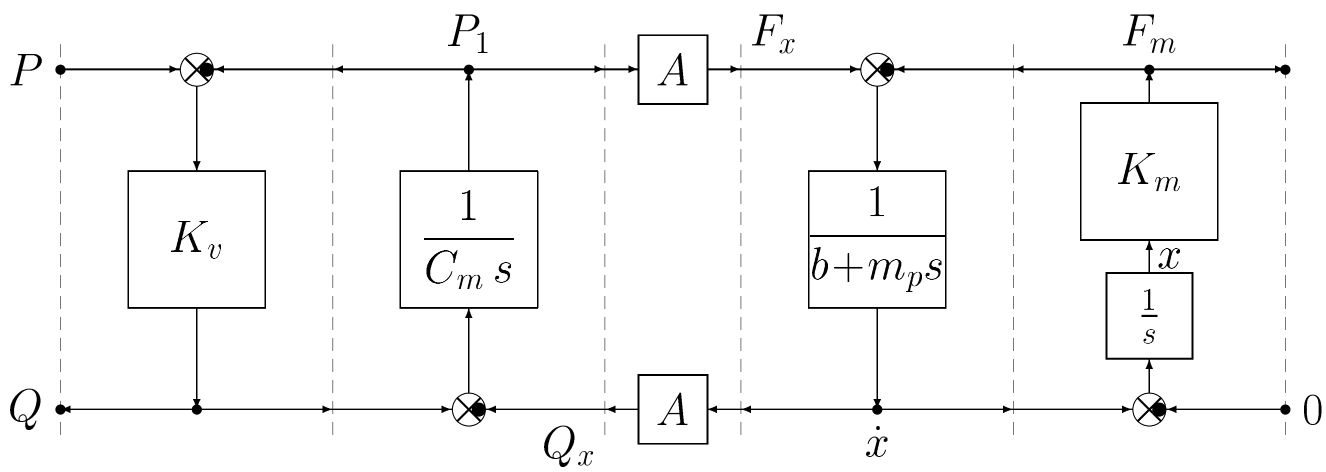
Frizione idraulica: progetto di un regolatore

Si consideri il seguente modello idraulico semplificato di una frizione:

P	Pressione di alimentazione
Q	Portata volumetrica nella valvola
K_v	Costante di prop. della valvola
C_m	Capacità idraulica del cilindro
P_1	Pressione all'interno del cilindro
A	Sezione del pistone
x	Posizione del pistone
$\dot{x}$	Velocità del pistone
m_p	Massa del pistone
b	Attrito lineare del pistone
K_m	Rigidità della molla
F_m	Forza della molla sul pistone



Il corrispondente modello dinamico POG è il seguente:



Problema di controllo: agendo sulla pressione di alimentazione P si vuole progettare un sistema di controllo sulla forza F_m tale da garantire un errore a regime sulla risposta al gradino inferiore al 2%, un tempo di assestamento T_a inferiore a 0.4 secondi senza apprezzabili sovraelongazioni sulla posizione x del pistone.

Il sistema è caratterizzato dai seguenti parametri:

$K_v = 3 \cdot 10^{-5}\, m^3/(sec\, Pa)$	Costante di prop. della valvola
$C_m = 1 \cdot 10^{-6}\, m^3/Pa$	Capacità idraulica del cilindro
$A = 4 \cdot 10^{-4}\, m^2$	Sezione del pistone
$m_p = 0.3\, Kg$	Massa del pistone
$b = 25\, N\, sec/m$	Attrito lineare del pistone
$K_m = 8000 \cdot N/m$	Rigidità della molla

Nota: i valori utilizzati per i parametri K_v e C_m sono molto più grandi rispetto a quelli fisicamente plausibili per il sistema in oggetto.

Analisi del sistema

Utilizzando la formula di Mason e le seguenti variabili ausiliarie

$$G_1 = K_v, \qquad G_2 = \frac{1}{C_m s}, \qquad G_3 = \frac{1}{b + m_p s}, \qquad G_4 = \frac{K_m}{s}$$

si ottiene la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema tra la pressione di ingresso P (espressa in Pascal [Pa]) e la forza F_m (espressa in Newton [N]):

$$G(s) = \frac{F_m(s)}{P(s)} = \frac{A\, G_1\, G_2\, G_3\, G_4}{1 + G_1\, G_2 + A^2\, G_2\, G_3 + G_3\, G_4 + G_1\, G_2\, G_3\, G_4}$$

che sostituendo diventa:

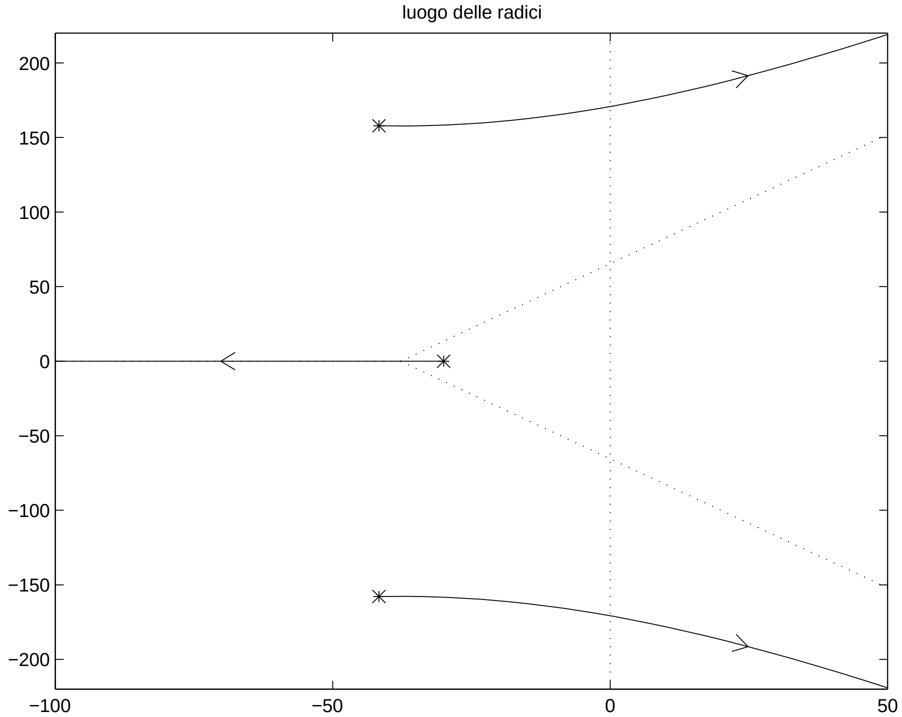
$$G(s) = \frac{A K_m K_v}{C_m m_p s^3 + (C_m\, b + K_v m_p) s^2 + (A^2 + C_m K_m + K_v\, b) s + K_m K_v}$$

Sostituendo i valori numerici indicati si ottiene:

$$G(s) = \frac{9.6 \cdot 10^{-5}}{(3 \cdot 10^{-7})\, s^3 + (3.4 \cdot 10^{-5})\, s^2 + 0.00875\, s + 0.24}$$

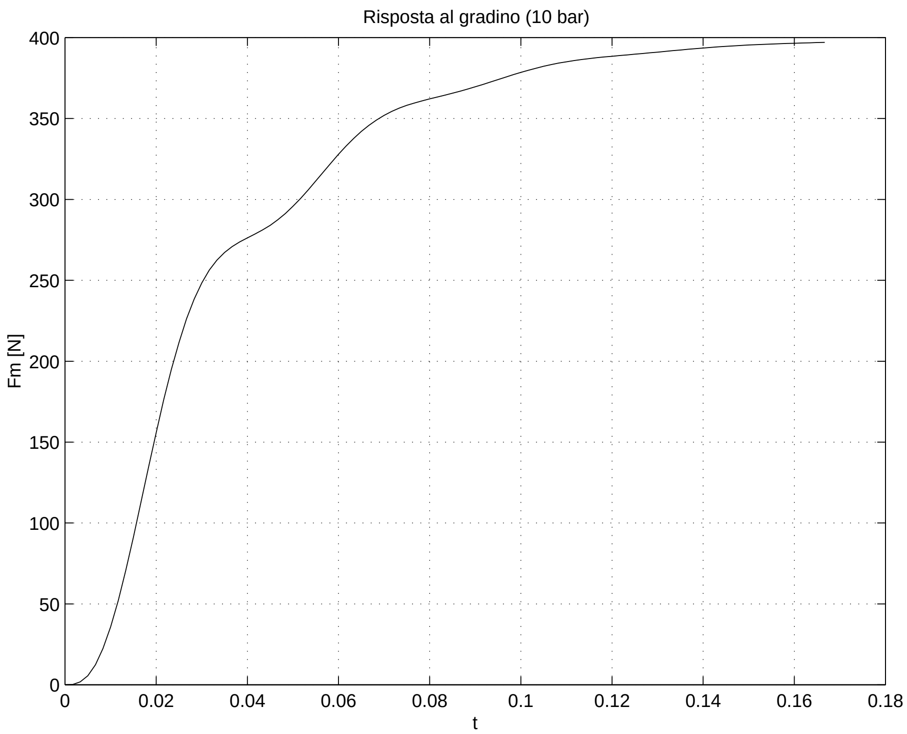
Si tratta quindi di un sistema del 3^o ordine con grado relativo 3.

Luogo delle radici del sistema retroazionato:



Il sistema è caratterizzato da un polo semplice e da una coppia di poli complessi e coniugati, tutti a parte reale negativa, pertanto il sistema è stabile ad anello aperto. In questo caso non si può parlare di sistema a polo dominante perchè le parti reali dei 3 poli sono comparabili.

La risposta a un gradino di pressione di 10bar (1 [bar]$= 10^5$ [Pa]) è la seguente:

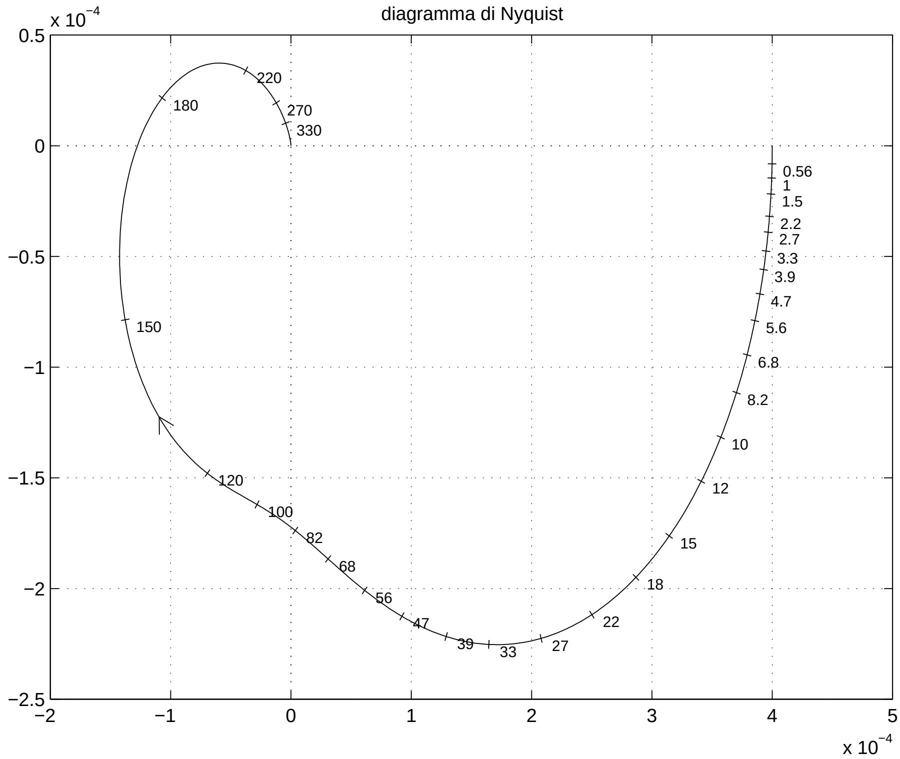


Si può verificare che il guadagno statico del sistema è $G(0) = 4 \cdot 10^{-4}$ e che la risposta differisce sia da quella di un sistema a polo dominante, che da quella di un sistema a poli complessi e coniugati dominanti.

Applicando il criterio di Routh, il sistema retroazionato con un guadagno K risulta stabile per:

$$\bar{K} = -2500 < K < 7830 = K^*$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(j\omega)$ è il seguente:



Sintesi del controllore (1)

Dato che la specifica richiesta è sull'errore a regime, calcoliamo il valore del guadagno $K_{2\%}$ tale da garantire l'errore a regime richiesto.

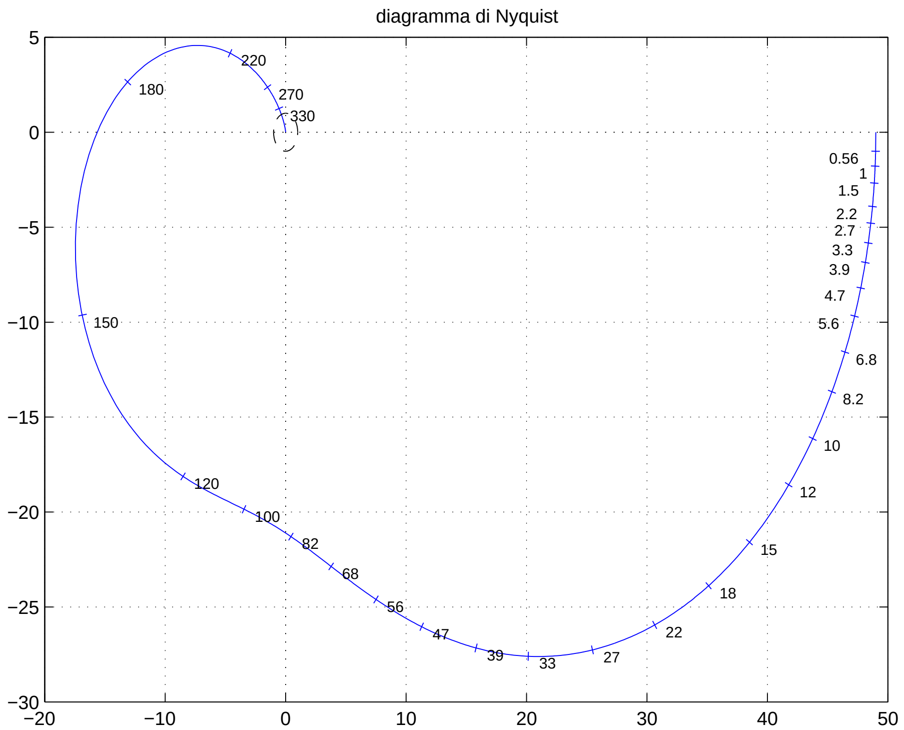
$$e_{p\%} = \frac{e_p}{R_0} 100 = \frac{1}{1 + K\, G(0)} 100$$

da cui, per $e_{p\%} = 2\%$

$$K_{2\%} = \frac{1}{G(0)} \left(\frac{100}{e_{p\%}} - 1 \right) = \frac{49}{0.0004} = 122500$$

È importante notare che questo guadagno è molto superiore al guadagno limite $K^* = 7830$. Per stabilizzare il sistema rispettando al tempo stesso la specifica sull'errore a regime, sarà necessario usare una rete correttrice.

Diagramma di Nyquist del sistema $K_{2\%}\, G(s)$:



Dato che il sistema è fortemente instabile, non è possibile utilizzare una rete anticipatrice per stabilizzarlo.

Progettiamo quindi una rete ritardatrice $C_1(s)$ imponendo un margine di ampiezza di 10, quindi il punto di arrivo B è individuato dal modulo $M_B = 0.1$ e dalla fase $\varphi_B = -\pi$.
Per mantenere una buona larghezza di banda è conveniente scegliere il punto di partenza A con una pulsazione relativamente alta, pertanto scegliamo $\omega_A = 160\, rad/s$. Calcolando la funzione $G(s)$ per $s = j\omega_A$ si ottiene $M_A = 18.5$ e $\varphi_A = -2.88$.

I parametri della rete ritardatrice $C_1(s)$ risultano quindi:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0054 \qquad\qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -0.2652$$

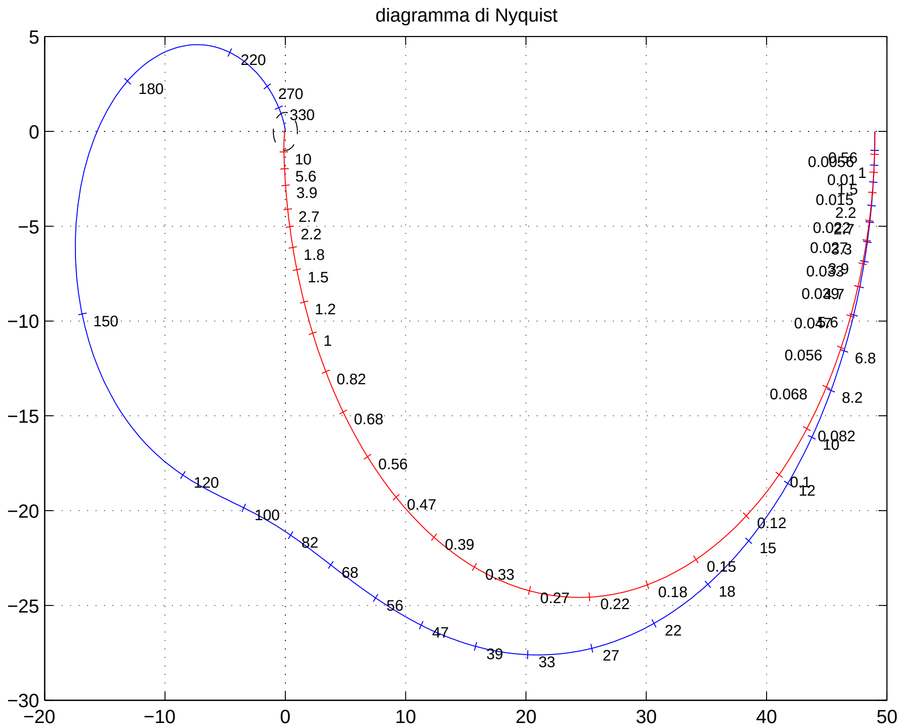
Applicando le formule di inversione si ricavano le due costanti di tempo:

$$\tau_1 = 0.0229 \qquad\qquad \tau_2 = 4.3922$$

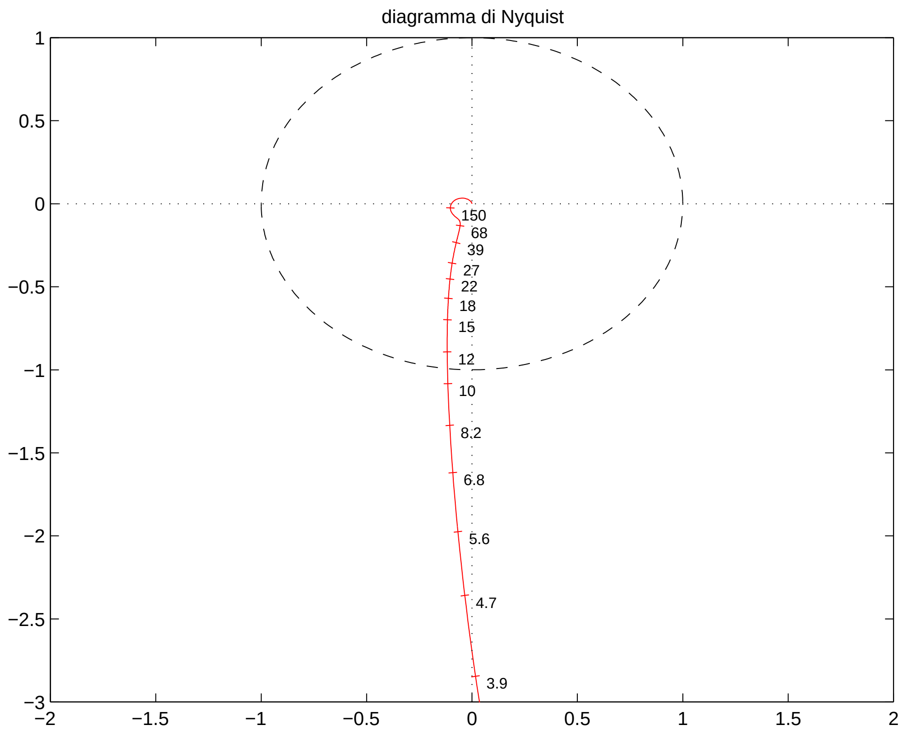
Si è quindi ottenuto la seguente rete correttrice:

$$C_1(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s} = \frac{1+0.0229\, s}{1+4.3922\, s}$$

Diagrammi di Nyquist del sistema $K_{2\%}\, G(s)$ con e senza rete correttrice:

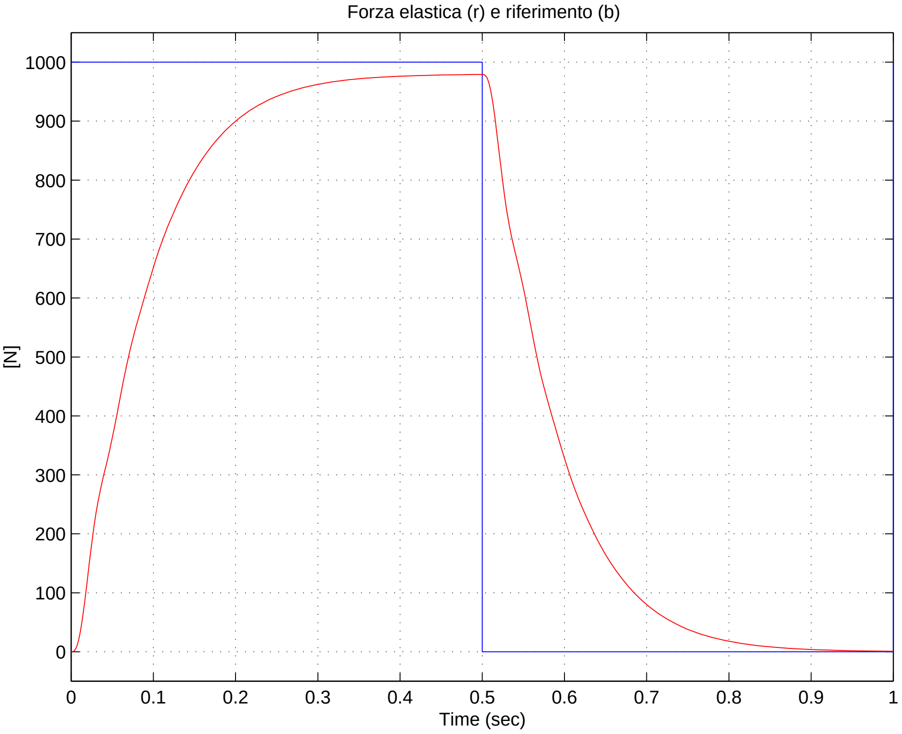


Dettaglio del diagramma di Nyquist del sistema compensato $C_1(s)\, K_{2\%}\, G(s)$:



La pulsazione ω alla quale il diagramma del sistema compensato interseca la circonferenza unitaria è circa $\omega = 11$rad/s, questa è una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato.

Risposta al gradino del sistema retroazionato con rete correttrice:



Il sistema retroazionato è caratterizzato da un errore a regime del 2% e da un tempo di assestamento inferiore a 0.3 s. Le specifiche di progetto sono pertanto soddisfatte.

Sintesi del controllore (2)

La specifica sull'errore a regime può essere soddisfatta non solo aumentando il guadagno statico, ma anche inserendo un integratore nell'anello di controllo in modo da garantire un errore a regime nullo per ingresso a gradino.

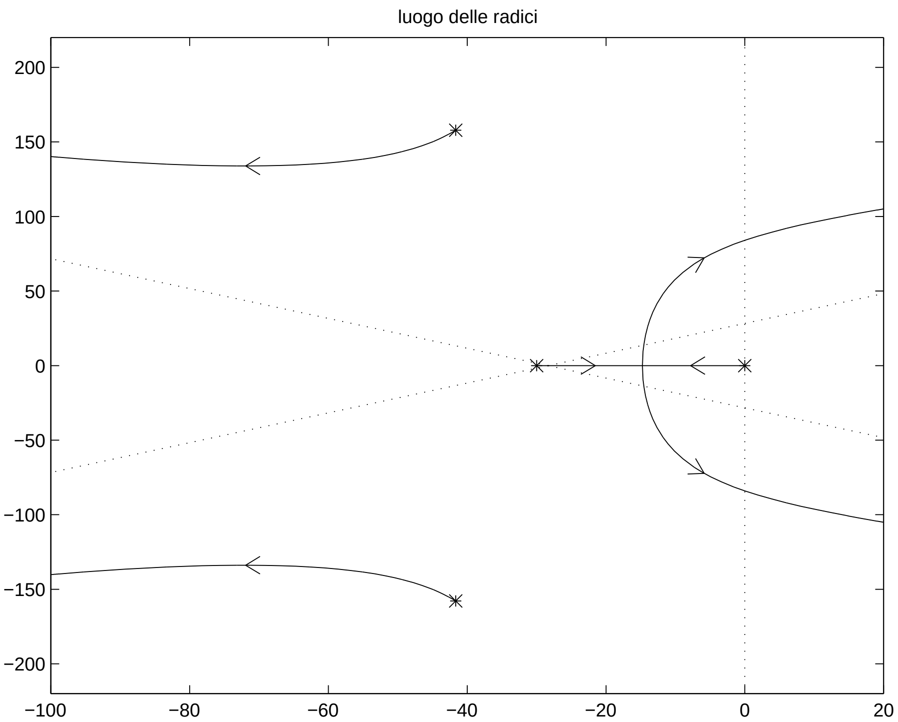
Consideriamo quindi il sistema $G_2(s) = C_2(s)\,G(s)$ dove

$$C_2(s) = \frac{K_i}{s}$$

è il controllore di tipo integrale. Gli intervalli di stabilità del sistema $G_2(s)$ al variare del guadagno K_i sono:

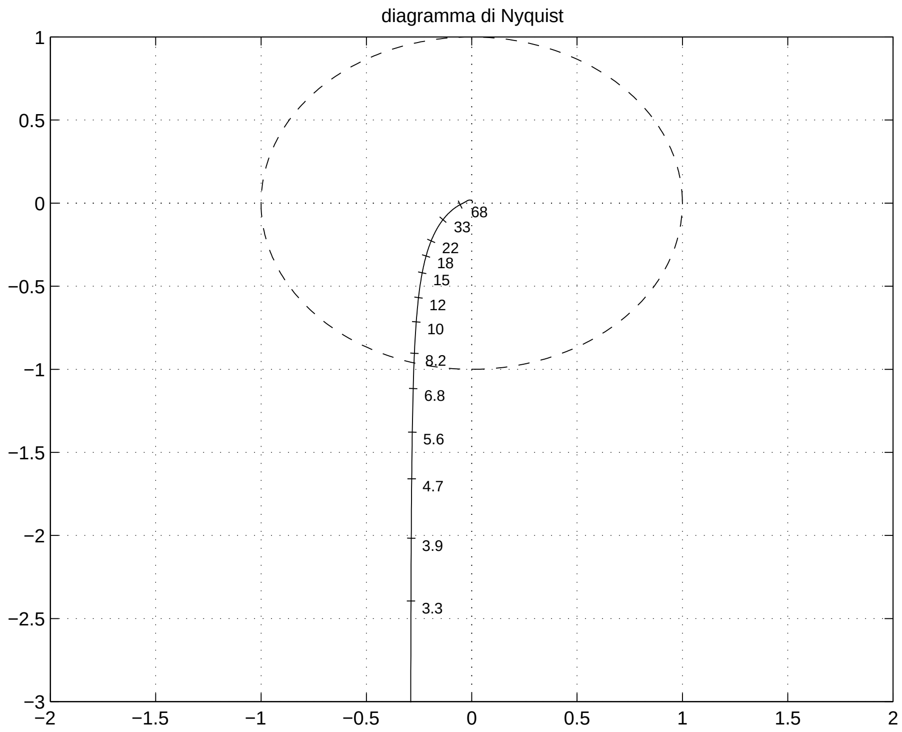
$$0 \leq K_i \leq 487700 = K_i^*$$

Luogo delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del guadagno $K_i > 0$:



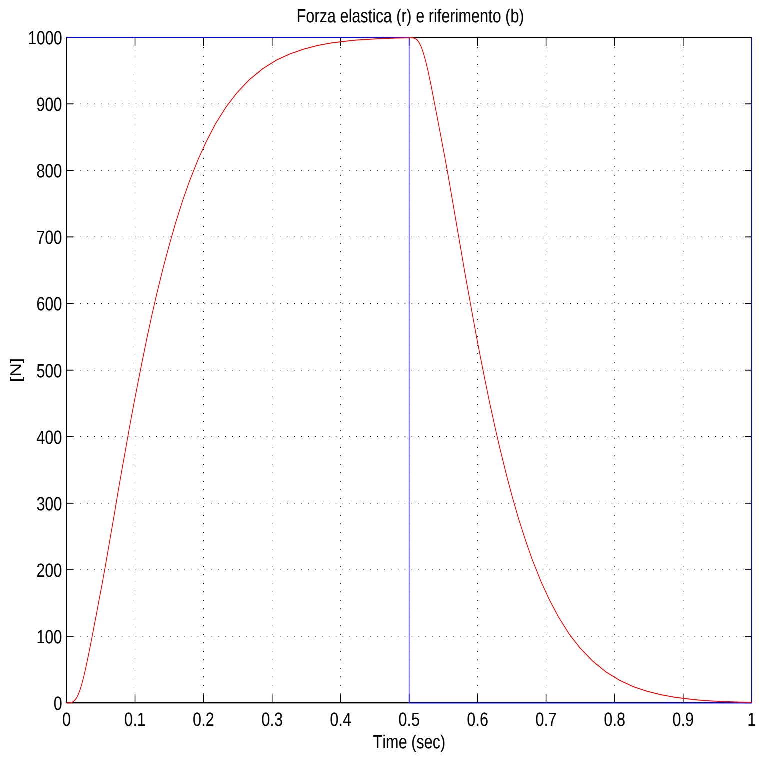
All'aumentare del parametro $K_i > 0$ i due poli sull'asse reale si avvicinano e, in corrispondenza del punto di diramazione, tutti i poli del sistema si trovano alla massima distanza dall'asse immaginario. In corrispondenza del punto di diramazione il valore di K_i è 18000. Tale valore fornisce una buona indicazione del guadagno corrispondente al minimo tempo di assestamento.

Scegliendo il valore $K_i = 20000$ si ottiene il seguente diagramma di Nyquist:



Il sistema presenta già ottimi margini di fase (74^o) e di ampiezza (> 24).

Risposta al gradino del sistema del sistema $K_i\, G(s)/s$ per $K_i = 20000$:



Il tempo di assestamento è quello richiesto, pertanto le specifiche richieste sono soddisfatte.

Aumentando il guadagno e aggiungendo una rete anticipatrice si può ulteriormente aumentare la velocità di risposta del sistema, ridurre il tempo di assestamento e migliorare l'errore di inseguimento di un riferimento a rampa.

Confronto delle risposte al gradino del sistema $K_i\,G(s)/s$ con $K_i = 20000$ e del sistema con $K_i = 72000$ e con rete anticipatrice: