

*Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia*

---

*Facoltà di Ingegneria di Modena*

*Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica*

# **Modellistica e simulazione degli effetti dinamici causati dai giochi in un sistema di trasmissione a ruote dentate**

Relatore:  
**Prof. Roberto Zanasi**

Tesi di Laurea di:  
**Marco Fei**

Correlatore:  
**Dott.ssa Ing. Federica Grossi**  
**Ing. Andrea Balluchi**



5 parole chiave:

**Modellistica,**  
**Simulazione,**  
**Sistema di trasmissione,**  
**Ruote dentate,**  
**Gioco.**

*.... Ai miei genitori Franco e Giovanna,  
che mi hanno sostenuto e sopportato  
in questi anni di studio...*

*... A Michela che mi è sempre stata vicina...*



# Indice

<b>Indice</b>	<b>vi</b>
<b>Introduzione</b>	<b>vii</b>
<b>1 Descrizione del sistema</b>	<b>1</b>
1.1 Sistema di trasmissione . . . . .	1
1.2 Volano e Motore . . . . .	3
1.3 Albero di trasmissione . . . . .	4
1.4 Le ruote dentate . . . . .	4
1.4.1 Ruote dentate, ingranaggi e rapporto di trasmissione . .	4
1.4.2 Ruote dentate piane ad evolvente . . . . .	6
1.4.3 Ingranamento e forze trasmesse . . . . .	7
1.4.4 Gioco e Risonanza . . . . .	7
<b>2 Modello di un sistema di trasmissione</b>	<b>11</b>
2.1 Schema POG . . . . .	11
2.2 Rappresentazione nello S.d.S . . . . .	15
2.3 Contorno delle radici e pulsazioni di risonanza . . . . .	18
2.4 Linearizzazione del modello . . . . .	21
<b>3 Simulazione urti di ingranamento alla testa dei denti</b>	<b>27</b>
3.1 Urti fra le ruote dentate . . . . .	27
3.2 Cambiamento delle condizioni iniziali negli integratori . . . .	30
3.3 Modello Simulink e simulazioni . . . . .	31
<b>4 Analisi dei dati sperimentali forniti</b>	<b>37</b>
4.1 Filtraggio dei dati forniti . . . . .	39
4.2 Definizione degli attriti interni al sistema . . . . .	40
4.3 Graficazione dei picchi e calcolo del periodo . . . . .	47
4.4 Analisi spettrale . . . . .	52
<b>5 Simulazione della risonanza</b>	<b>55</b>
5.1 Calcolo della coppia da applicare in ingresso . . . . .	55
5.1.1 Calcolo della fondamentale . . . . .	56
5.1.2 Calcolo delle armoniche . . . . .	57

5.1.3	Problematiche relative al feed-back . . . . .	59
5.2	Simulazioni . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Studio di eventuali cicli limite presenti nel sistema</b>	<b>71</b>
6.1	Metodo della funzione descrittiva . . . . .	71
6.1.1	Estensione del metodo della funzione descrittiva . . . . .	72
6.2	Estensione del metodo della funzione descrittiva applicato al modello del sistema di trasmissione . . . . .	73
6.3	Calcolo della funzione descrittiva . . . . .	75
6.3.1	Espressione analitica del segnale di uscita . . . . .	75
6.3.2	Sviluppo in serie di Fourier del segnale di uscita . . . . .	78
6.4	Soluzione delle equazioni di autosostentamento . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Modellistica Power-Oriented Graph</b>	<b>91</b>
A.1	Modellistica dinamica di sistemi fisici . . . . .	91
A.2	Blocchi fondamentali . . . . .	92
A.2.1	Caso monodimensionale . . . . .	92
A.2.2	Caso multidimensionali . . . . .	93
A.3	Inversione di modello . . . . .	94
A.4	Rappresentazione nello S.d.S per sistemi lineari tempo-invarianti	95
A.4.1	Riduzione del sistema . . . . .	95
<b>B</b>	<b>Codici Matlab</b>	<b>97</b>
B.1	UniMoData1Reduced.m . . . . .	97
B.2	UniMoData1filtered.m . . . . .	99
B.3	deriva.m . . . . .	102
B.4	picchi.m . . . . .	103
B.5	UniMoData1ANALISIDATI.m . . . . .	106
B.6	PicchiSimulazioni2.m . . . . .	110
B.7	PlotytF0F1.m . . . . .	118
B.8	FindZeroInt.m . . . . .	123
<b>Bibliografia</b>		<b>127</b>
<b>Ringraziamenti</b>		<b>129</b>

# Introduzione

Tutti i sistemi fisici reali, siano essi meccanici, elettrici, idraulici, ecc., presentano legami di tipo non lineare tra le diverse variabili fisiche in gioco. La principale caratteristica di un sistema non lineare è che esso non soddisfa il principio di sovrapposizione degli effetti. Per un sistema non lineare non è pertanto possibile calcolare la risposta ad un ingresso esterno dato dalla somma di due segnali, calcolando separatamente la risposta del sistema a ciascun segnale e sommando poi i risultati così ottenuti. Inoltre un sistema non lineare soggetto ad oscillazione sinusoidale può dare luogo a nuove componenti spettrali indipendenti dall'eccitazione contrariamente a quanto accade in un sistema lineare che presenta a regime una risposta sinusoidale isofrequenziale. La presente tesi ha come obiettivo la realizzazione di un modello e la simulazione degli effetti dinamici causati dalla non linearità di tipo soglia introdotta dai giochi in un sistema di trasmissione a ruote dentate. La trasmissione è stata realizzata dall'azienda Dana S.p.A. la quale ha fornito la documentazione e le specifiche necessarie per effettuare lo studio del sistema. I problemi affrontati sono quindi da ricondurre all'ambito dei controlli automatici in quanto il sistema è già stato realizzato da un punto di vista meccanico (vedi Fig. 1).

La costruzione di un modello che rispecchi la realtà fisica, almeno nei suoi aspetti fondamentali, è la base di partenza per ottenere l'obiettivo che è stato prefissato. Tuttavia questa correlazione tra mondo simulato e mondo reale non è sempre facilmente individuabile ed esplicitabile, visto il gran numero di parametri che entrano in gioco nello studio di una trasmissione come quella in oggetto. Oltre ad avere un buon modello occorre comunque sempre disporre di una metodologia di investigazione ben definita, che in questo caso può essere suddivisa in due fasi principali: l'acquisizione dei dati sperimentali e la validazione del modello. La prima fase permette di ottenere i valori delle grandezze che servono per fare il tuning del modello e che saranno confrontati nella fase successiva con quelli ottenuti dalla simulazione, realizzando in tal modo l'opera di validazione.

La tesi è articolata in sette capitoli introdotti brevemente di seguito. Nel primo capitolo si presenta una breve descrizione della trasmissione e delle varie parti che la compongono; facendo particolare attenzione alle ruote dentate che sono l'oggetto di studio su cui verte la tesi; in questo modo si spera di

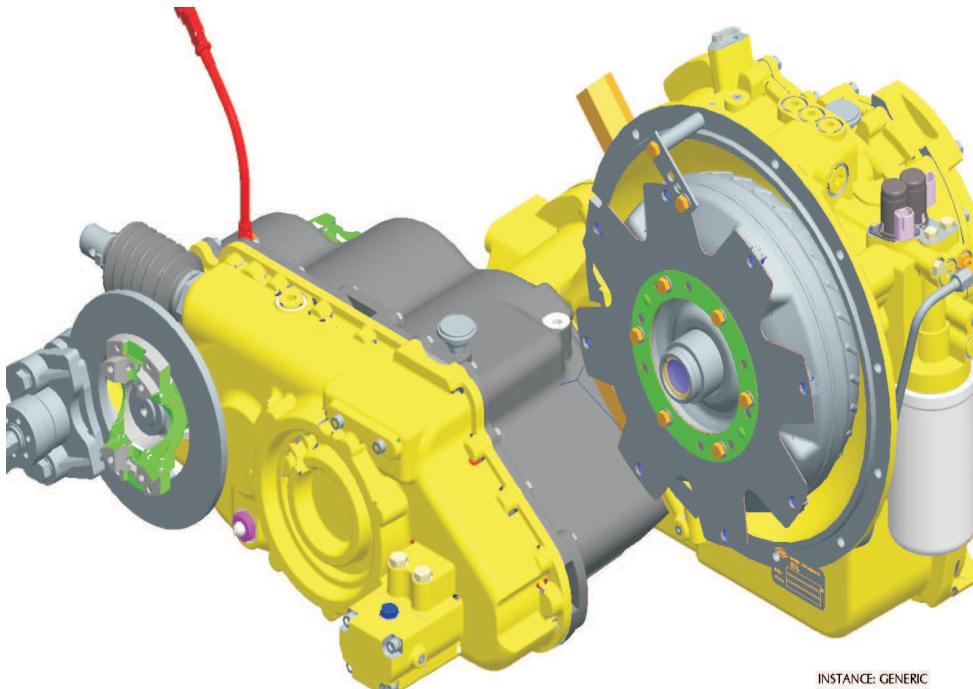


Figura 1: Rappresentazione tridimensionale della trasmissione realizzata dalla ditta Dana.

fornire un’idea sul contesto nel quale si inquadra la trattazione. Il secondo capitolo contiene la modellizzazione completa e ridotta del sistema dinamico con le rispettive descrizioni nello spazio degli stati; vengono inoltre calcolate le pulsazioni di risonanza del sistema ridotto. Nel successivo capitolo si effettua lo studio teorico e la simulazione mediante Matlab-Simulink degli urti che avvengono all’interno di un sistema a ruote dentate. Il quarto capitolo ha come oggetto di studio i dati sperimentali forniti per ottenere maggiori informazioni sul sistema. Nel quinto vengono effettuate le simulazioni, mediante Matlab-Simulink degli effetti dinamici causati dai giochi; tramite il confronto con i dati sperimentali si effettua quindi la validazione del modello. Il sesto capitolo presenta lo studio teorico dei possibili cicli limite che si innescano nel sistema se eccitato da un segnale sinusoidale; tale studio viene effettuato utilizzando il metodo della funzione descrittiva. Nell’ultimo capitolo vengono riportate le conclusioni. Infine in Appendice A si presentano brevemente i principi su cui si basa la tecnica modellistica Power Oriented Graphs (POG) utilizzata; mentre in Appendice B vengono riportati i listati Matlab utilizzati per analizzare i dati sperimentali e simulare il comportamento dinamico del sistema.

# Capitolo 1

## Descrizione del sistema

### 1.1 Sistema di trasmissione

La foto della trasmissione presa in esame è riportata Fig. 1.1 mentre il suo schema semplificato è mostrato in Fig. 1.2; il sistema è composto da una serie di ruote dentate e pompe che trasformano la potenza meccanica fornita dal motore in potenza idraulica resa disponibile al braccio meccanico.

Il numero di variabili da analizzare è elevato per questo motivo nella Tab. 1.1 vengono riportati tutti i parametri che entrano in gioco con il loro significato fisico, in modo da rendere più chiara possibile la comprensione del modello che sarà oggetto di studio nel Capitolo 2. Nei paragrafi successivi vengono anche descritti brevemente i componenti principali della trasmissione presa in esame per fornire un'idea chiara sul contesto nel quale si inquadra la tesi.

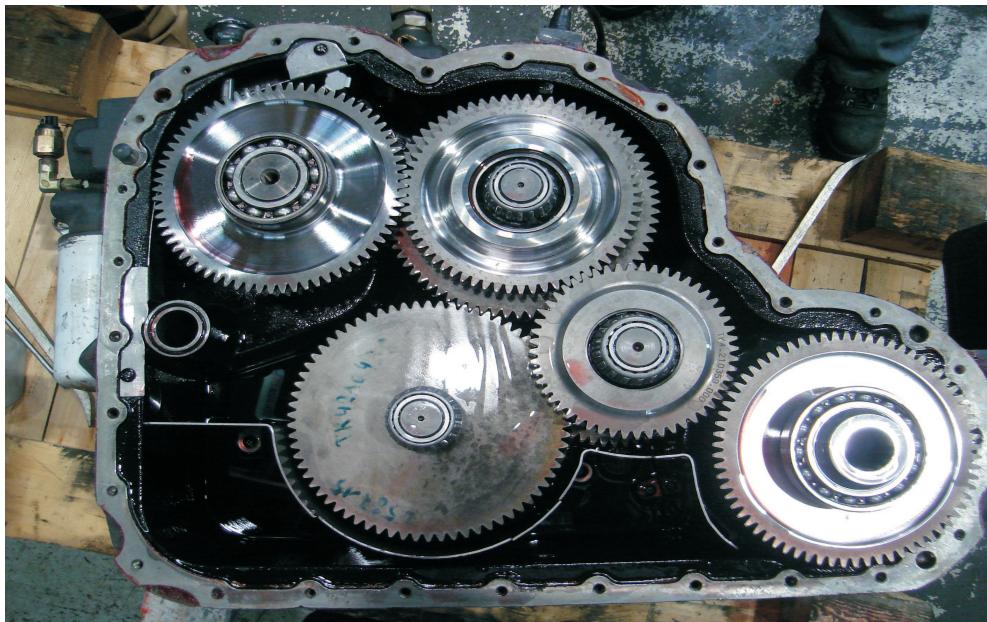


Figura 1.1: Foto della trasmissione realizzata dalla ditta Dana.

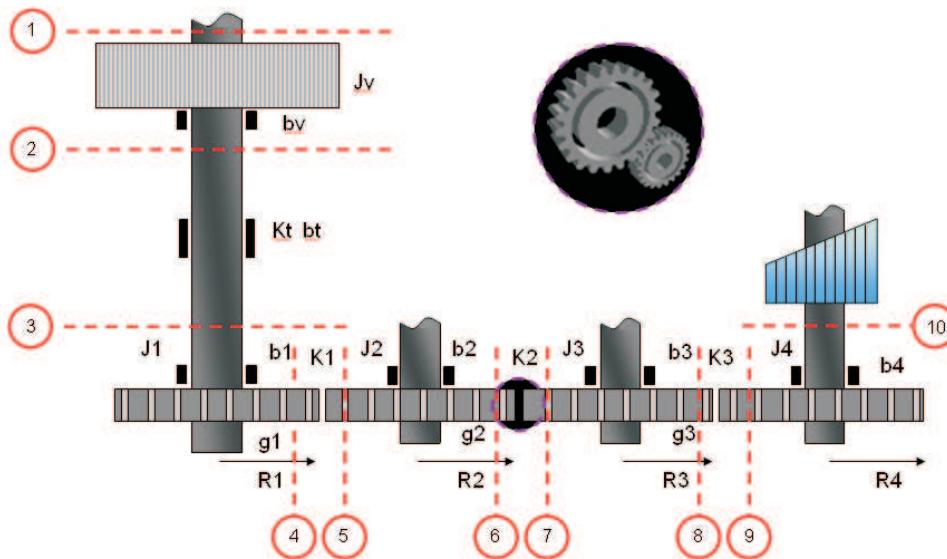


Figura 1.2: Schema semplificato del sistema di trasmissione in esame.

$J_v$	Momento di inerzia del volano
$b_v$	Attrito lineare sul volano
$K_t$	Rigidità dell'albero di trasmissione
$b_t$	Attrito interno all'albero di trasmissione
$J_1$	Momento di inerzia della prima ruota dentata
$b_1$	Attrito lineare della prima ruota dentata
$R_1$	Raggio della prima ruota dentata
$K_1$	Rigidità dei denti tra la prima e la seconda ruota
$g_1$	Gioco tra la prima e la seconda ruota dentata
$b_{12}$	Attrito interno tra la prima e la seconda ruota
$J_2$	Momento di inerzia della seconda ruota dentata
$b_2$	Attrito lineare della seconda ruota dentata
$R_2$	Raggio della seconda ruota dentata
$K_2$	Rigidità dei denti tra la seconda e la terza ruota
$g_2$	Gioco tra la seconda e la terza ruota dentata
$b_{23}$	Attrito interno tra la seconda e la terza ruota
$J_3$	Momento di inerzia della terza ruota dentata
$b_3$	Attrito lineare della terza ruota dentata
$R_3$	Raggio della terza ruota dentata
$K_3$	Rigidità dei denti tra la terza e la quarta ruota
$g_3$	Gioco tra la terza e la quarta ruota dentata
$b_{34}$	Attrito interno tra la terza e la quarta ruota
$J_4$	Momento di inerzia della quarta ruota dentata
$b_4$	Attrito lineare della quarta ruota dentata
$R_4$	Raggio della quarta ruota dentata

Tabella 1.1: Le variabili del sistema considerato.

## 1.2 Volano e Motore

La coppia motrice sviluppata da un motore a scoppio, sia a due che a quattro tempi, è ben lungi dall'essere costante nell'ambito di un singolo ciclo di funzionamento. Facendo riferimento a un monocilindrico a quattro tempi è noto che la produzione di coppia avviene soltanto in una delle quattro fasi di funzionamento del motore, cioè nella fase di espansione dei gas, mentre le altre tre fasi (aspirazione, compressione, scarico) non solo non producono coppia ma anzi ne assorbono essendo delle fasi passive. Queste ultime vengono superate perché l'inerzia delle masse del motore ormai in rotazione è tale da far superare al motore stesso le fasi passive a spese dell'energia accumulata nell'unica fase attiva del ciclo, quella di espansione. Il funzionamento di tale motore è pertanto molto ruvido in quanto a una fase di accelerazione delle masse in rotazione segue una fase di rallentamento dovuta all'energia che il motore deve sprecare per espellere i gas combusti dal cilindro, per aspirare miscela fresca e per comprimerla. In altri termini, occorrono tre fasi di preparazione, passive, per ottenere un'unica fase di erogazione di coppia.

Se si vuole diminuire la ruvidità del motore o, per usare un linguaggio più tecnico, il suo grado di irregolarità (intendendo con questo termine il rapporto fra il valore massimo della coppia motrice e quello medio), non resta che aumentare l'inerzia delle masse in rotazione calettando per esempio sull'albero motore un disco d'acciaio col compito specifico di immagazzinare energia durante le fasi attive e restituirla durante le fasi passive. Il volano infatti accumula energia meccanica  $E = \frac{1}{2}I\omega^2$  durante le fasi utili per restituirla durante quelle passive.

Il grado di irregolarità del motore, cioè il rapporto fra coppia massima e coppia media nell'ambito di un ciclo di funzionamento, sarebbe uguale a 1 in un ipotetico motore in cui la produzione di coppia avvenisse con assoluta costanza e regolarità; assume il valore di 1,65 in un motore a sei cilindri; circa 2 in un quattro cilindri; 4,5 in un bicilindrico e ben 10,3 in un monocilindrico a quattro tempi, il che significa che nel momento dell'espansione dei gas si sviluppa una coppia che è ben 10 volte maggiore della coppia media. Da queste brevi considerazioni appare evidente che i motori che più hanno bisogno di notevoli masse volaniche sono quelli che hanno regimi di rotazione non troppo elevati e basso numero di cilindri.

La dipendenza dal numero di cilindri è intuitiva in quanto è evidente che in un motore a più cilindri, disponendo opportunamente le manovelle dell'albero motore e organizzando di conseguenza gli scoppi nei singoli cilindri, si riesce a ottenere un diagramma di coppia molto più uniforme, senza i picchi e gli avvallamenti così vistosi che si verificano in un monocilindrico: questo in quanto se un cilindro è in una fase passiva ve ne sarà un altro che è in una fase attiva e i due effetti, entro certi limiti, si compenseranno.

### 1.3 Albero di trasmissione

L’albero trasmette un moto rotatorio ed è sottoposto ad uno sforzo di torsione, a causa delle masse collegate è anche sottoposto a uno sforzo di flessione che richiede l’ausilio di opportuni supporti. Si pone quindi il problema dell’attrito tra la parte rotante (albero) e quella stazionaria (supporto).

### 1.4 Le ruote dentate

Le ruote dentate, siano esse piane o coniche, con qualunque tipo di dentatura siano state costruite, rappresentano, insieme alle corrispondenti ruote di frizione, la soluzione al problema della trasmissione del moto fra una coppia di assi, rispettivamente paralleli o concorrenti in un punto, e con un rapporto di trasmissione costante. Ciò spiega la loro estrema diffusione ed il largo impiego nei più svariati settori della meccanica generale.

#### 1.4.1 Ruote dentate, ingranaggi e rapporto di trasmissione

Quando sono in gioco potenze notevoli è conveniente che la trasmissione del moto sia affidata non all’aderenza come nelle ruote di frizione, ma all’azione mutua che si scambiano opportune superfici coniugate ricavate sulla periferia di un disco, superfici che costituiscono la sagoma dei denti di una ruota dentata.

Una ruota dentata, studiata per trasmettere momento torcente ad un’altra ruota o elemento dentato, forma con quest’ultima un ingranaggio (vedi Fig. 1.3).

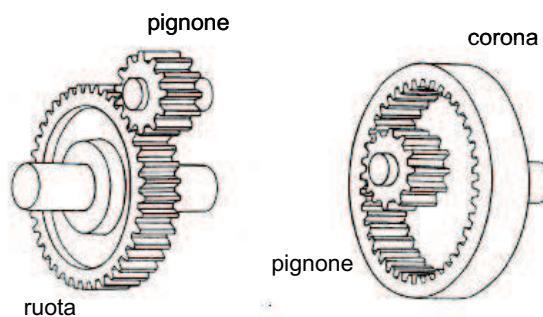


Figura 1.3: Rappresentazione dell’ingranaggio esterno (a destra) e dell’ingranaggio interno (a sinistra).

La ruota più piccola è comunemente chiamata pignone, mentre quella grande è chiamata corona. Ingranaggi di diversa dimensione sono spesso usati in coppia per aumentare il momento torcente riducendo nel contempo la velocità angolare, o viceversa aumentare la velocità diminuendo il momento torcente; ipotizzando di avere un rendimento unitario (non ci sono perdite) vale infatti

l'equazione di conservazione dell'energia e di conseguenza della potenza:

$$P = \tau_1 \omega_1 = \tau_2 \omega_2 \quad (1.1)$$

Dall'equazione (1.1), il rapporto di trasmissione risulta essere:

$$R_T = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (1.2)$$

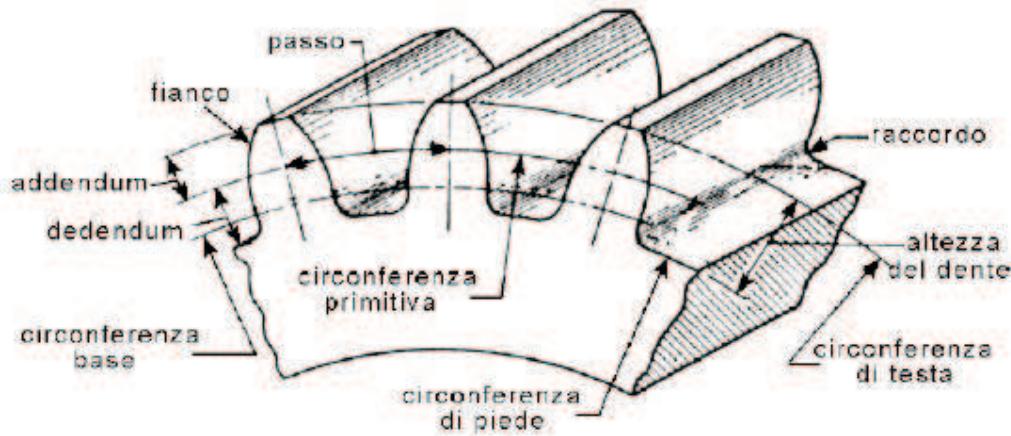


Figura 1.4: Ingranaggio a denti diritti.

Il tipo più comune di ingranaggio è quello a denti diritti (vedi Fig. 1.4): la ruota dentata è piatta, l'asse dei denti si proietta radialmente dal centro di rotazione dell'ingranaggio e le creste dei denti decorrono trasversalmente al piano di rotazione e parallelamente tra loro.

I limiti estremi del dente sono fissati da due circonference dette circonferenza di testa e circonferenza di piede. Solitamente il profilo del dente non taglia la circonferenza di base a spigolo vivo, ma viene opportunamente raccordato alla circonferenza di base; la circonferenza di piede deve avere raggio non superiore al raggio della circonferenza di base, altrimenti in quella zona il profilo del dente non risulta più un evolvente di cerchio. La differenza fra i raggi della circonferenza di testa e della primitiva prende il nome di addendum, la differenza fra la circonferenza primitiva e quella di base prende il nome di dedendum; la loro somma misura l'altezza del dente. La superficie compresa tra la circonferenza primitiva e la circonferenza di testa è detta costa mentre quella compresa tra la circonferenza primitiva e la circonferenza di piede è detta fianco.

Per potere correttamente ingranarsi, le ruote devono avere lo stesso passo ( $p_1 = p_2$ ), cioè uguale lunghezza dell'arco fra due profili omologhi. Il passo è definito in base al raggio  $R$  della ruota dentata (raggio della circonferenza primitiva) e al numero di denti  $n$  in base alla relazione:

$$p = \frac{2\pi R}{n}$$

Conseguentemente il rapporto di trasmissione definito in funzione dei raggi  $R_1$  e  $R_2$  può essere espresso in funzione del numero di denti  $n_1$  e  $n_2$  dall'espressione sopra infatti si ottiene che:

$$2\pi R = np$$

e quindi:

$$R_T = \frac{R_2}{R_1} = \frac{p_2 n_2}{2\pi} \frac{2\pi}{p_1 n_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.3)$$

### 1.4.2 Ruote dentate piane ad evolvente

La quasi totalità delle ruote dentate cilindriche ha profili ad evolvente di cerchio. Ogni profilo viene generato come luogo delle successioni di un punto  $P$  appartenente ad una retta  $g$  (detta linea generatrice, o di pressione o d'azione) che viene fatta rotolare su una circonferenza (detta circonferenza di base) concentrica a quella primitiva; non sarà quindi possibile avere tratti di evolvente interni alla circonferenza di base. Per come sono stati costruiti i profili sono sempre perpendicolari ai loro raggi di curvatura che coincidono con i segmenti giacenti sulla retta d'azione, compresi tra il punto di contatto  $P$  e il punti di tangenza  $H$  e  $K$  della retta generatrice con la circonferenza di base. Queste due evolventi hanno un punto in comune in tutte le loro posizioni, perchè sono descritte dallo stesso punto  $P$  ed hanno la retta  $g$  in comune, costituiscono quindi due curve coniugate il cui punto di contatto si sposta sulla retta d'azione. Ovviamente per comporre un dente completo sarà necessario comporre un altro profilo simmetrico al primo. L'inclinazione della retta d'azione  $g$  rispetto

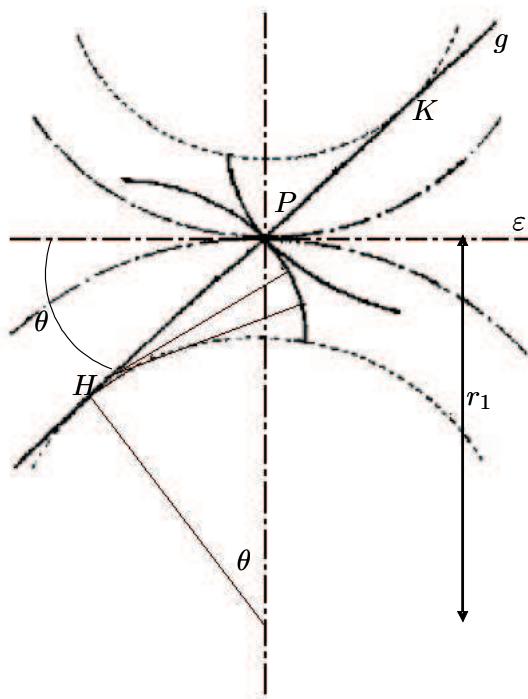


Figura 1.5: Rappresentazione del metodo grafico per il disegno dei profili a evolvente.

alla tangente alle primitive nel punto di contatto delle stesse  $\varepsilon$  è pari all'angolo di pressione o di azione  $\theta$ . I raggi delle circonferenze di base, tangenti alla retta d'azione, vengono determinati a partire da tale angolo come  $r_1 \cos \theta$  e  $r_2 \cos \theta$  dove  $r_1$  e  $r_2$  sono i raggi delle circonferenze primitive.

Una proprietà dei profili ad evolvente, che nella pratica ha importanza notevole, è costituita dal fatto che, se la distanza fra gli assi di due ruote compagne è lievemente maggiore della somma dei raggi delle due primitive (per es. per una imperfezione di montaggio o per usura dei cuscinetti), i due profili seguitano ad essere coniugati. Infatti, la normale ai profili nei punti di contatto rimarrà sempre diretta secondo la tangente comune alle due circonferenze di base, le quali non si modificano, per il fatto che gli assi delle ruote cambiano la loro posizione relativa, trattandosi di elementi geometrici direttamente coniugati alle sagome dei denti. Ciò significa che i profili rimangono coniugati.

#### 1.4.3 Ingranamento e forze trasmesse

Il contatto fra i denti avviene esclusivamente sulla retta di azione ma si verifica prima che questi attraversino la retta dei centri; possiamo quindi definire i punti  $I_A$  ed  $I_B$  in cui avverrà il primo contatto, in fase di accesso, ( $I_A$ ), fra il fianco di un dente della ruota conduttrice e l'estremità della costa di un dente della ruota condotta, e l'ultimo contatto, in fase di recesso, ( $I_B$ ), fra l'estremità della costa del dente della ruota conduttrice ed un punto del fianco del dente della ruota condotta. Come si evince anche dalla Fig. 1.7 tutti i punti di contatto giacciono sulla retta  $g$ . L'arco misurato sulle primitive durante il quale rimangono a contatto i due profili coniugati è chiamato arco d'azione. Le forze scambiate tra le due ruote dentate sono dirette lungo la retta d'azione; tali forze  $F$  possono essere scomposte nelle loro componenti tangenziali  $F_t$  e radiali  $F_r$ , ovviamente solo le prime sono quelle utili per la trasmissione del momento torcente mentre quelle radiali vanno a scaricarsi sui supporti delle ruote (come si vede in Fig. 1.7)

#### 1.4.4 Gioco e Risonanza

Questi ingranaggi possono accoppiare solamente assi paralleli e soffrono del problema del gioco. Cambiando il verso di rotazione la faccia opposta del dente deve arrivare a spingere contro il corrispondente dente dell'altra ruota, si ha quindi un periodo in cui le ruote si muovono senza trasmettere coppia. Per tenerne conto durante le simulazioni è stata introdotta nello schema una non linearità a soglia con andamento mostrato in Fig. 1.8. Va però notato che in un ingranaggio il gioco è necessario per impedire l'inceppamento dei denti in condizioni di funzionamento.

I denti si comportano come molle che collegano le masse del pignone e della ruota; pertanto ogni ingranaggio ha una frequenza propria di vibrazione e può

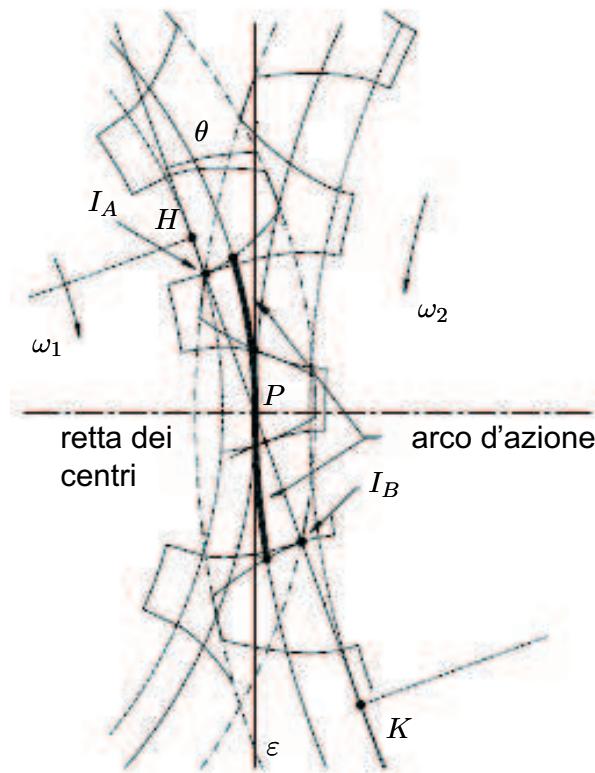


Figura 1.6: Rappresentazione schematica dell'ingranamento dei denti a evolvente.

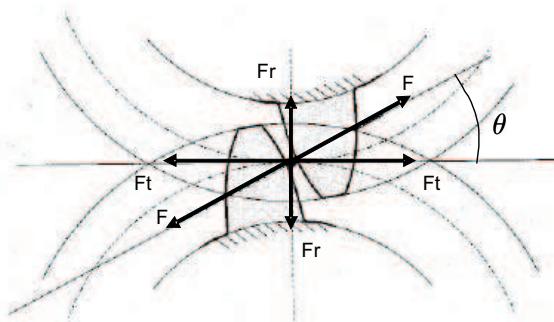


Figura 1.7: Forze presenti nell'interazione fra i denti dell'ingranaggio.

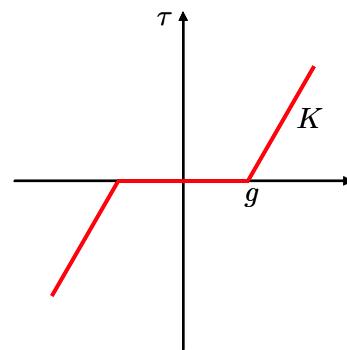


Figura 1.8: Non linearità di tipo soglia.

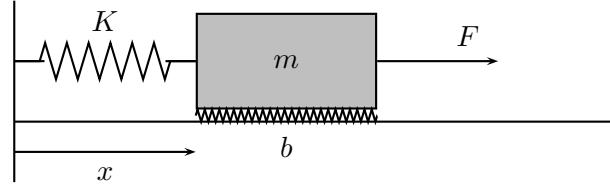


Figura 1.9: Sistema massa-molla-smorzatore.

$x(t)$	:	posizione	$m$	:	massa
$\dot{x}(t)$	:	velocità	$K$	:	rigidità della molla
$\ddot{x}(t)$	:	accelerazione	$b$	:	Coefficiente di attrito lineare
$F(t)$	:	forza applicata			

Tabella 1.2: Le variabili del sistema massa-molla-smorzatore.

incorrere in una condizione di risonanza a seconda della frequenza di ingranamento.

Viene quindi di seguito studiato, con la determinazione della sua frequenza di risonanza, un generico sistema massa-molla-smorzatore. Il sistema è riportato in Fig. 1.9 mentre le sue variabili, con il loro significato fisico, sono mostrate in Tab. 1.2. Tale sistema può essere descritto mediante un'equazione differenziale; che può essere trasformata utilizzando le trasformate di Laplace ( $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ )

$$\frac{d}{dt}[m\dot{x}] = F - b\dot{x} - Kx \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = F$$

$$m s^2 X(s) + b s X(s) + K X(s) = F(s) \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{F(s)}{m s^2 + b s + K}$$

La coppia di poli complessi coniugati presenti nella funzione di trasferimento  $G(s)$  determinerà la pulsazione di risonanza.

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{K}{m}} = \frac{A}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Essendo  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$  e  $\delta = \frac{b}{2\sqrt{\frac{K}{m}}}$  si determina la pulsazione di risonanza del sistema massa-molla-smorzatore che risulta essere:  $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$ .



## Capitolo 2

# Modello di un sistema di trasmissione

### 2.1 Schema POG

Un buon modello deve fornire un adeguato compromesso fra aderenza alla realtà e semplicità descrittiva, in quanto la prima garantisce una più stretta concordanza fra il comportamento del sistema e quello del modello, mentre la seconda facilita le procedure di analisi e di sintesi.

Per determinare un modello matematico che descriva il comportamento dinamico del sistema di trasmissione bisogna suddividere quest'ultimo in sottosistemi elementari il cui modello matematico è facilmente identificabile. Il modello complessivo sarà dedotto componendo i modelli dei sottosistemi elementari e applicando leggi base della fisica. Sono quindi riportare le principali formule caratterizzanti gli ambiti energetici meccanico traslazionale e meccanico rotazionale nelle Tab. 2.1 e Tab. 2.2 ricordando che per passare da un ambito all'altro basta utilizzare la relazione che sussiste tra la coppia e la forza:  $\tau = FR$ , dove  $R$  è il raggio della traiettoria compiuta dal corpo rigido in rotazione.

La tecnica di modellizzazione utilizzata è quella dei Power-Oriented-Graph

	Simboli	Eq. Lineare	Eq.Differenziale
$D_1$	$M$ massa		
$q_1$	$P$ quantità di moto	$P = M\dot{x}$	$\frac{dP}{dt} = F = M\ddot{x}$
$v_1$	$\dot{x}$ velocità		
$D_2$	$K$ rigidità		
$q_2$	$x$ spostamento	$F = Kx$	$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$
$v_2$	$F$ forza		
$R$	$b$ dissipatore	$F = b\dot{x}$	

Tabella 2.1: Tabella con le principali grandezze fisiche e relazioni nell'ambito meccanico traslazionale.

	Simboli	Eq. Lineare	Eq.Differenziale
$D_1$	$J$ inerzia		
$q_1$	$P$ momento ang.	$P = J\omega$	$\frac{dP}{dt} = \tau$
$v_1$	$\omega$ velocità ang.		
$D_2$	$K$ rigidità tors.		
$q_2$	$\theta$ spostamento ang.	$\tau = K\theta$	$\frac{d\theta}{dt} = \omega$
$v_2$	$\tau$ coppia		
$R$	$b$ dissipatore	$\tau = b\omega$	

Tabella 2.2: Tabella con le principali grandezze fisiche e relazioni nell'ambito meccanico rotazionale.

la cui caratteristica principale è la corrispondenza diretta fra le variabili del sistema e i flussi di potenza: il prodotto delle due variabili coinvolte, in ogni linea tratteggiata dello schema mostrato in Fig. 2.1, infatti ha il significato fisico della potenza che fluisce attraverso la sezione. È quindi da notare la corrispondenza biunivoca fra il sistema fisico mostrato in Fig. 1.2 e il modello POG riportato in Fig. 2.1. Si rimanda alla lettura dell'Appendice A per un ulteriore approfondimento sulla metodologia di modellizzazione .

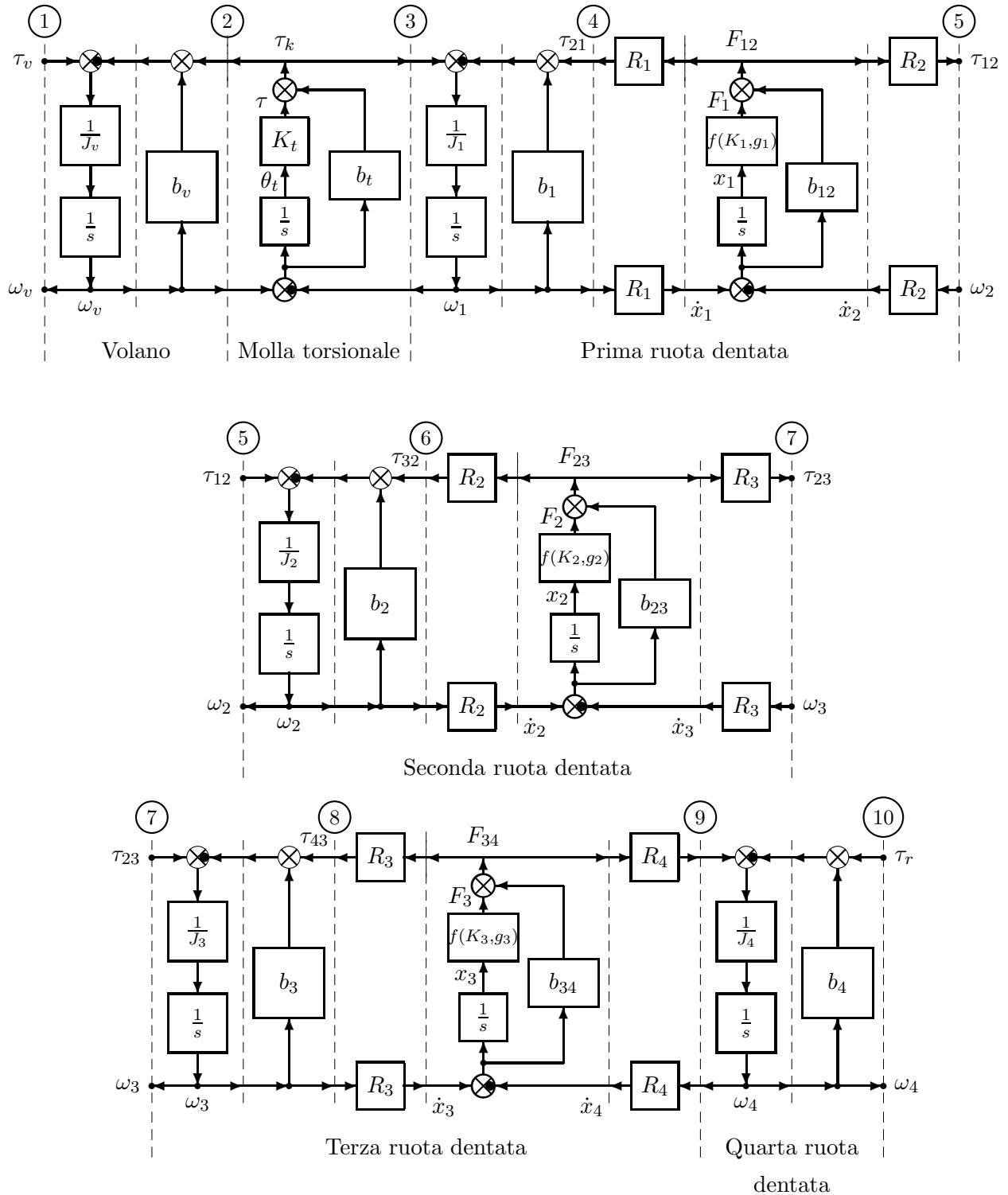


Figura 2.1: Schema a blocchi POG del sistema fisico considerato.

Gli attriti presenti nell'interazioni fra le ruote dentate che ingranano ( $b_{12}$ ,  $b_{23}$ ,  $b_{34}$ ) possono essere modellati in due modi differenti: il primo consiste nel considerare l'attrito fra i denti indipendentemente dalla loro posizione (vedi Fig. 2.2), il secondo è quello di considerarlo solo quando i denti sono in contatto (vedi Fig. 2.3).

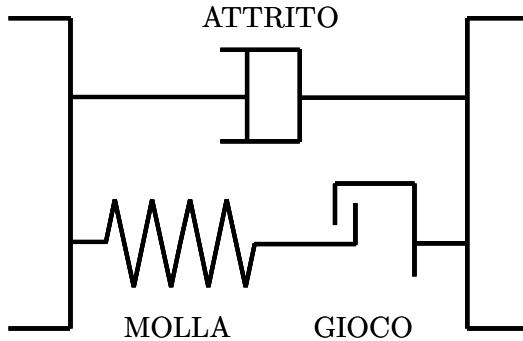
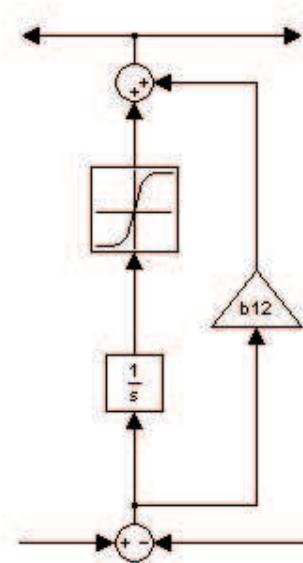


Figura 2.2: Modello Dinamico



Modello Simulink.

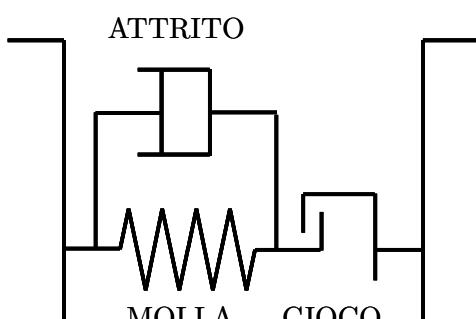
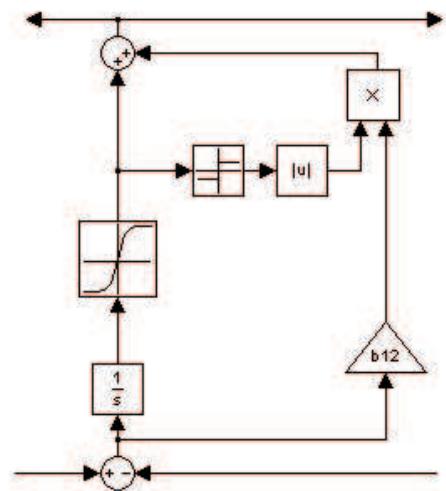


Figura 2.3: Modello Dinamico



Modello Simulink.

Il primo modello è stato utilizzato solo nella fase di studio teorico come si vede anche dallo schema POG riportato in Fig.. 2.1 mentre per le successive simulazioni è stato utilizzato lo schema di Fig. 2.3 in quanto più vicino al fenomeno fisico visto che l'attrito entra in gioco solo quando i denti risultano a contatto mentre risulta essere nullo all'interno del gioco.

## 2.2 Rappresentazione nello S.d.S

Per i sistemi non lineari non è più possibile descrivere il sistema tramite la funzione di trasferimento, si passa quindi a una descrizione nello spazio degli stati:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

Dove  $\mathbf{x}(t)$  è il vettore di stato,  $\mathbf{y}(t)$  è il vettore delle uscite e  $\mathbf{u}(t)$  il vettore degli ingressi. Dalla definizione di stato (grandezza che sintetizza la storia passata del sistema utile al fine di calcolare l'uscita corrente) sembra ragionevole scegliere, come variabili di stato, quelle grandezze che caratterizzano l'energia accumulate nel sistema. Il sistema risulta essere descritto da tante equazioni differenziali quante sono le variabili dinamiche interne considerate e da tante equazioni quante sono le variabili di uscita.

Se le variabili di stato  $\mathbf{x} = [\omega_v \ \tau \ \omega_1 \ F_1 \ \omega_2 \ F_2 \ \omega_3 \ F_3 \ \omega_4]^T$  (che in questo caso sono le variabili di uscita degli elementi dinamici) coincidono con le variabili di potenza (variabili il cui prodotto è una potenza), le variabili di ingresso e uscita sono  $\mathbf{u} = [\tau_v \ \tau_r]^T$ ,  $\mathbf{y} = [\vartheta_t \ x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  la descrizione del sistema nello spazio degli stati è la seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (2.1)$$

Dove:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} J_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -b_t - b_v - 1 & b_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_t & 1 & a_{33} & -R_1 b_{12} R_1 R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{12} R_1 R_2 & R_2 & a_{55} & -R_2 b_{23} R_2 R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & -R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{23} R_2 R_3 & R_3 & a_{77} & -R_3 & b_{34} R_4 R_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 & -R_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{34} R_4 R_3 & R_4 & -b_{34} R_4^2 - b_4 \end{bmatrix}$$

$$a_{33} = -b_1 - b_{12} R_1^2 - b_t \quad a_{55} = -b_{12} R_2^2 - b_2 - b_{23} R_2^2 \quad a_{77} = -b_{23} R_3^2 - b_3 - b_{34} R_3^2$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{K_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si noti come la matrice  $\mathbf{C}$  sia definita solo quando i denti delle ruote si trovano nella regione lineare; nel caso in cui essi si trovino all'interno del gioco infatti le forze scambiate risultano nulle e pertanto non è più possibile risalire da queste agli schiacciamenti.

Portando nella matrice  $L$ , tutte le rigidità  $K$  delle ruote dentate ad infinito, dall'equazione  $\mathbf{Ax} = 0$ , si ricavano i legami statici delle equazioni differenziali, i quali non sono altro che i rapporti di trasmissione delle ruote.

$$\begin{cases} \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \\ \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3 \\ \omega_3 R_3 = \omega_4 R_4 \end{cases} \quad (2.2)$$

Il sistema fisico, rappresentato dai tre ingranaggi, degenera in uno a dimensione minore, rappresentato da una sola ruota dentata. La riduzione può essere ottenuta usando una matrice di congruenza  $\mathbf{T}$  e applicando la trasformazione:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Tz} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_1}{R_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_1}{R_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_1}{R_4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \omega_v \\ \tau_k \\ \omega_1 \end{bmatrix}$$

Tale trasformazione, delle variabili di stato, altera le matrici del sistema. Applicando infatti la trasformazione  $\mathbf{T}$  alla prima equazione matriciale di (2.1), si ottiene il sistema trasformato (2.4).

$$\begin{cases} \mathbf{T}^T \mathbf{L} \mathbf{T} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{u} \end{cases} \quad (2.4)$$

Posto  $\mathbf{L}_{eq} = \mathbf{T}^T \mathbf{L} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}_{eq} = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{B}_{eq} = \mathbf{T}^T \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}_{eq} = \mathbf{C} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{D}_{eq} = \mathbf{D} \mathbf{T}$  si ottiene il sistema (2.5) formalmente equivalente a quello iniziale (2.1).

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{eq} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{eq} \mathbf{z} + \mathbf{B}_{eq} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_{eq} \mathbf{z} + \mathbf{D}_{eq} \mathbf{u} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{L}_{eq} = \begin{bmatrix} J_v & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_t} & 0 \\ 0 & 0 & J_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{eq} = \begin{bmatrix} -b_t - b_v & -1 & b_t \\ 1 & 0 & -1 \\ b_t & 1 & -b_t - b_0 \end{bmatrix}$$

$$J_0 = J_1 + R_1^2 \left( \frac{J_2}{R_2^2} + \frac{J_3}{R_3^2} + \frac{J_4}{R_4^2} \right) \quad b_0 = -b_1 + R_1^2 \left( \frac{b_2}{R_2^2} - \frac{b_3}{R_3^2} - \frac{b_4}{R_4^2} \right)$$

$$\mathbf{B}_{eq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_1}{R_4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{eq} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{K_t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avendo ridotto il sistema portando le rigidità ad infinito, gli schiacciamenti  $x_1, x_2, x_3$  vanno a zero ed è quindi corretto che nella matrice  $C_{eq}$  compaiano tre righe tutte nulle.

Volendo ora ridurre il sistema iniziale ad uno caratterizzato da due sole ruote, per poter studiare gli effetti del gioco, si trascurano le rigidità della seconda e della terza ruota. Considerando la rigidità  $K_1$  della prima ruota, il legame statico  $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$  non risulta più valido; rimangono però i legami:

$$\begin{cases} \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3 \\ \omega_3 R_3 = \omega_4 R_4 \end{cases}$$

Risulta quindi:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_2}{R_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_2}{R_4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} \omega_v \\ \tau_k \\ \omega_1 \\ F_{12} \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

Posto  $\mathbf{L}_{eq1} = \mathbf{T}_1^T \mathbf{L} \mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{A}_{eq1} = \mathbf{T}_1^T \mathbf{A} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{B}_{eq1} = \mathbf{T}_1^T \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}_{eq1} = \mathbf{C} \mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{D}_{eq1} = \mathbf{D} \mathbf{T}_1$  si ottiene il sistema (2.6) formalmente equivalente a quello iniziale (2.1).

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{eq1} \dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{A}_{eq1} \mathbf{z}_1 + \mathbf{B}_{eq1} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_{eq1} \mathbf{z}_1 + \mathbf{D}_{eq1} \mathbf{u} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{L}_{eq1} = \begin{bmatrix} J_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_e \end{bmatrix}$$

$$J_e = J_2 + R_2^2 \left( \frac{J_3}{R_3^2} + \frac{J_4}{R_4^2} \right)$$

$$\mathbf{A}_{eq1} = \begin{bmatrix} -b_t - b_v & -1 & b_t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ b_t & 1 & -b_1 - b_t - b_{12}R_1^2 & -R_1 & b_{12}R_1R_2 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & -R_2 \\ 0 & 0 & b_{12}R_1R_2 & R_2 & -b_2 + R_2^2 \left( -b_{12} - \frac{b_3}{R_3^2} - \frac{b_4}{R_4^2} \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{eq1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{R_4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{eq1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{K_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avendo la descrizione nello spazio degli stati dei vari sistemi è ora possibile effettuare

### 2.3 Contorno delle radici e pulsazioni di risonanza

I denti si comportano come molle che collegano le masse del pignone e della ruota; pertanto ogni ingranaggio ha una frequenza propria di vibrazione e può incorrere in una condizione di risonanza a seconda della frequenza di ingranamento.

Volendo capire come gli attriti influenzino tale pulsazione, si studia il sistema, ridotto ad una sola ruota dentata, trovandone i poli.

Essendo i poli della funzione di trasferimento del sistema dinamico considerato anche gli autovalori della matrice  $\mathbf{L}_{eq}^{-1} \mathbf{A}_{eq}$ , utilizzando l'equazione caratteristica si determina la loro posizione sul piano complesso:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{L}_{eq}^{-1} \mathbf{A}_{eq}) = 0 \quad (2.7)$$

Dall'equazione (2.7) risulta:

$$s^3 + s^2 \left( \frac{b_t + b_v}{J_v} + \frac{b_t + b_0}{J_0} \right) + s \left( \frac{b_t b_v + b_0 b_v}{J_v J_0} + \frac{K_t}{J_0} + \frac{K_t}{J_v} \right) + \frac{b_v K_t + b_0 K_t}{J_v J_0} = 0 \quad (2.8)$$

Trascurando inizialmente tutti gli attriti, la relazione (2.8) diviene:

$$s^3 + s\left(\frac{K_t}{J_0} + \frac{K_t}{J_v}\right) = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$s = 0 \quad s = \pm j\sqrt{\frac{K_t}{J_0} + \frac{K_t}{J_v}} = \pm j\omega_0$$

dove la pulsazione  $\omega_0 = \sqrt{K_t(\frac{1}{J_0} + \frac{1}{J_v})}$  dei poli complessi coniugati è la pulsazione di risonanza del sistema. Disegnando il contorno delle radici, si vede come i poli si spostano sul piano complesso al variare di un parametro che entra in modo lineare nell'equazione caratteristica.

Introducendo l'attrito  $b_t$  dell'albero di trasmissione l'equazione (2.8) assume la seguente forma:

$$s^3 + s^2\left(\frac{b_t}{J_v} + \frac{b_t}{J_0}\right) + s\left(\frac{K_t}{J_0} + \frac{K_t}{J_v}\right) = 0$$

raccogliendo tutti i termini che sono moltiplicati per  $b_t$  e dividendo per tutti gli altri ci si riconduce allo studio del luogo delle radici in quanto l'equazione caratteristica assume le forme  $1 + kG(s) = 0$ :

$$1 + b_t s \frac{\frac{1}{J_v} + \frac{1}{J_0}}{s^2 + K_t(\frac{1}{J_0} + \frac{1}{J_v})} = 0$$

Avendo due poli e uno zero, i due rami del luogo si spostano lungo un tratto di circonferenza, come emerge dal grafico mostrato in Fig. 2.4, che ha per centro lo zero e raggio  $R = \sqrt{d_1 d_2} = \omega_0$  dove  $d_1$  e  $d_2$  sono le distanze dallo zero dei due poli. Per un elevato attrito dell'albero di trasmissione i poli complessi coniugati si spostano sull'asse reale andando uno nello zero ed uno a infinito. Nella realtà l'attrito  $b_t$  non è mai elevato per cui i poli si sposteranno di poco mantenendo una  $\omega \simeq \omega_0$ .

Considerando ora l'attrito  $b_v$  del volano l'equazione (2.8) diviene:

$$s^3 + s^2\frac{b_v}{J_v} + s\left(\frac{K_t}{J_v} + \frac{K_t}{J_0}\right) + \frac{b_v K_t}{J_v J_0} = 0$$

$$1 + \frac{b_v}{J_v} \frac{s^2 + \frac{K_t}{J_0}}{s[s^2 + K_t(\frac{1}{J_0} + \frac{1}{J_v})]} = 0$$

Essendo la pulsazione  $\omega_1 = \sqrt{\frac{K_t}{J_0}}$  degli zeri complessi coniugati minore della pulsazione di risonanza ( $\sqrt{\frac{K_t}{J_0}} < \sqrt{K_t(\frac{1}{J_0} + \frac{1}{J_v})}$ ) il contorno delle radici risulta essere quello di Fig. 2.5 dove appare chiara l'influenza che questo attrito ha sulla  $\omega_0$ . Per valori alti di  $b_v$ , che comunque rappresentano un assurdo fisico, i poli si sposteranno sugli zeri e la pulsazione di risonanza diventerà  $\omega_1$  comunque prossima ad  $\omega_0$ .

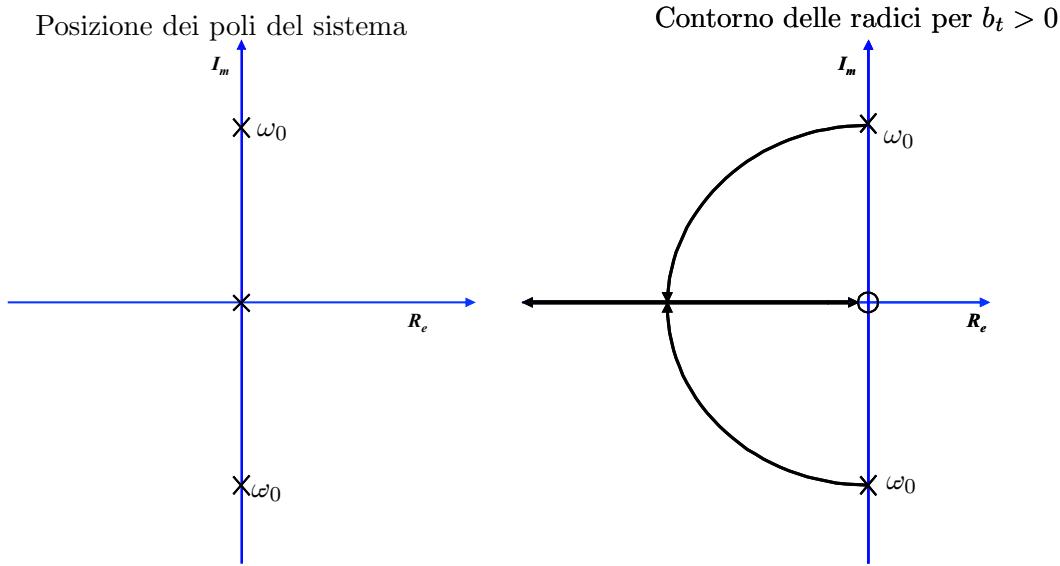


Figura 2.4: Posizione dei poli del sistema ridotto a una sola ruota dentata (a sinistra) e contorno delle radici per  $b_t > 0$  (a destra).

Porgendo ora l'attenzione sull'attrito equivalente del sistema ridotto  $b_0$  l'equazione (2.8) risulta del tutto analoga a quella sopra, infatti:

$$s^3 + s^2 \frac{b_0}{J_0} + s \left( \frac{K_t}{J_0} + \frac{K_t}{J_v} \right) + \frac{b_0 K_t}{J_v J_0} = 0$$

$$1 + \frac{b_0}{J_0} \frac{s^2 + \frac{K_t}{J_v}}{s[s^2 + K_t(\frac{1}{J_0} + \frac{1}{J_v})]} = 0$$

Le considerazioni precedenti sono ancora valide; l'unica differenza è la pulsazione degli zeri complessi coniugati  $\omega_2 = \sqrt{\frac{K_t}{J_v}}$  minore della precedente  $\omega_1 = \sqrt{\frac{K_t}{J_0}}$  in quanto il momento di inerzia del volano  $J_v$  è maggiore di quello del sistema ridotto  $J_0$ .

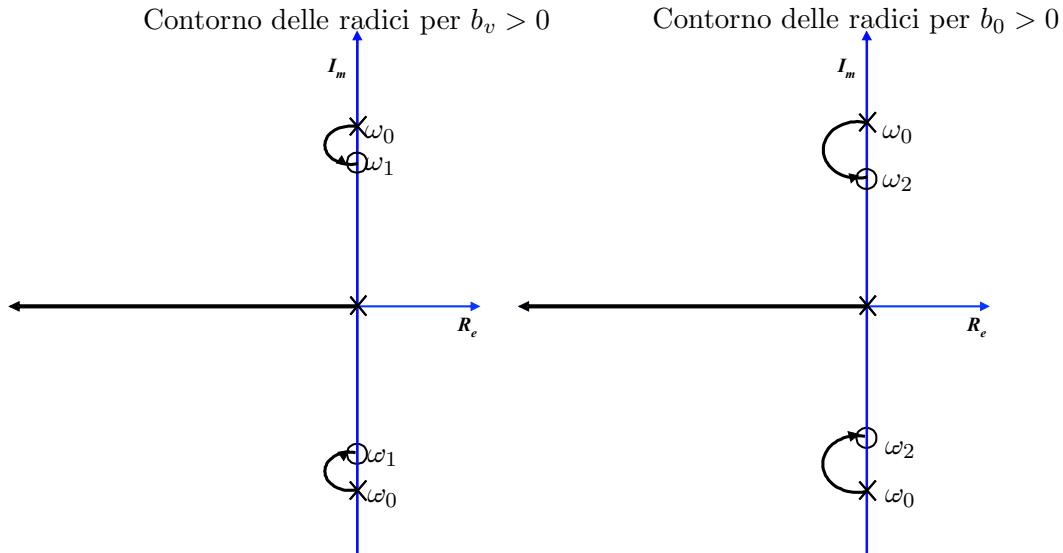


Figura 2.5: Contorno delle radici per  $b_0 > 0$  (a sinistra) Contorno delle radici per  $b_v > 0$  (a destra).

Introducendo ora il gioco fra due ruote dentate e risolvendo l'equazione caratteristica (2.9) ponendo tutti gli attriti a zero si ottiene:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{L}_{eq}^{-1}\mathbf{A}_{eq}) = 0 \quad (2.9)$$

$$s^5 + s^3 \left( \frac{K_1 R_2^2}{J_e} + \frac{K_1 R_1^2}{J_1} + \frac{K_t}{J_v} + \frac{K_t}{J_1} \right) + s \left( \frac{K_1 K_t R_2^2}{J_v J_e} + \frac{K_1 K_t R_2^2}{J_1 J_e} + \frac{K_1 K_t R_1^2}{J_v J_1} \right) = 0$$

risolvendola si trovano le soluzioni

$$s = 0 \quad s = \pm j\omega_1 \quad s = \pm j\omega_2$$

dove le pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  dei poli complessi coniugati sono quelle di risonanza

$$\begin{cases} \alpha &= \sqrt{-4J_1 J_e J_v K_1 K_t (J_e R_1^2 + (J_1 + J_v) R_2^2) + (J_v J_e (K_t + K_1 R_1^2) + J_1 (J_e K_t + J_v K_1 R_2^2))^2} \\ \omega_1 &= \sqrt{-\frac{Kt}{2J_1} - \frac{Kt}{2J_v} - \frac{K_1 R_1^2}{2J_1} - \frac{K_1 R_1^2}{2J_e} + \frac{\alpha}{2J_1 J_e J_v}} \\ \omega_2 &= \sqrt{-\frac{Kt}{2J_1} - \frac{Kt}{2J_v} - \frac{K_1 R_1^2}{2J_1} - \frac{K_1 R_1^2}{2J_e} - \frac{\alpha}{2J_1 J_e J_v}} \end{cases} \quad (2.10)$$

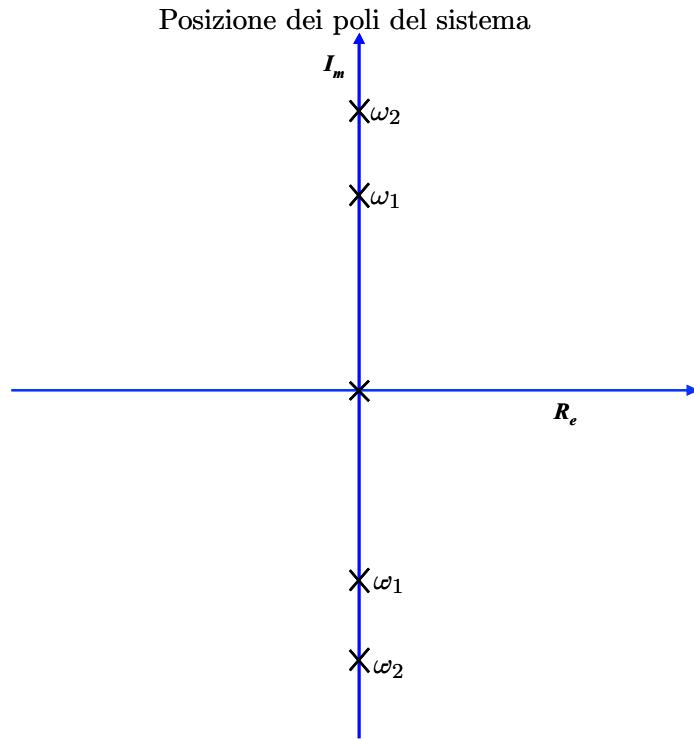


Figura 2.6: Posizione dei poli del sistema ridotto a sole due ruote dentate.

## 2.4 Linearizzazione del modello

Per molte applicazioni che riguardano sistemi non lineari è possibile fare l'ipotesi di un funzionamento per piccoli segnali. Questo accade quando l'ampiezza

dei segnali di controllo determina traiettorie nello spazio degli stati, nell'intorno di un punto di equilibrio (detto anche punto di lavoro) la cui estensione sia "piccola rispetto alle dinamiche non-lineari intrinseche del sistema". Volendo quindi linearizzare i sistemi semplificati, nell'intorno del punto di lavoro, si utilizza il comando `linmod` di Matlab (`[A, B, C D] = linmod ('SYS')`) che ottiene, nello spazio degli stati, il modello lineare del sistema descritto nel diagramma di blocco 'SYS'.

Per apprezzare meglio i risultati ottenuti si espone brevemente la teoria che sta dietro alla linearizzazione di un sistema non lineare tempo continuo. Come già esposto nella sezione 2.2, per i sistemi non lineari non è più possibile descrivere il sistema tramite la funzione di trasferimento, si passa quindi a una descrizione nello spazio degli stati:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

I punti di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  (essendo il sistema non lineare saranno più di uno) per l'ingresso costante  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$  si determinano imponendo  $\dot{\mathbf{x}} = 0$  (se il sistema è in equilibrio le sue variabili interne  $\mathbf{x}(t)$  saranno costanti):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$$

In questo caso si tratta di risolvere rispetto a  $\mathbf{x}_0$  una funzione vettoriale non lineare. Per sistemi non lineari si possono avere tutti i casi possibili: 1) nessun punto di equilibrio; 2) un solo punto di equilibrio; 3) un numero finito di punto di equilibrio; 4) infiniti punti di equilibrio tutti isolati; ecc.

Il valore  $\mathbf{y}_0$  dell'uscita corrispondente ad una condizione di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  si ottiene direttamente dall'equazione di uscita:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$$

Per sistemi non lineari la stabilità non è più una proprietà globale del sistema, ma una proprietà "locale" del singolo punto di equilibrio. Occorre fare un'analisi di stabilità specifica per ciascun punto di equilibrio.

Si consideri ora il seguente sistema non lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di equilibrio del sistema per ingresso costante  $\mathbf{u}_0$ . Sviluppando in serie le funzioni  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  nell'intorno del punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  si ottiene (nel caso bidimensionale questo calcolo si riduce alla determinazione della retta tangente alla non linearità nel punto di lavoro):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}_0 + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}_{\mathbf{y}_0} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

dove con  $\mathbf{h}_1(\cdot)$  e  $\mathbf{h}_2(\cdot)$  si sono indicati gli infinitesimi di ordine superiore che si suppone di poter trascurare nell'intorno del punto di equilibrio  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ . Utilizzando come nuove variabili di sistema le distanze dal punto di equilibrio,  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$ , e  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ , si ottiene il seguente sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}(t) \end{cases}$$

dove le matrici di sistema sono le seguenti:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$

e

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$

Avendo linearizzato il sistema è possibile descriverlo tramite la sua funzione di trasferimento  $G(s)$  che risulta essere:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Solo per completezza si enuncia il criterio “ridotto” di Lyapunov che permette di studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto di equilibrio. Il criterio afferma che il sistema non lineare è asintoticamente stabile, in quel punto di equilibrio, se il sistema lineare è asintoticamente stabile ed è instabile se il sistema lineare è instabile; se il sistema lineare è semplicemente stabile (ha poli sull'asse immaginario) non si può dire nulla sul comportamento del sistema non lineare.

Avendo esposto brevemente la teoria, che sta dietro alla linearizzazione dei sistemi non lineari, si può passare ad analizzare i risultati ottenuti. Il sistema ridotto ad una sola ruota dentata è già lineare (non presenta non linearità in quanto queste vengono introdotte dai giochi) per cui con il comando `linmod`, al variare degli attriti, si determinano le funzioni di trasferimento e i diagrammi di Bode riportati in Fig. 2.7. Al progressivo aumentare degli attriti il picco di risonanza diminuisce. Questo risultato è concorde con le relazioni teoriche sull'ampiezza  $M_R$  del picco di risonanza e sul coefficiente di smorzamento  $\delta$

$$M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} \quad \delta = \cos(\varphi) \quad \omega_n = \sqrt{\omega^2 + \sigma^2}$$

All'aumentare dell'attrito i poli si spostano dall'asse immaginario (come si evince anche dai contorni delle radici sul sistema ridotto) e l'angolo  $\varphi$  (vedi Fig. 2.8), per come è definito, assume valori sempre minori mentre il coefficiente di smorzamento  $\delta$  assume valori sempre più prossimi all'unità. Il picco di risonanza sarà quindi sempre meno pronunciato fino a scomparire come si

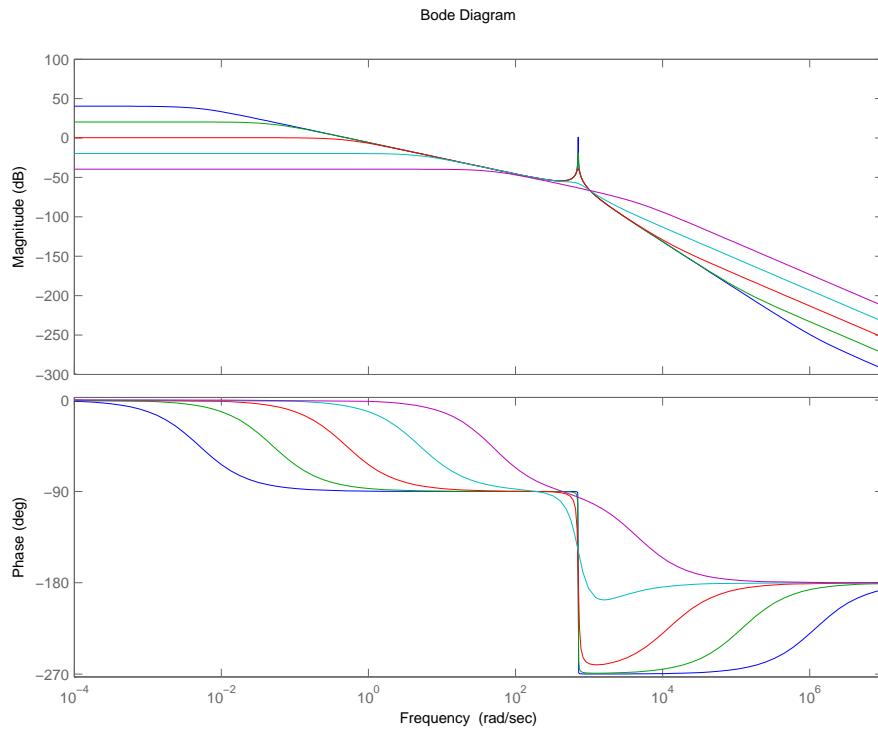


Figura 2.7: Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del modello ridotto ad una sola ruota dentata.

vede anche dal diagramma di Bode delle ampiezze riportato in Fig. 2.9. Esso presenta un massimo per  $0 \leq \delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , interseca l'asse a destra della pulsazione naturale  $\omega_n$  per  $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ , interseca l'asse a sinistra della pulsazione naturale  $\omega_n$  per  $\frac{1}{2} \leq \delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  e per  $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1$  non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto sotto alla sua approssimazione asintotica.

Volendo linearizzare il sistema in cui è presente il gioco si ottiene una funzione

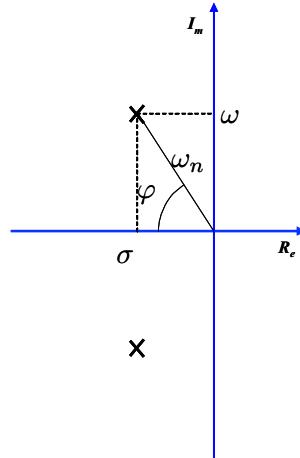


Figura 2.8: Poli complessi coniugati rappresentati nel piano complesso

di trasferimento nulla, ma questo non deve stupire in quanto il punto di lavoro si trova all'interno del gioco e la tangente alla non linearità risulta la retta delle ascisse. Portando il gioco a zero si riesce a linearizzare il modello (che in realtà è già lineare in quanto è stata tolta l'unica non linearità) e ad ottenerne

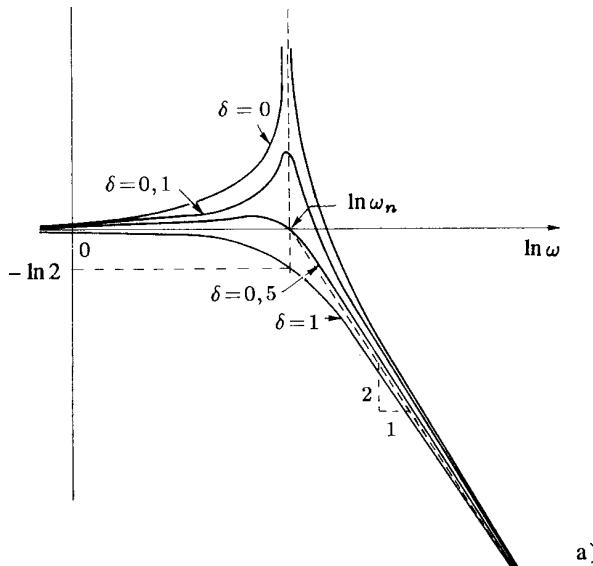


Figura 2.9: Diagramma di Bode delle ampiezze al variare del coefficiente di smorzamento.

il diagramma di Bode che, come si vede in Fig. 2.10, presenta due picchi di risonanza alle pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  il cui valore numerico è stato precedentemente calcolato. Si noti come solo la prima pulsazione è quella che determina il

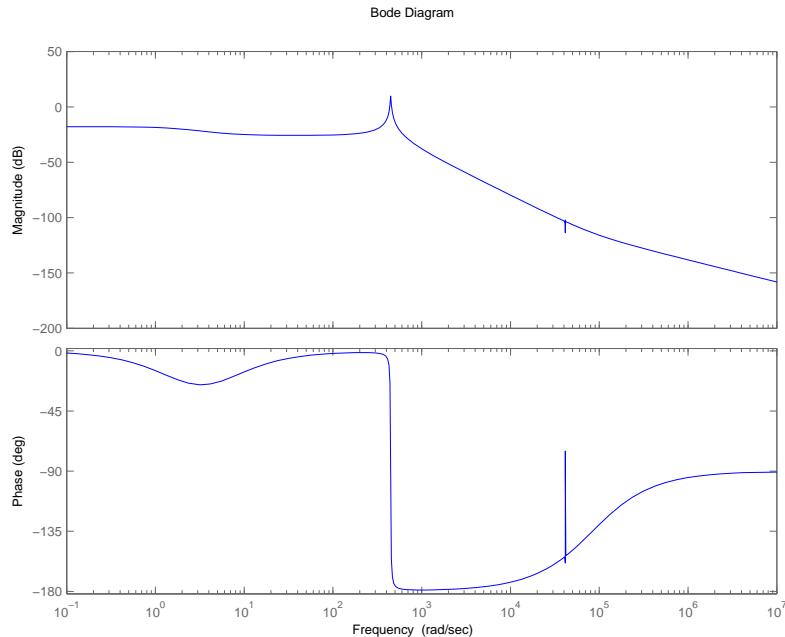


Figura 2.10: Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del modello ridotto ad un solo gioco.

fenomeno di risonanza nel sistema; la seconda infatti si trova a frequenze elevate in cui la trasmissione non andrà mai a lavorare. Il motivo per cui non si vede il picco di risonanza nella seconda pulsazione è dovuto al fatto che vicino a tale pulsazione si ha anche una coppia di zeri complessi coniugati; questo emerge chiaramente dal diagramma di Bode delle fasi dove compare

uno spike causato da uno sfasamento di  $180^\circ$  (azione prodotta dalla coppia di zeri complessi coniugati stabili) e di  $-180^\circ$  (azione prodotta dalla coppia di poli complessi coniugati stabili).

## Capitolo 3

# Simulazione urti di ingranamento alla testa dei denti

Come già accennato nel Capitolo 1 per tenere conto, durante le simulazioni, del gioco fra i denti è stata introdotta una non linearità a soglia con andamento mostrato in Fig. 3.1 All'interno del gioco  $g$  non si ha trasferimento di coppia

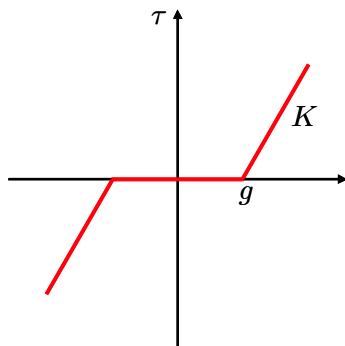


Figura 3.1: Non linearità di tipo soglia.

in quanto i denti sono distaccati. Nella zona lineare dove le ruote entrano in contatto si forma un sistema massa-molla la cui dinamica genera dei rimbalzi fra i denti che fa ingranare le ruote dopo un transitorio.

Con rigidità elevate si potrebbero verificare dei problemi simulativi, per la velocissima dinamica che caratterizza il sistema, che potrebbero portare a errori o a lunghe simulazioni. Si è pensato quindi di calcolare le velocità fra i denti per simulare in modo teorico gli urti ottenendo risultati corretti da un punto di vista energetico ma computazionalmente più leggeri.

### 3.1 Urti fra le ruote dentate

Si definisce urto una interazione che avviene in un tempo trascurabile, rispetto al tempo di osservazione, tra due punti materiali che vengono in contatto.

Nell'urto si possono sviluppare forze molto intense che modificano la quantità di moto di ciascun punto chiamate forze impulsive.

In assenza di forze esterne si verifica durante l'urto la conservazione della quantità di moto.

$$P_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = P_f \quad (3.1)$$

La quantità di moto del centro di massa rimane invariata:

$$P = (m_1 + m_2) v_{cm} = P_i = P_f = \text{costante} \quad (3.2)$$

Per il secondo teorema di Konig l'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa ( $E_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$ ) e di quella del sistema rispetto al centro di massa ( $\bar{E}_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2$ ):

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_i + v_{cm})^2 = \bar{E}_k + E_{cm} \quad (3.3)$$

L'urto fra i denti delle ruote è di tipo anelastico: si conserva quindi la quantità di moto del sistema, se non agiscono forze esterne di tipo impulsivo, ma non l'energia cinetica. Una certa frazione dell'energia cinetica  $\bar{E}_k$ , prima dell'urto, viene assorbita convertendosi in calore o in energia potenziale di deformazione. Per determinare i valori di  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$  in funzione di  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$  è più comodo

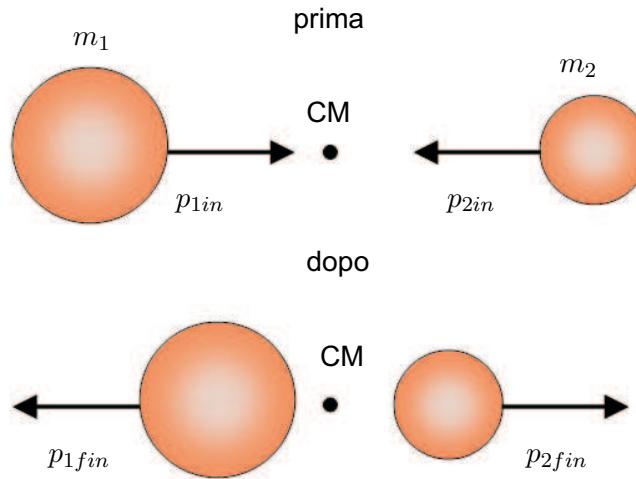


Figura 3.2: Rappresentazione dell'urto tra due masse: prima dell'urto (in alto), dopo l'urto (in basso).

considerare l'urto nel sistema di riferimento del centro di massa, ricordando il legame fra le velocità relative:

$$v_{1i} = \bar{v}_{1i} + v_{cm} \quad v_{2i} = \bar{v}_{2i} + v_{cm} \quad (3.4)$$

$$v_{1f} = \bar{v}_{1f} + v_{cm} \quad v_{2f} = \bar{v}_{2f} + v_{cm}$$

Avendo assunto il centro di massa come riferimento, la posizione e la velocità del centro di massa rispetto a se stesso sono nulle, pertanto la quantità di moto totale del sistema risulta nulla:

$$v_{cm} = \frac{\sum_i m_i \bar{v}_i}{\sum_i m_i} = 0 \quad \rightarrow \quad P = \sum_i m_i \bar{v}_i = 0$$

Dalle equazioni (3.1) e (3.2) risulta

$$m_1 \bar{v}_{1i} = -m_2 \bar{v}_{2i} \quad m_1 \bar{v}_{1f} = -m_2 \bar{v}_{2f}$$

Definendo ora il coefficiente di riduzione  $e$  (dalla relazione sopra uguale per entrambe le particelle) si evidenzia il cambiamento subito dalla quantità di moto, del singolo punto materiale, durante l'urto :

$$e = -\frac{m_1 \bar{v}_{1f}}{m_1 \bar{v}_{1i}} = -\frac{\bar{v}_{1f}}{\bar{v}_{1i}} \quad e = -\frac{m_2 \bar{v}_{2f}}{m_2 \bar{v}_{2i}} = -\frac{\bar{v}_{2f}}{\bar{v}_{2i}} \quad 0 \leq e \leq 1 \quad (3.5)$$

L'energia cinetica del sistema delle due particelle dopo l'urto è data da:

$$\begin{aligned} \bar{E}_f &= \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_{2f}^2 = e^2 \left( \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_{2i}^2 \right) \\ \bar{E}_f &= e^2 \bar{E}_{kin} \end{aligned}$$

Come emerge anche dalla formula sopra  $e$  rappresenta la quantità di energia cinetica che non viene persa durante l'urto. Nell'urto elastico ( $e = 1$ ) l'energia si conserva e la quantità di moto del punto materiale rimane in modulo uguale, prima e dopo l'urto. In quello completamente anelastico ( $e = 0$ ) tutta l'energia cinetica del moto relativo al centro di massa è assorbita e trasformata.

Per ricavare le velocità nel sistema inerziale, si inserisca l'equazione (3.5) nelle relazioni (3.4):

$$\bar{v}_{1f} = v_{1f} - v_{cm} = -e \bar{v}_{1i} = -e (v_{1i} - v_{cm}) \quad \rightarrow \quad v_{1f} = v_{cm}(1 + e) - e v_{1i}$$

$$\bar{v}_{2f} = v_{2f} - v_{cm} = -e \bar{v}_{2i} = -e (v_{2i} - v_{cm}) \quad \rightarrow \quad v_{2f} = v_{cm}(1 + e) - e v_{2i}$$

Poiché per la conservazione della quantità di moto (relazioni (3.1) e (3.2)) :

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

si ottiene infine:

$$\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{(m_1 - e m_2) v_{1i} + m_2 (1 + e) v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2f} &= \frac{(m_2 - e m_1) v_{2i} + m_1 (1 + e) v_{1i}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Queste formule definite nel campo meccanico traslazionale possono essere utilizzate nel campo meccanico rotazionale moltiplicando le velocità angolari delle varie ruote dentate per i rispettivi raggi:

$$v_{1i} = \omega_1 R_1 \quad v_{2i} = \omega_2 R_2$$

Ovviamente le velocità finali, così calcolate, andranno divise per i raggi in modo da passare di nuovo nel campo rotazionale:

$$\omega_{1f} = \frac{v_{1f}}{R_1} \quad \omega_{2f} = \frac{v_{2f}}{R_2}$$

La parte dello schema Simulink impiegata in questo calcolo è riportata in Fig. 3.3:

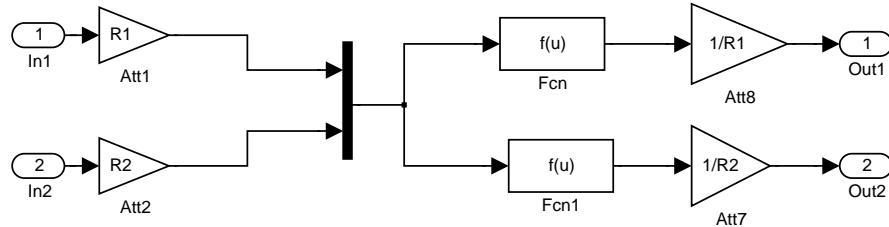


Figura 3.3: Schema Simulink per il calcolo delle velocità angolari delle ruote dentate in seguito all'urto (`Giocofinitomdl.mdl`).

### 3.2 Cambiamento delle condizioni iniziali negli integratori

Avendo calcolato le velocità dopo l'urto si presenta ora il problema di modificare le condizioni iniziali dei vari integratori per ottenere una distribuzione di energia congrua.

Gli integratori sono sensibili al fronte di salita del segnale di reset che gli si presenta all'ingresso. Questo segnale è stato ottenuto a partire dalla non linearità utilizzando la funzione  $sign|.|$  che restituisce zero quando i denti si trovano all'interno del gioco e uno quando entrano nella zona lineare. I blocchi atti a questo calcolo sono riportati in Fig. 3.4:

Per come è stato pensato lo schema, in una catena di ingranaggi, ogni ruota

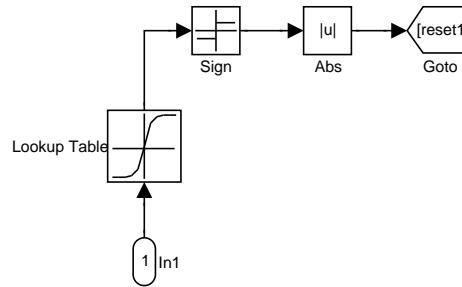


Figura 3.4: Schema Simulink per il calcolo del segnale di reset da fornire all'istante dell'urto tra le ruote dentate per la redistribuzione dell'energia (`Giocofinitomdl.mdl`).

dentata è influenzata dal segnale di reset della ruota che la precede e da quella che la segue; inoltre potendosi verificare degli urti sia nell'ingranaggio a monte che in quello a valle si avranno due valori di velocità per la ruota presa in considerazione. Sia i segnali di reset che le condizioni iniziali non possono essere

A	B	xor(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabella 3.1: Tavola di verità della funzione logica xor.

AB CD	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	0
10	0	1	0	0

Tabella 3.2: Mappa di Karnaugh utilizzata per sintetizzare l'espressione logica della rete che abilita o meno i segnali di reset.

applicati contemporaneamente all'integratore perchè si genererebbe energia; bisogna quindi inserire una logica che gestisca questa situazione.

Le condizioni iniziali vanno sommate in maniera pesata col corrispettivo segnale di reset: la parte della rete che gestisce tale condizione è facile da realizzare perchè basta moltiplicare le velocità finali calcolate per il segnale di reset prima di sommarle. Il reset all'ingresso dell'integratore deve essere mandato a uno solo quando uno dei due segnali commuta mentre l'altro rimane a zero; utilizzare una porta xor (la cui tavola di verità è riportata in Tab. 3.1) in questo caso non è possibile perchè il segnale di reset andrebbe alto in condizioni non volute (ad esempio quanto uno dei due segnali va basso partendo da una condizione con entrambi alti).

Bisogna quindi realizzare una logica che a seconda dello stato presente (segnali di ingresso ritardati) e di quello futuro (segnali di ingresso non ritardati) abiliti o meno il segnale di reset. La mappa di Karnaugh, dalla quale si ricava l'espressione logica della rete, è riportata in Tab. 3.2

$$y = \overline{ACD} + \overline{CDB}$$

La parte dello schema Simulink che implementa questa logica è riportata in Fig. 3.5:

### 3.3 Modello Simulink e simulazioni

Il modello Simulink della catena composta da quattro ruote dentate è riportato in Fig. 3.6. Prima di commentare le simulazioni bisogna sottolineare che in questo modello le elasticità delle ruote sono state considerate di valore molto elevato per rimanere coerenti con le ipotesi fatte nel calcolo delle velocità finali

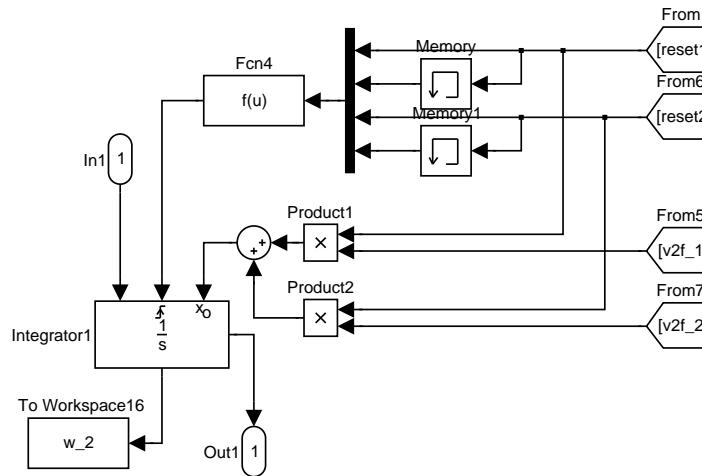


Figura 3.5: Schema Simulink per il calcolo dei segnali di reset e delle condizioni iniziali da applicare alle ruote dentate (*Giocofinitomdl.mdl*).

dopo gli urti. Durante i rimbalzi si è assunta una elasticità infinita per cui, per evitare ipotesi in contrasto, anche quando le ruote ingranano entrando nella zona lineare bisogna considerare un'elasticità di valore elevato.

Eccitando il sistema conservativo (mandando a zero tutti gli attriti e considerando gli urti elastici) con un impulso è stata verificata la conservazione dell'energia. Sfruttando il concetto di porta energetica (vedi Appendice A) è stata calcolata l'energia immessa nel sistema  $E_0$  e confrontata con quella accumulata  $E_t$ :

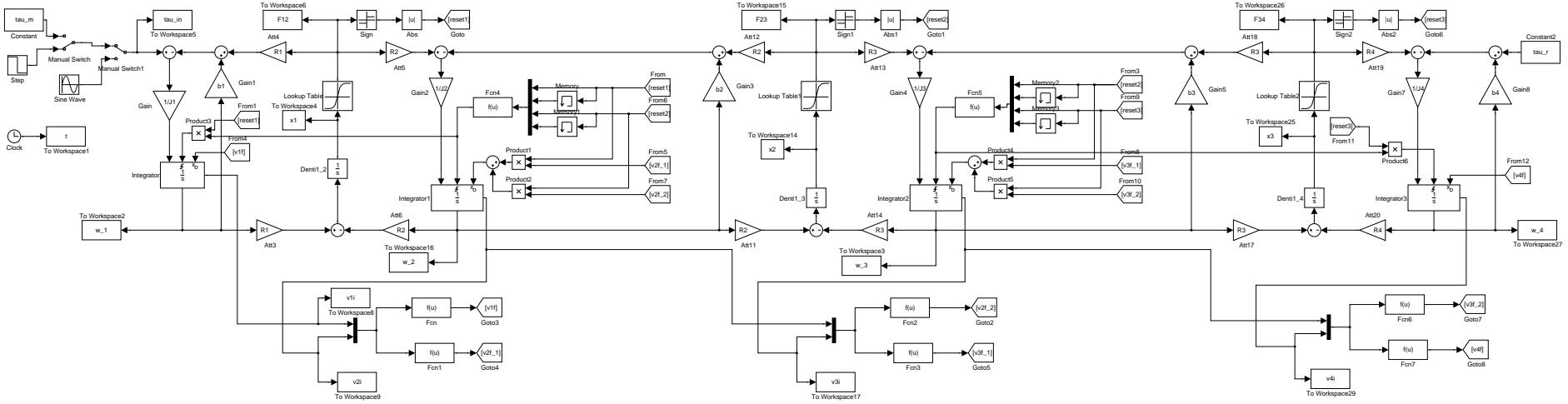
$$E_0 = \int_0^t \tau_{in} \omega_1 dt$$

$$E_t = \frac{1}{2} [J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 + J_4 \omega_4^2 + \frac{F_{12}^2}{K_1} + \frac{F_{23}^2}{K_2} + \frac{F_{34}^2}{K_3}]$$

In Fig. 3.8 sono riportati i risultati ottenuti dalla simulazione che confermano la correttezza del modello dal punto di vista energetico (l'energia che sembra crearsi è dovuta a problemi simulativi).

Vengono riportati in seguito gli urti iniziali del sistema conservativo con le masse delle ruote  $m_1 < m_2 < m_3 < m_4$ . Non essendoci attriti i denti delle ruote, quando si trovano all'interno del gioco, mantengono costante il valore di velocità acquisito durante l'urto, solo la prima ruota avrà una velocità che contina ad aumentare fino a quando viene applicato l'impulso. Come ci si doveva aspettare ( $m_1 < m_2$ ) quando si verifica il primo rimbalzo la velocità della seconda ruota aumenta molto meno di quanto non diminuisca la velocità della prima; a sua volta quando si verifica l'urto fra la seconda e la terza ruota ( $m_2 < m_3$ ) la velocità di quest'ultima aumenta di meno di quanto non diminuisca la velocità della seconda. Questo vale anche per i successivi rimbalzi fra le ruote; viene quindi confermata la bontà del modello anche da un punto di vista meccanico in quanto durante gli urti si conserva la quantità di moto. Lo studio teorico effettuato sugli urti alla testa dei denti sebbene corretto da un punto di vista energetico non ha portato ai risultati sperati in quanto non

Figura 3.6: Schema Simulink completo mediante il quale si simulano gli urti fra le 4 ruote dentate (`Giocofinitomdl.mdl`).



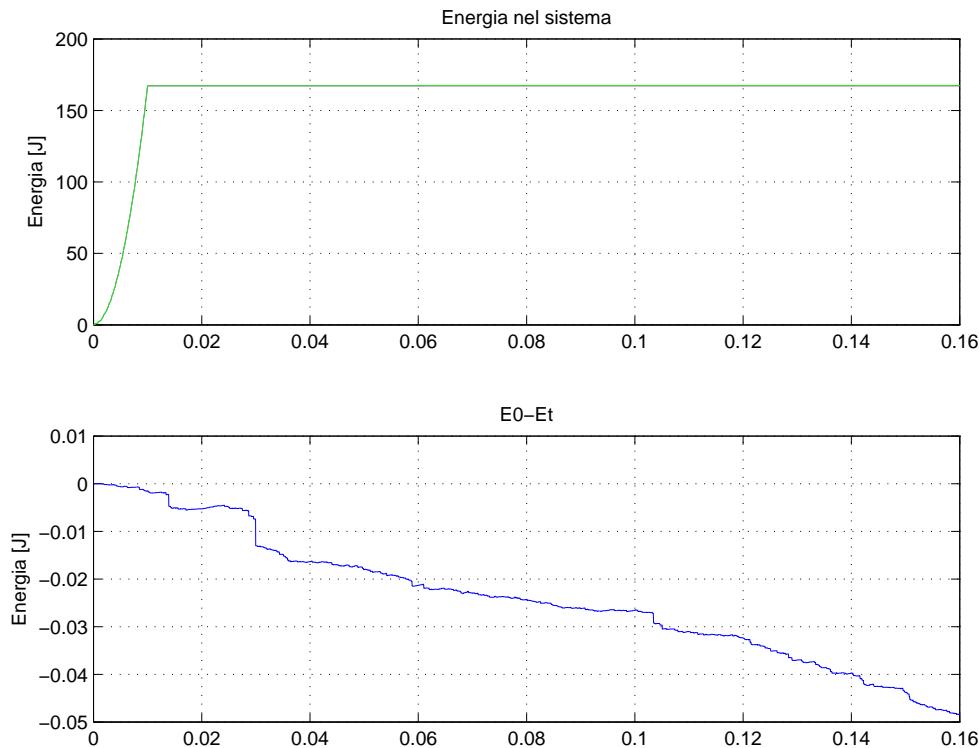


Figura 3.7: Energia del sistema

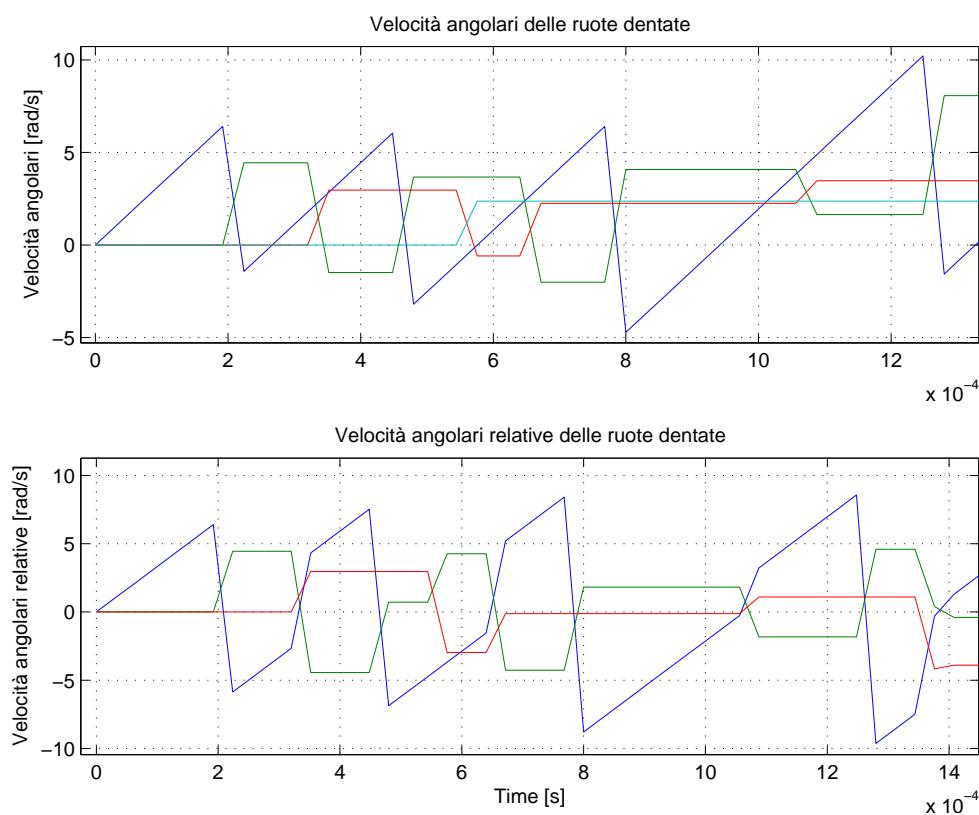


Figura 3.8: Velocità angolari delle ruote dentate.

è stato possibile creare un blocco ingranaggio che permettesse di ottenere il modello del sistema componendo questi Subsystem.



## Capitolo 4

# Analisi dei dati sperimentali forniti

Per come è progettata la trasmissione non è possibile effettuare tutte le misurazioni necessarie per capire e studiare il fenomeno della risonanza fra i denti delle ruote dentate. Le uniche misure fornite sono quelle sulla velocità angolare del volano (vedi Fig. 4.1) e sulla coppia all'albero di trasmissione (vedi Fig. 4.2) ottenute, durante una prova al banco, misurando la coppia al variare della velocità. Inoltre è stato anche fornito l'andamento della coppia all'albero di trasmissione in funzione della velocità del volano (vedi Fig. 4.3).

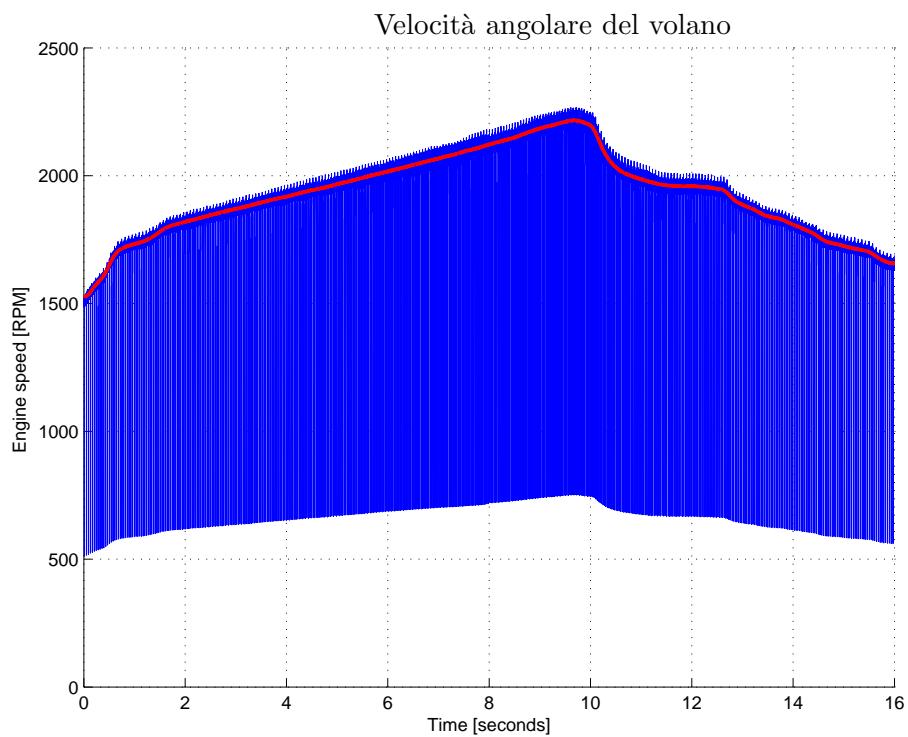


Figura 4.1: Velocità angolare del volano misurata sul sistema fisico.

Si noti come la misura sia stata effettuata a vuoto in quanto questo è il caso peggiore dove le oscillazioni di coppia provocano le elevate oscillazioni sul si-

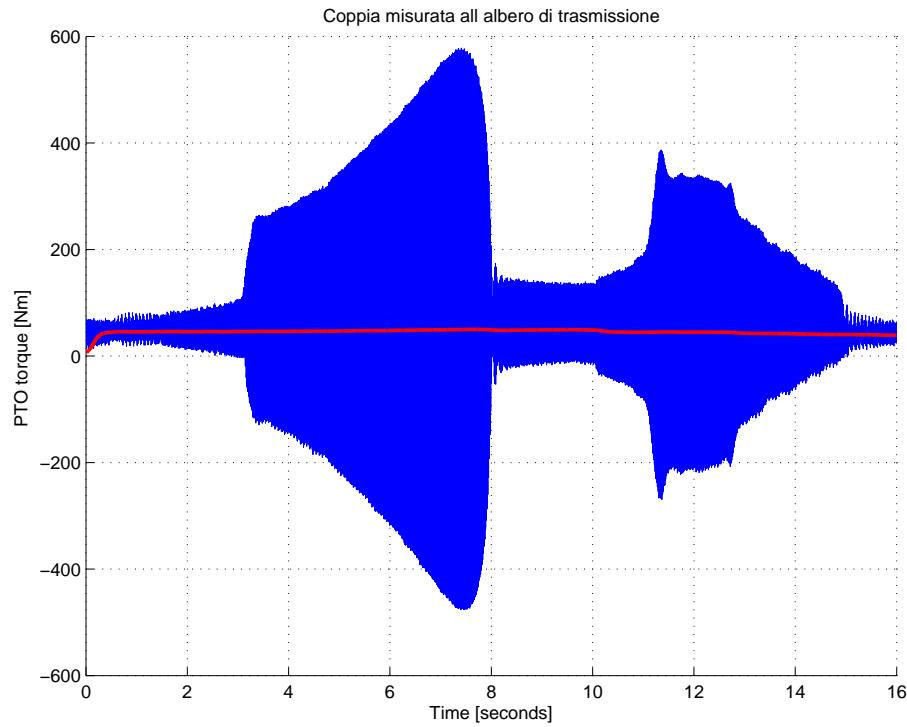


Figura 4.2: Coppia misurata sul sistema fisico all'albero di trasmissione

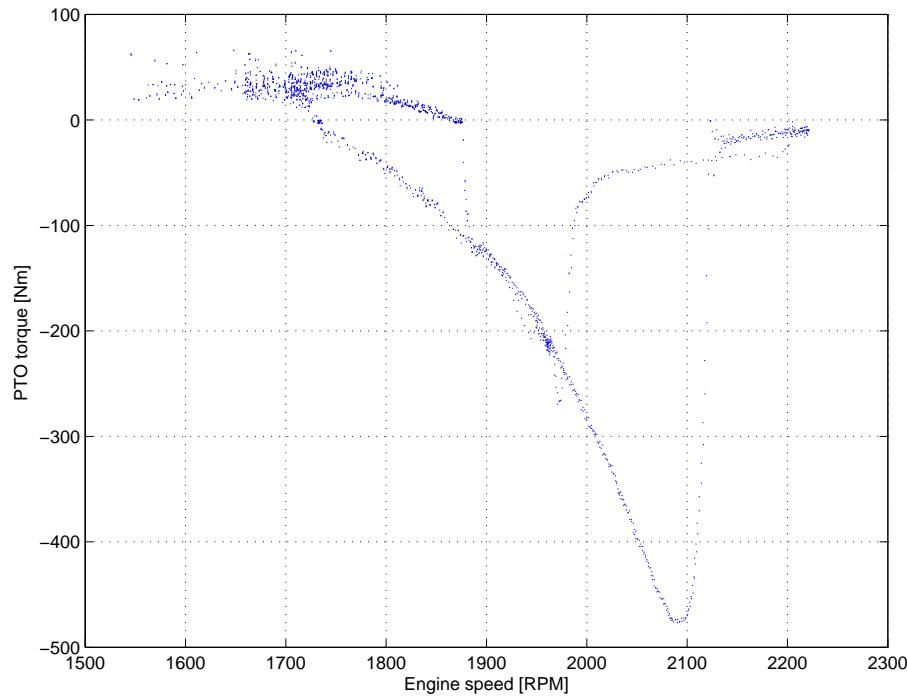


Figura 4.3: Coppia all'albero di trasmissione in funzione della velocità angolare del volano.

stema (come si vede dalla coppia misurata all'albero di trasmissione) mentre la coppia media fornita è quella spesa per vincere gli attriti.

## 4.1 Filtraggio dei dati forniti

Nella ruota fonica, utilizzata per il rilievo della velocità del volano, manca un dente per poter effettuare anche misure sulla posizione. Per come funziona il sensore, che rileva il numero di denti che passano nell'unità di tempo (mediante una sonda ad effetto Hall), nell'intervallo temporale in cui passa il dente mancante viene misurata una velocità inferiore a quella reale; ciò causa degli spike che disturbano la misura della velocità, come emerge anche dalla Fig. 4.1. Per quanto riguarda la coppia è interessante conoscerne il valore medio per definire gli attriti da utilizzare in successive simulazioni.

I dati ottenuti sono quindi stati filtrati per eliminare i picchi presenti nell'andamento della velocità e ottenere il valore medio della coppia.

Prima di filtrare le misura è necessario ridurre il numero di dati da elaborare; il periodo di campionamento ( $20\mu s$ ), utilizzato per estrarre i valori numerici, fornisce un numero di dati ridondante (800000 campioni), che rallenta molto l'esecuzione di alcuni comandi matlab e le simulazioni mediante Simulink. Il listato matlab (**UniMoData1Reduced.m**) che esegue la riduzione dei campioni ridondanti sulla velocità del volano eliminando gli spike viene riportato in Appendice B.

I dati ottenuti non sono equispaziati per questo nel listato matlab (**UniMoData1filtered.m**) prima di filtrarli si usa il comando `interp` che interpolandoli produce una serie di campioni tutti equispaziati:

```
tt=Data.Time(1:10:length(Data.Time)); Velocity_Reduced3.Time=tt;
Velocity_Reduced3.EngineSpeed=interp1(Velocity_Reduced2.Time,
                                         Velocity_Reduced2.EngineSpeed,tt);
```

I filtro, costituito da un solo polo e caratterizzato dalla funzione di trasferimento  $\frac{1}{1+\tau s}$ , è stato discretizzato utilizzando la trasformazione bilineare per filtrare i vari campioni ottenuti sperimentalmente. Per ricavare il valore di  $\tau$  basta ricordare che la disequazione  $\frac{1}{\tau} \ll \frac{2\pi}{T}$  deve essere verificata se si vuole filtrare il segnale periodico di periodo  $T$ , in modo che le pulsazioni di interesse siano fuori dalla banda a -3dB. Sono poi stati messi in cascata tre filtri in modo da aumentarne la selettività (si ottiene infatti la funzione di trasferimento  $\frac{1}{(1+\tau s)^3}$  di un polo triplo che ha come pendenza -60dB). I comandi matlab che eseguono ad esempio il filtraggio della coppia vengono di seguito riportati (**UniMoData1filtered.m**):

```
LPTau1 = 0.05 ;
LPsys1 = c2d(tf( 1 , [ LPTau1, 1 ] ) , Data.Time(2) - Data.Time(1) , 'tustin');
LPsys1 = LPsys1 * LPsys1 * LPsys1;
tt = [Data.Time(1):Data.Time(2) - Data.Time(1):(Data.Time(2) -
Data.Time(1))*length( Data.PTOTorque )];
tt = tt( 1 : length( Data.PTOTorque ) );
Data.PTOTorqueFiltered = lsim( LPsys1 , Data.PTOTorque , tt );
```

L'utilizzo di un filtro del terzo ordine, non è sufficiente ad eliminare le oscillazioni presenti nei segnali. Tali oscillazioni vengono poi amplificate dal sistema e rendono quindi difficile la taratura dello stesso. Per questo motivo la coppia e la velocità angolare sono state ulteriormente filtrate mediante un filtro a media mobile che calcola la media per ogni campione nell'intervallo delimitato

dalla finestra di lunghezza  $n$  a partire dal campione  $i-k$  fino al campione  $i+k$ . È per utilizzare questo filtro che si è ridotto il numero di campioni da 800000 a 80000, operando una sorta di sottocampionamento, in modo da ottenere delle simulazioni veloci (è ovvio che un elevato numero di campioni e una finestra ampia aumentano notevolmente il tempo di calcolo).

Agli estremi e per i  $k$  campioni vicini la finestra deve avere una lunghezza inferiore a  $n$  per non eccedere negli indici volendo utilizzare valori inesistenti, per questo i limiti di inizio e di fine della finestra sono  $a$  e  $b$ . La funzione che calcola il massimo per i primi  $k$  campioni restituisce sempre come indice di partenza 1 in quanto lo confronta con un numero negativo, la funzione che calcola il minimo per gli ultimi  $k$  valori restituisce sempre come indice di fine  $l$  in quanto lo confronta con un numero maggiore. Il codice matlab (**filtrmedia.m**) che realizza il filtro viene di seguito riportato:

```
% X=vettore dati di input
% n=numero di elementi per ogni media

function Y=filtrmedia(X,n)
k=floor(n/2); % converte n/2 all'intero inferiore
l=length(X); % Fornisce la lunghezza del vettore X
for i=1:l
    a=max([1 i-k]); % Fornisce gli elementi max del vettore
    b=min([l i+k]); % Fornisce gli elementi min del vettore
    Y(i)=sum(X([a:b]))/(b-a+1); % Calcola la somma vettoriale indicata e la pone
end % uguale all'i-esimo elemento di Y
return
```

Si noti che all'aumentare del numero  $n$  di campioni (all'aumentare della finestra temporale) la media mobile si appiattisce fino a quando  $n$  coincide con il numero totale di campioni in questo caso esse risulta essere pari alla media. Analogamente al diminuire del numero  $n$  di campioni (al diminuire della finestra temporale) la media mobile segue di più l'andamento della funzione da filtrare; se per assurdo  $n = 1$  la media mobile coinciderebbe con la funzione.

## 4.2 Definizione degli attriti interni al sistema

Prima di analizzare il fenomeno della risonanza bisogna definire tutti i parametri in gioco che non vengono riportati nella Tab. 4.1.

Gli attriti delle varie ruote dentate non sono noti a priori in quanto di difficile misurazione pertanto si è cercato di tarare il modello sfruttando le misure sulla velocità del volano (vedi Fig. 4.1) e sulla coppia all'albero di trasmissione (vedi Fig. 4.2) confrontando quest'ultima con quella ottenuta mediante la simulazione.

Per semplificare l'analisi è stato considerato il modello ridotto a sole due ruote dentate (già studiato teoricamente nel Cap. 2) che presenta 5 poli di cui uno nell'origine; in Fig. 4.4 viene riportato, per maggiore chiarezza, lo schema

comp.	J [Kg m <sup>2</sup> ]	D [mm]	n° denti	gico min-max [mm]	K [Nm <sub>rad</sub> ]	b [Nm s <sub>rad</sub> ]
ruota <sub>1</sub> + albero	1.243 10 <sup>-2</sup>	175.26	69		8380	-
ruota <sub>2</sub>	9.276 10 <sup>-3</sup>	160.02	63	0.08 ÷ 0.17	-	-
ruota <sub>3</sub>	4.710 10 <sup>-3</sup>	132.08	53	0.08 ÷ 0.17	-	-
ruota <sub>4</sub>	1.229 10 <sup>-2</sup>	175.26	69	0.08 ÷ 0.17	-	-
volano	0.815	-	-	-	-	1,56

Tabella 4.1: Dati forniti dalla ditta Dana

POG del sistema.

Considerando i valori medi, la velocità angolare della prima ruota dentata

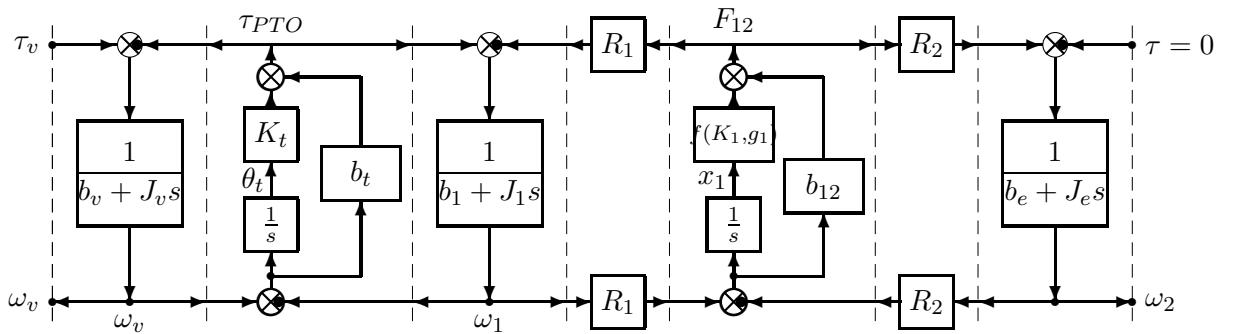


Figura 4.4: Schema POG del sistema ridotto con sole due ruote dentate.

risulta essere circa uguale a quella del volano ( $\omega_1 \simeq \omega_v$ ). Applicando la proprietà di inversione (vedi Appendice A) al modello stazionario riportato in Fig. 4.5 è possibile ridurlo per determinare un legame tra l'attrito della prima ruota dentata  $b_1$  e quello equivalente  $b_e$ .

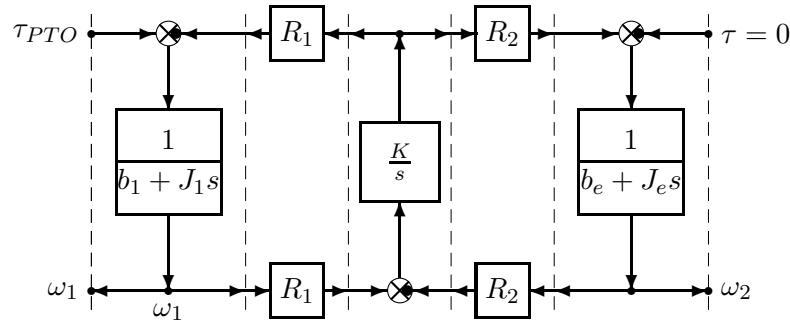


Figura 4.5: Sezione dello schema POG (del sistema ridotto) presa in esame.

Una volta invertito il percorso nel modello (vedi Fig. 4.6) per ricavare il legame fra gli attriti si cancellano le  $s$  (in condizioni stazionarie le derivate nelle equazioni differenziali sono nulle) riducendo il sistema a quello di Fig. 4.7.

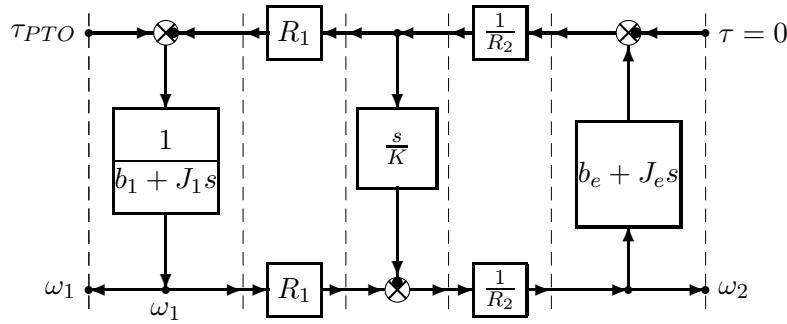


Figura 4.6: Sezione dello schema POG (del sistema ridotto) con percorso invertito

Applicando la formula di Mason si riesce a ricavare la funzione di trasferimento

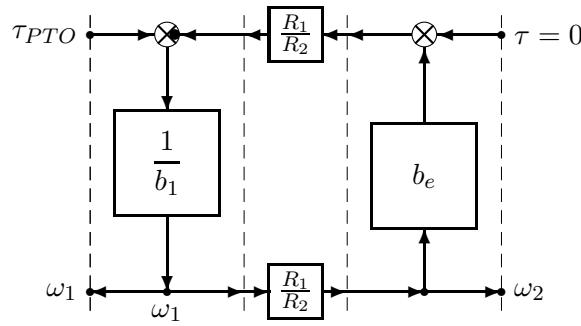


Figura 4.7: Sezione dello schema POG (del sistema ridotto) ridotta

del sistema.

$$\frac{\omega_1}{\tau_{PTO}} = \frac{1}{b_1 + b_e(\frac{R_1}{R_2})^2}$$

Avendo a disposizione la velocità angolare della prima ruota dentata ( $\omega_1 \simeq \omega_v$ ) e la coppia all'albero di trasmissione è possibile calcolare il rapporto  $\frac{\tau_{PTO}}{\omega_1}$  tra i valori filtrati (è la coppia media che viene utilizzata nel sistema per vincere gli attriti) al variare del tempo: questo risulta essere quasi costante e pari a  $0,23 \frac{Nm}{rad} s$  come emerge anche dalla Fig. 4.8. Tale valore numerico rappresenta l'attrito totale del sistema che va distribuito fra la prima ruota e quella equivalente.

Definendo la variabile adimensionale  $\gamma$  come il rapporto fra gli attriti:

$$\gamma = \frac{b_e}{b_1}$$

si ricava il sistema di equazioni (equazione (4.1)) che lega  $b_e$  con  $b_1$ , si noti come questi attriti siano definiti a seconda del parametro  $\gamma$  che distribuisce nell'ingranaggio l'attrito totale pari a  $0,23 \frac{Nm}{rad} s$ ; per  $\gamma$  elevati si avrà la maggior parte dell'attrito sulla seconda ruota mentre con  $\gamma = 0$  si ha attrito solo

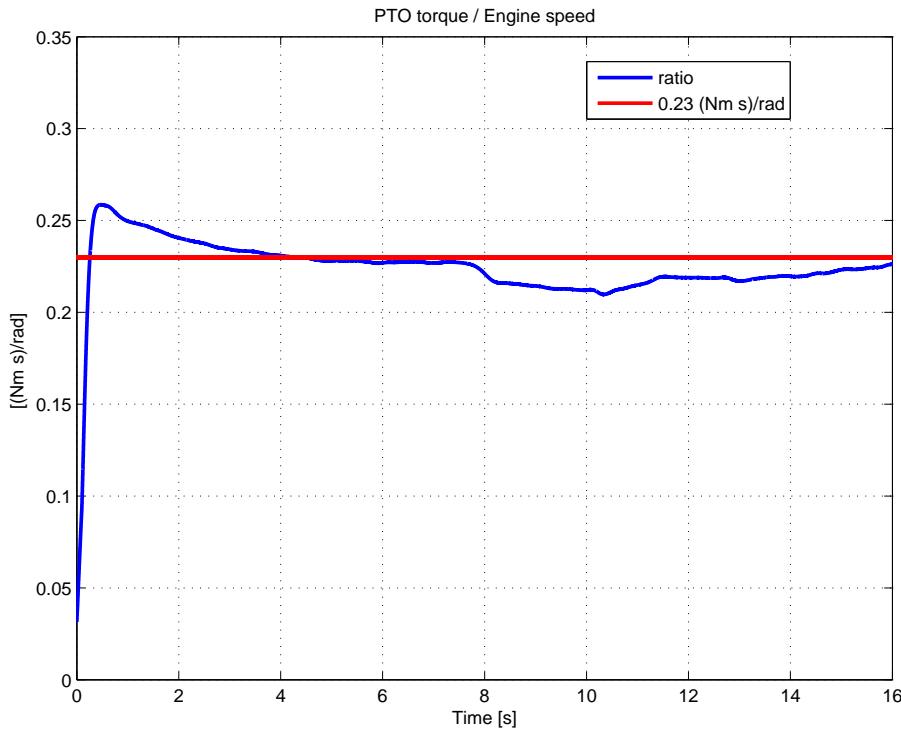


Figura 4.8: Rapporto fra la coppia misurata all'albero di trasmissione e la velocità angolare del volano che rappresenta l'attrito totale del sistema.

sulla prima ruota ( $b_e = 0$ ).

$$\begin{cases} b_e &= \gamma b_1 \\ b_1 &= \frac{\tau_{PTO}}{1 + \gamma(\frac{R_1}{R_2})^2} \end{cases} \quad (4.1)$$

I valori numerici ottenuti sono riportati per i primi valori del parametro  $\gamma$  nella Tab. 4.2

$b \left[ \frac{Nm \cdot s}{rad} \right]$	$\gamma$
$b_1 = 0.1 \ b_e = 0.1$	1
$b_1 = 0.068 \ b_e = 0.135$	2
$b_1 = 0.05 \ b_e = 0.15$	3

Tabella 4.2: Dati ottenuti mediante simulazione

Se si volesse introdurre un ulteriore gioco nel sistema basterebbe utilizzare un'ulteriore variabile  $\gamma_2$ , definita dal rapporto fra l'attrito della seconda ruota dentata e quello della seconda ruota equivalente, e riutilizzare le formule del

sistema (equazione (4.1)); il nuovo legame fra gli attriti risulta essere:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{b}_1 & = & \frac{\tau_{PTO}}{1 + \gamma(\frac{R_1}{R_2})^2} \\ \mathbf{b}_e & = & \gamma b_1 \\ \mathbf{b}_2 & = & \frac{b_e}{1 + \gamma_2(\frac{R_2}{R_3})^2} \\ \mathbf{b}_{e2} & = & \gamma_2 b_2 \end{array} \right.$$

Un metodo alternativo per determinare gli attriti presenti nel sistema fisico di trasmissione è quello di retroazionare il modello con un guadagno A elevato in modo che la velocità angolare del volano in uscita insegua quella di riferimento rendendo basso l'errore a regime. Lo schema retroazionato presenta un grado relativo unitario (il grado relativo di un sistema retorazionato è il minor numero di elementi dinamici che bisogna attraversare per passare dall'ingresso all'uscita) e quindi l'utilizzo di un guadagno è più che sufficiente per stabilizzare il sistema; il modello realizzato mediante Simulink è riportato in Fig. 4.9.

Con una serie di simulazioni si è minimizzato l'errore relativo fra la coppia media misurata e quella simulata; i valori degli attriti non si discostano di molto da quelli determinati per  $b_1$  e  $b_e$  riportati nella Tab. 4.2 per  $\gamma = 3$ . I risultati ottenuti vengono riportati in Fig. 4.10 e in Fig. 4.11

## 4.2 Definizione degli attriti interni al sistema

45

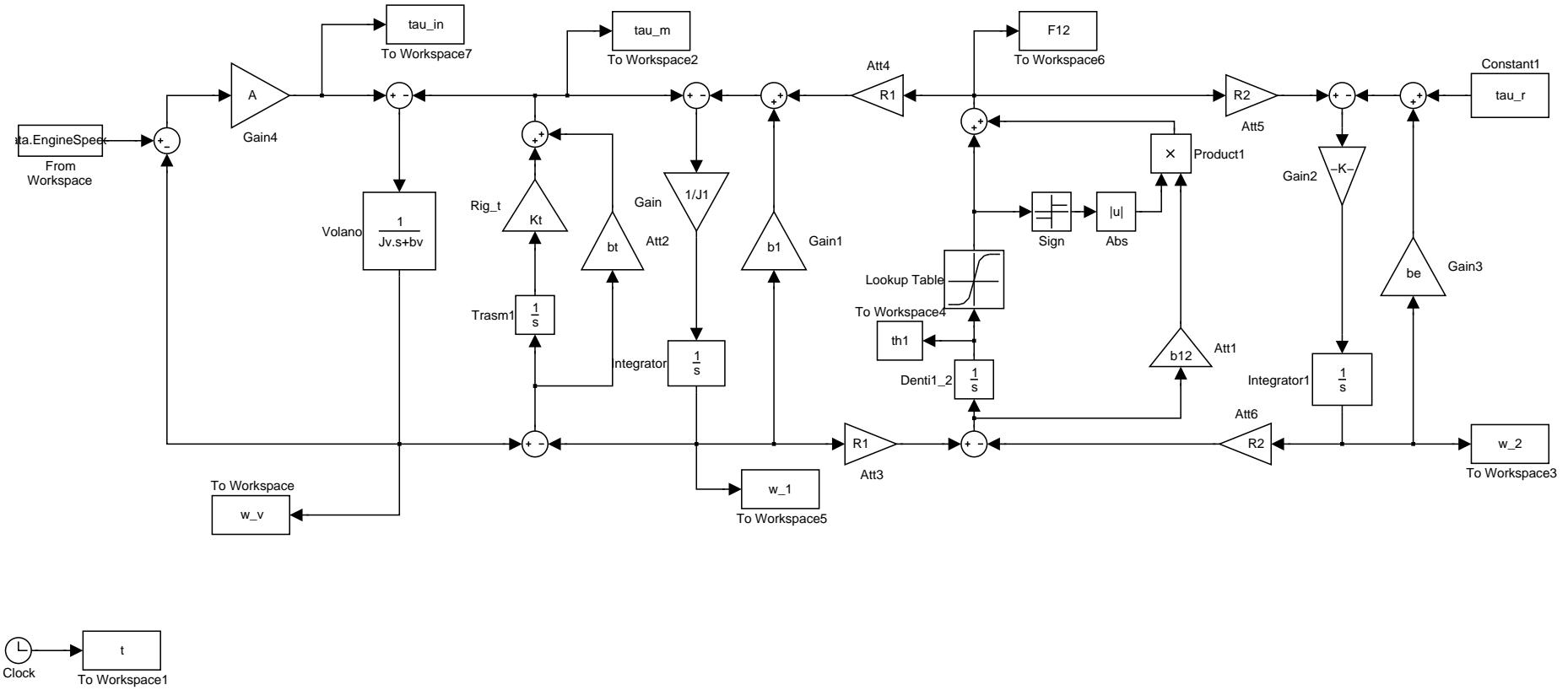


Figura 4.9: Schema Simulink utilizzato per tarare gli attriti nel sistema  
(DatiExperimentalmdl.mdl)

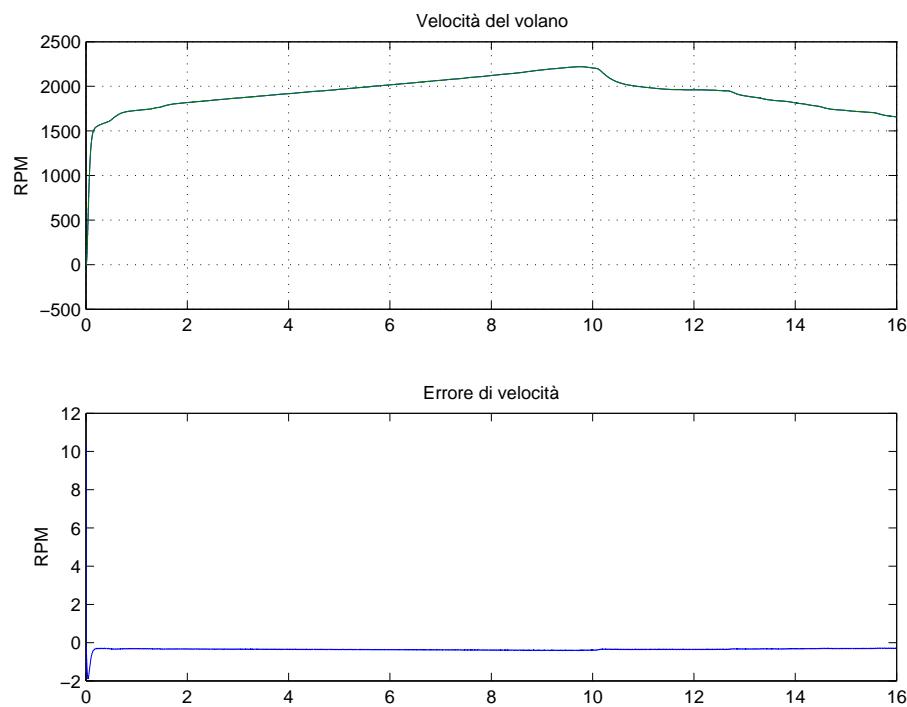


Figura 4.10: Velocità angolare del volano

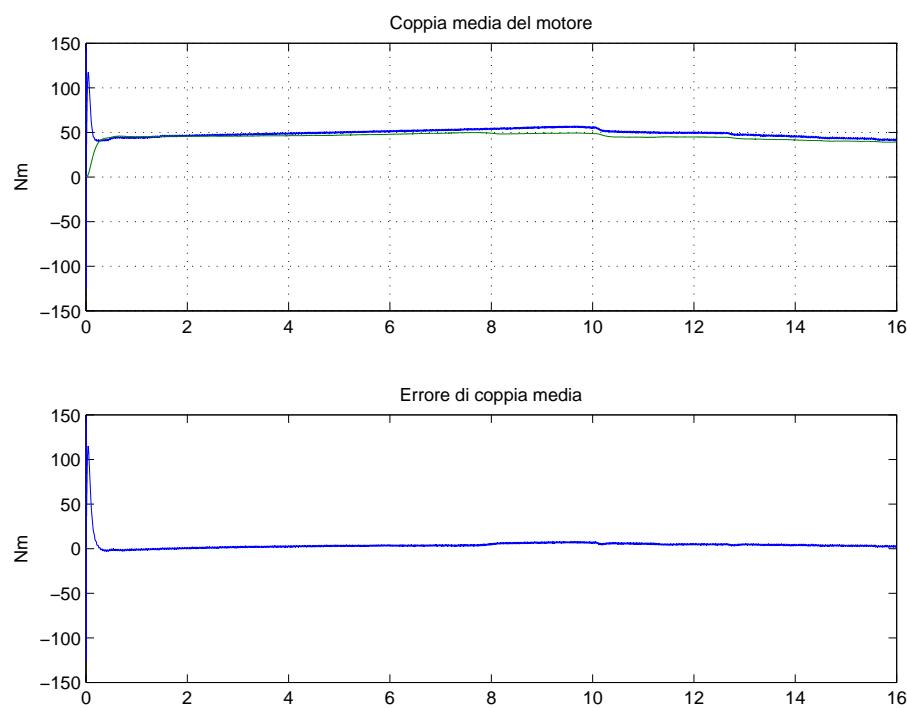


Figura 4.11: Coppia misurata all'albero di trasmissione

### 4.3 Graficazione dei picchi e calcolo del periodo

Per ottenere maggiori informazioni sui dati forniti, si è cercato di determinare i massimi e minimi sul segnale di coppia. A partire dai picchi è infatti possibile risalire al periodo dell'oscillazione di coppia, da questo alla sua pulsazione ( $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ) e da questa ricavare la velocità angolare del volano:

$$\omega_v = \frac{\omega}{2} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T} \quad (4.2)$$

L'equazione (4.2) si ricava sapendo che a ogni giro del volano si presentano due scoppi quindi il periodo della sollecitazione di coppia risulta essere la metà rispetto a quella del volano (si rimanda alla lettura della sezione 5.1 per ulteriori chiarimenti).

Finchè il sistema non entra in risonanza il segnale di coppia misurato è com-

$\omega_v$	: velocità angolare del volano
$\omega$	: Pulsazione del segnale di coppia che sollecita il sistema
$T$	: Periodo dell'oscillazione di coppia

Tabella 4.3: Variabili dell'equazione (4.2).

posto dalla somma di tutte le armoniche per cui il segnale risulta è molto rumoroso (presenta una moltitudine di massimi e minimi) come rappresentato in Fig. 4.12 e in Fig. 4.13 per questo motivo i risultati ottenuti dalle successive analisi (utilizzando la funzione `picchi.m` il cui funzionamento è spiegato di seguito) non dovranno essere considerati. Quando la pulsazione dell'armonica fondamentale arriva alla pulsazione di risonanza del sistema l'ampiezza di tale armonica viene notevolmente amplificata per cui il contributo delle armoniche di ordine superiore diventa trascurabile; il segnale in questo caso risulta essere più pulito presentando un numero ridotto di massimi e di minimi. Per capire il funzionamento del programma `picchi.m`, riportato in Appendice A, si faccia riferimento alla Fig. 4.14 che semplifica l'andamento della coppia; i massimi sono rappresentati dalle croci rosse, i minimi da quelle verdi, la media in fucsia. Il codice è diviso in due parti che operano rispettivamente sui massimi e sui minimi; le due sezioni sono analoghe se non che per i massimi viene utilizzata la funzione `max()` e per i minimi la funzione `min()`:

Il vettore `indmax` viene ciclato per creare i vettori `indmaxi` e `startmax`; il primo contiene gli indici dei massimi con un valore maggiore della media (in Fig. 4.15 sono le croci rosse), il secondo gli indici dei massimi con un valore sopra la media che sono preceduti da un minimo con valore sotto la media (in Fig. 4.15 sono i triangoli). In questo modo la funzione viene divisa in gruppi definiti nel vettore `startmax`; il picchio da tenere è quello massimo di ogni gruppo (in Fig. 4.15 sono i cerchi). Il vettore `indmax` viene ciclato una seconda volta e mediante il confronto con il vettore `startmax` viene creato il

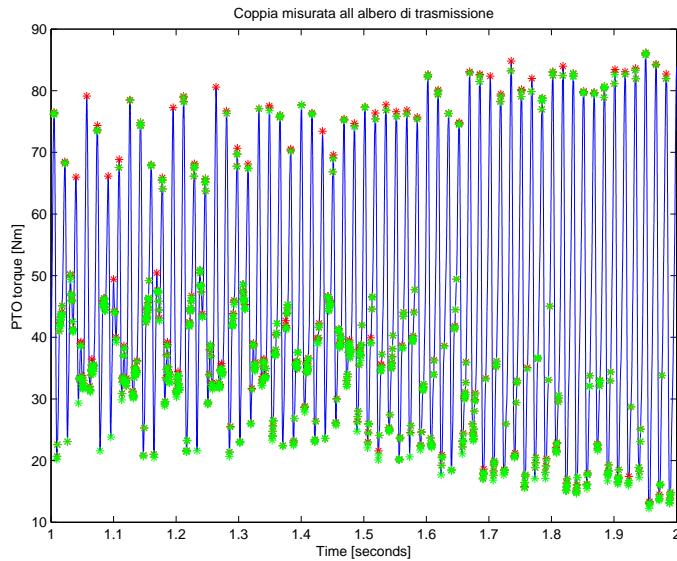


Figura 4.12: Zoom della coppia misurata sul sistema fisico all'albero di trasmissione.

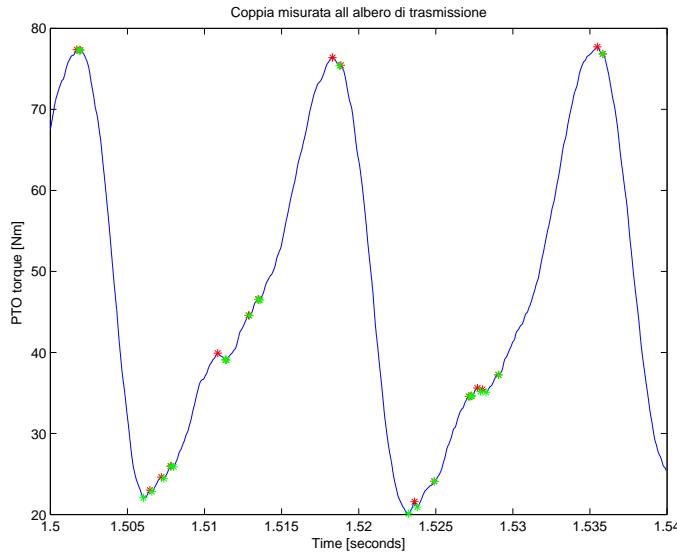


Figura 4.13: Zoom della coppia misurata sul sistema fisico all'albero di trasmissione.

vettore temporaneo `Tindmaxii` contenente tutti i massimi di un gruppo fra cui si terrà solo il massimo.

Per quanto riguarda i minimi si faccia riferimento alla Fig. 4.16

Facendo girare il programma, si ottiene la Fig. 4.17 dove vengono rappresentati i massimi e i minimi, dei vari picchi, della Fig. 4.12.

Utilizzando tale funzione è stato possibile riprodurre l'andamento fornito (vedi Fig. 4.3) della coppia all'albero di trasmissione in funzione della velocità del volano (vedi Fig. 4.18)

Nel file `UnimoData1ANALISIDATI.m` che utilizza la funzione `picchi.m` viene calcolato il periodo dell'oscillazione di coppia a partire dalla velocità angolare del volano, e la velocità angolare del motore a partire dal perido dell'oscillazio-

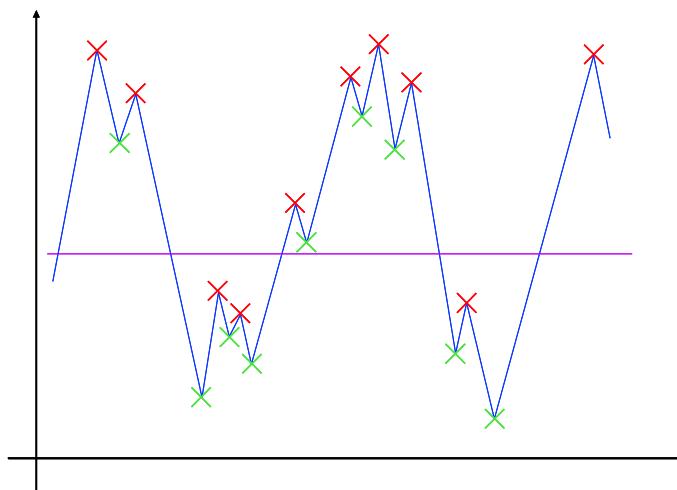


Figura 4.14: Esempio dell'andamento qualitativo della coppia.

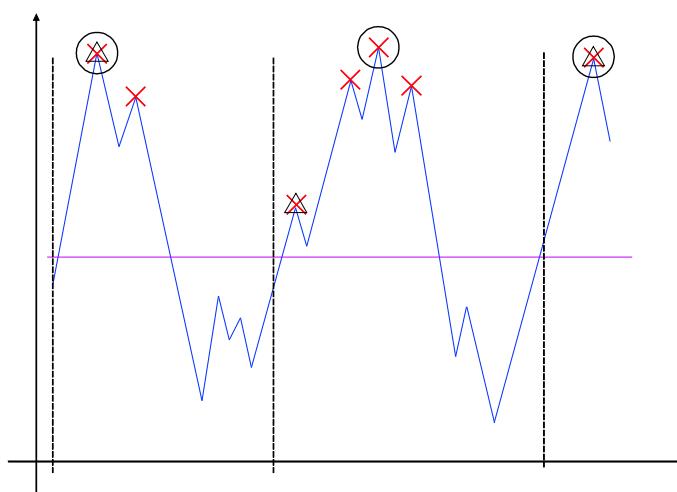


Figura 4.15: Esempio dell'andamento qualitativo della coppia.

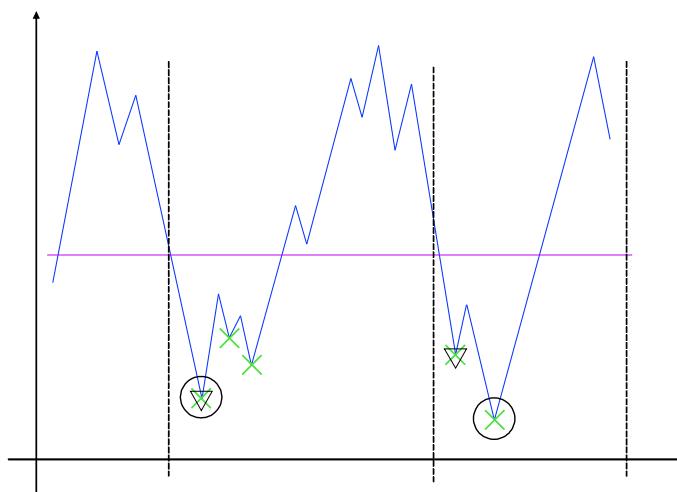


Figura 4.16: Esempio dell'andamento qualitativo della coppia.

ne di coppia. Dalla Fig. 4.19 emerge che all'aumentare della velocità angolare il periodo diminuisce, questo è corretto in quanto le due variabili sono inversamente proporzionali (vedi equazione (4.2)); inoltre all'aumentare della velocità

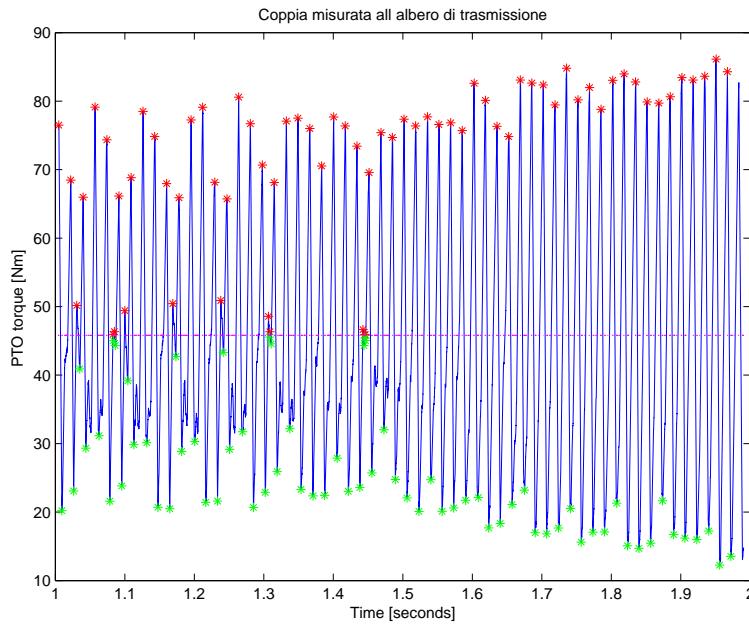


Figura 4.17: Zoom della coppia misurata sul sistema fisico all'albero di trasmissione una volta fatto eseguire il programma che seleziona i picchi.

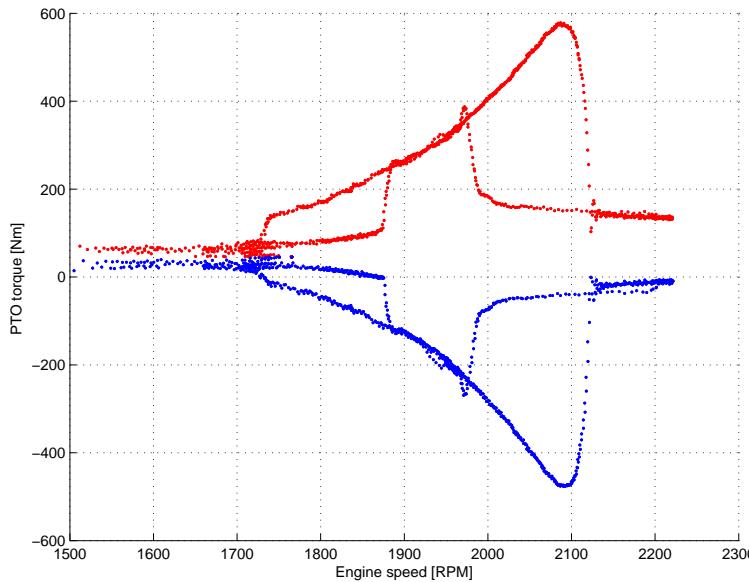


Figura 4.18: Riproduzione dell'andamento di coppia in funzione della velocità angolare del volano con i picchi selezionati eseguendo il programma.

angolare aumentano gli attriti da vincere per cui deve necessariamente aumentare la coppia media applicata in ingresso (aumenterà l'ampiezza e diminuirà il periodo dei picchi di coppia). Graficando la velocità angolare calcolata a partire dal periodo con quella sperimentale si è verificato la bontà dei dati forniti; come si vede dalla Fig. 4.20 escludendo infatti i primi e gli ultimi secondi (dove il periodo è sballato a causa della rumorosità del segnale di coppia) le due curve coincidono. Quando il sistema entra in risonanza si ha il passaggio dell'oscillazione di coppia da una situazione stabile caratterizzata da un determinato periodo ad un'altra caratterizzata da un periodo differente; nel

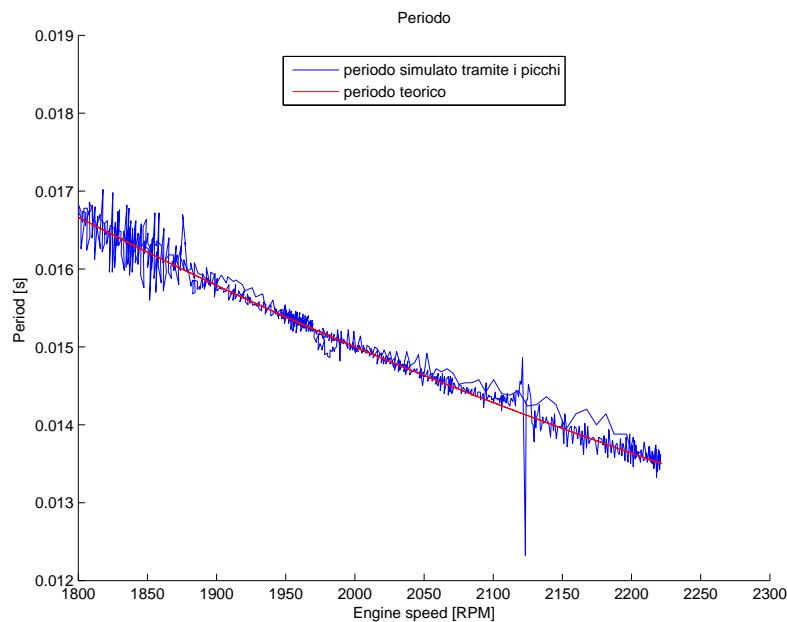


Figura 4.19: Periodo al variare della velocità angolare del volano teorico e simulato utilizzando la funzione `picchi.m`.

transitorio quindi non si avrà più una corrispondenza fra il periodo dell'oscillazione di coppia e la velocità del volano; per questo nel grafico compaiono piccoli spike negli istanti temporali dove inizia il fenomeno.

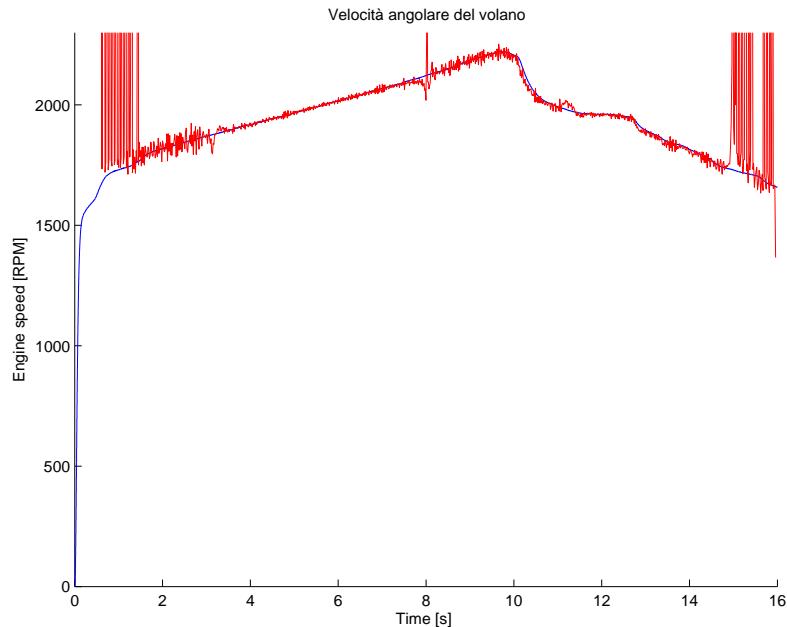


Figura 4.20: Velocità angolare del volano misurata e simulata utilizzando la funzione `picchi.m`.

## 4.4 Analisi spettrale

Nella simulazione del fenomeno fisico è necessario conoscere le fasi da applicare alle varie armoniche del segnale di coppia applicato in ingresso. Si è quindi effettuata un analisi spettrale per ogni periodo del segnale di coppia misurato all'albero di trasmissione in modo da ricavare l'andamento delle ampiezze e delle fasi, al variare del numero di giri del volano, per le prime armoniche.

Una sequenza periodica  $x[n]$  di periodo  $N_0$  può essere rappresentata mediante uno sviluppo del tutto angolo alla serie di Fourier per i segnali periodici a tempo continuo, chiamata antitrasformata discreta di Fourier:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} \bar{X}_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} \quad (4.3)$$

La sequenza periodica è espressa, come nel caso del segnale periodico a tempo continuo, da una somma di oscillazioni sinusoidali a frequenze armoniche (cioè multiple di una frequenza fondamentale). I vari esponenziali complessi nella scomposizione oscillano alle frequenze  $f_k = \frac{k}{N_0 T}$ ,  $k = 0, \dots, N_0 - 1$  che sono le armoniche relative al periodo di ripetizione  $N_0$ , ovvero alla frequenza fondamentale  $\frac{1}{N_0 T}$ .

La sequenza  $\bar{X}_k$  dei coefficienti discreti di Fourier è comunemente chiamata trasformata discreta di Fourier ed è pari a:

$$\bar{X}_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}} \quad (4.4)$$

La trasformata di una sequenza  $x[n]$  periodica di periodo  $N_0$  è essa stessa periodica con il medesimo periodo è per questo che la relazione di sitesi 4.3 è composta da un numero finito di addendi a differenza dei segnali a tempo continuo dove la rappresentazione mediante serie di Fourier comporta una somma infinita di termini.

L'algoritmo di Fast Fourier Transform, utilizzato nel file Matlab `UnimoDatta1ANALISIDATI.m` riportato in Appendice B, riduce la complessità computazionale richiesta per il calcolo della trasformata discreta di una sequenza periodica (si esprime infatti una DFT di ordine  $N_0$  in due DFT di ordine  $\frac{N_0}{2}$ ). L'analisi spettrale è stata eseguita su ogni periodo immaginando di periodizzare la sequenza fornita all'algoritmo di FFT in modo da ottenere l'analisi in funzione della velocità angolare del volano. Per la suddivisione dei vari periodi è stata utilizzata la funzione `picchi.m` il cui funzionamento è spiegato nella sezione 4.3. Per ogni periodo sono stati tenuti i primi 4 coefficienti (il sistema filtra le armoniche sopra la seconda) e di questi si è calcolato il modulo e la fase che si è poi graficato al variare della velocità angolare e del tempo.

I risultati ottenuti da questa simulazione e riportati in Fig. 4.21 e in Fig. 4.22, vanno considerati solo in modo indicativo in quanto l'analisi è stata fatta sulla coppia misurata che differisce da quella applicata in ingresso. E' interessante

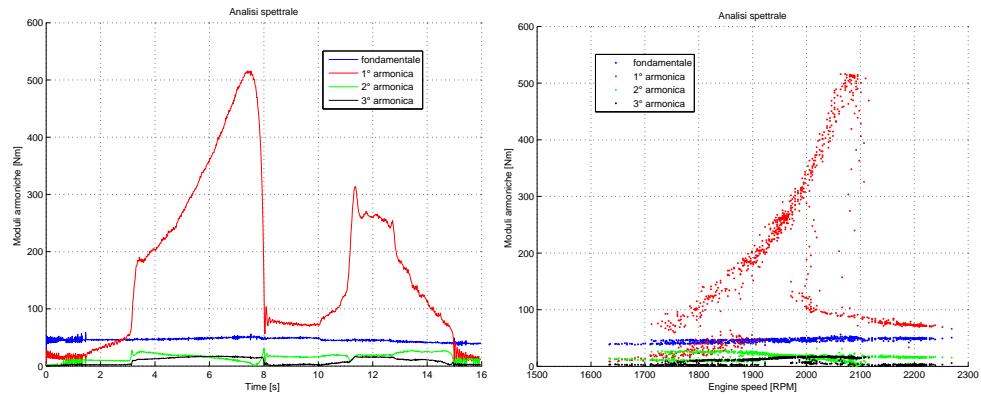


Figura 4.21: Spettro di ampiezza sul segnale di coppia misurato in funzione del tempo (a destra) e della velocità del volano (a sinistra)

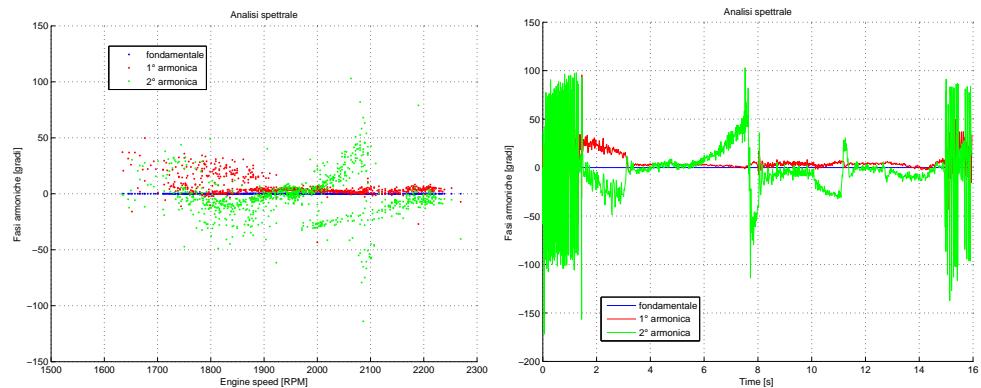


Figura 4.22: Spettro di fase sul segnale di coppia misurato in funzione del tempo (a destra) e della velocità del volano (a sinistra)

notare che, come ci si aspettava, la fondamentale e la prima armonica sono le componenti che maggiormente caratterizzano il segnale di coppia all'albero di trasmissione mentre è la fase della seconda armonica che cambia negli istanti temporali in cui si verifica il fenomeno della risonanza.



## Capitolo 5

# Simulazione della risonanza

La risonanza è un fenomeno fisico che si verifica quando un sistema oscillante smorzato viene sottoposto a una sollecitazione periodica di frequenza pari all'oscillazione propria; questo provoca, in genere, un aumento significativo dell'ampiezza delle oscillazioni che corrisponde ad un notevole accumulo di energia all'interno del sistema stesso. L'andamento della coppia all'albero di trasmissione, mostrato in Fig. 4.2, non può essere spiegato solo dalla risonanza del sistema in quanto si estende per una elevata banda frequenziale (da  $181, 16 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  a  $222, 32 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ), e inizia a una pulsazione inferiore a quella di risonanza  $\omega_1$  del sistema; calcolata nella sezione 2.3.

Il motivo va ricercato nei cicli limite introdotti dalla non linearità causata dal gioco. Nell'ambito dei sistemi dinamici non lineari si definisce ciclo limite una oscillazione autosostenuta caratterizzata nello spazio degli stati da una curva chiusa a cui le traiettorie del sistema tendono ad avvicinarsi (ciclo limite stabile) o ad allontanarsi (ciclo limite instabile).

Non va poi dimenticato che all'aumentare della velocità aumentano gli attriti da vincere, aumenteranno quindi anche le durate e le ampiezze dei picchi di coppia erogati dal motore in modo da aumentarne il valore medio; anche quando il sistema non è ancora entrato in risonanza si ha comunque un aumento della coppia, misurata all'albero di trasmissione, dovuto all'aumento della velocità come emerge anche dalla Fig. 4.2.

Riassumendo il fenomeno è causato dalla interazione simultanea del gioco, della risonanza e dell'aumento di coppia applicata.

### 5.1 Calcolo della coppia da applicare in ingresso

Per simulare il fenomeno della risonanza, una volta tarato il modello, bisogna fornire in ingresso l'andamento della coppia misurata sul volano; purtroppo tale andamento non è stato fornito e al suo posto sono stati dati gli spettri di ampiezza al variare del numero di giri del motore. Si è quindi generato il segnale da applicare in ingresso sommando alla fondamentale (che è il valore medio della coppia) la prima e la seconda armonica (le successive armoniche

non entrano in gioco essendo filtrate dal sistema). Un segnale reale periodico a tempo continuo può essere infatti espresso tramite la somma di oscillazioni sinusoidali a frequenze armoniche cioè multiple della frequenza  $f$  del segnale stesso.

### 5.1.1 Calcolo della fondamentale

Per calcolare la coppia media da applicare in ingresso in modo da ottenere una velocità angolare del volano con un andamento simile a quella di riferimento si sfruttano le proprietà della tecnica POG (vedi Appendice A).

Considerando solo la prima sezione del modello ridotto (vedi Fig. 5.1) si

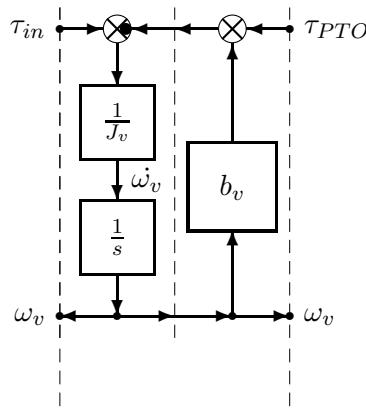


Figura 5.1: Schema POG della prima sezione di potenza del modello del sistema di trasmissione.

ricava infatti la relazione:

$$\dot{\omega}_v = \frac{1}{J_v}[-(\tau_{PTO} + b_v \omega_v) + \tau_{in}]$$

dalla quale, con semplici calcoli algebrici, si ottiene la coppia media  $\tau_m$  da applicare in ingresso:

$$\tau_m = \tau_{PTO} + b_v \omega_v + \dot{\omega}_v J_v \quad (5.1)$$

Tale valore di coppia risulta essere determinato a partire dai valori assunti dalla velocità del volano e dalla coppia all'albero di trasmissione noti dalle misure fornite sulle prove a banco.

L'equazione (5.1) durante le simulazioni è stata calcolata in due modi differenti: uno utilizzando i valori filtrati dai dati forniti (si veda il listato matlab `UniMoData1filtered.m` riportato in Appendice B) e l'altro generando il profilo medio di velocità e di coppia mediante **Lookup Table**.

Il listato matlab che esegue il calcolo dai dati sperimentali è sotto riportato

```

Torque_in = Filtered.PTOTorque + Jv*Filtered.dEngineSpeed
+ Filtered.EngineSpeed*rpm*bv;

```

Per il calcolo della velocità angolare nel file in cui si esegue il filtraggio (`UniMoData1filtered.m`) si utilizza la funzione `deriva.m` riportata in Appendice B;

la parte del programma che chiama la funzione e salva la velocità derivata è sotto riportata.

```
[Filtered.dEngineSpeed,f]=deriva(Filtered.Time,Filtered.EngineSpeed*rpm);
Filtered.dEngineSpeed=Filtered.dEngineSpeed';
```

La velocità del volano viene fornita in giri al minuto è necessario quindi convertirla in radianti al secondo prima di derivarla e di usarla per il calcolo della coppia in ingresso. Ricordando la relazione che lega le due unità di misura

$$rpm = \frac{giri}{min} = \frac{2\pi}{60} \frac{rad}{s}$$

e definendo la variabile  $rpm$  come  $rpm = \frac{2\pi}{60} = 0.10472$  è possibile convertire la velocità angolare del volano semplicemente moltiplicandola per  $rpm$ . Analogamente se si volesse convertire in giri al minuto una velocità angolare espressa in radianti al secondo basterebbe dividere tale velocità per la costante  $rpm$ .

Utilizzando invece le **Lookup Table** lo schema Simulink impiegato in tale calcolo è riportato in Fig. 5.2; tale schema è raggruppato in un subsystem nello schema principale (**UniMoData1sim2mdl**) riportato in Fig. 5.7.

Per selezionare quale dei due modi utilizzare per il calcolo della coppia nel-

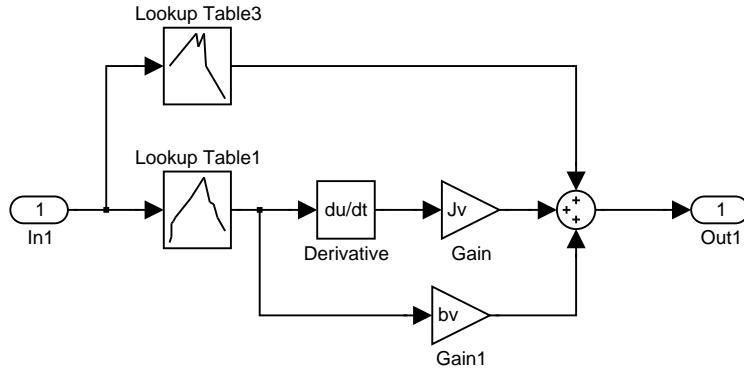


Figura 5.2: Schema Simulink per il calcolo della coppia media da applicare in ingresso al sistema (**UniMoData1sim2mdl.mdl**).

le simulazioni viene utilizzo uno **switch**; durante il salvataggio dei risultati ottenuti una variabile numerica discrimina il metodo di calcolo.

### 5.1.2 Calcolo delle armoniche

L'ampiezza delle armoniche varia al variare della velocità angolare del volano e il loro valore è stato ricavato a partire dal grafico rappresentato in Fig. 5.3; le ampiezze  $A_1$  (rappresentata in rosso) e  $A_2$  (rappresentata in blu) vengono calcolate nello schema Simulink di Fig. 5.7 mediante due **Lookup Table**.

Per diminuire l'irregolarità del motore (vedi la sezione 1.2) ad ogni giro si hanno due picchi di coppia dovuti allo scoppio di due cilindri come emerge

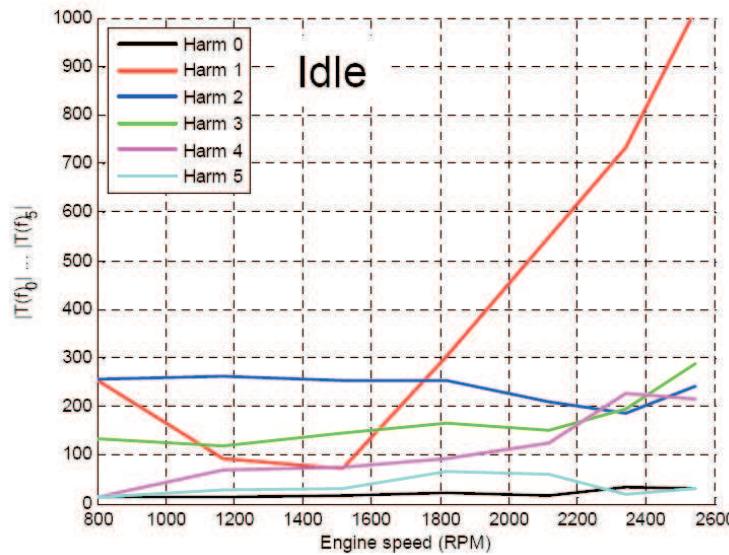


Figura 5.3: Ampiezza delle diverse armoniche in funzione della velocità angolare del volano con il sistema fisico a vuoto.

anche dalla Fig. 5.4; il periodo dell’oscillazione di coppia risulta quindi essere la metà rispetto al periodo del volano del volano:

$$T_\tau = \frac{T_v}{2} \quad \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\omega_v}$$

conseguentemente la pulsazione dell’oscillazione di coppia risulta essere doppia rispetto alla velocità angolare del volano:

$$\omega = 2 \omega_v$$

Le pulsazioni delle varie armoniche sono quindi determinate a partire dalla velocità angolare del volano: la pulsazione della prima armonica sarà due volte quella del volano, mentre la pulsazione della seconda armonica, che è doppia rispetto alla prima, sarà quattro volte quella del volano.

Per quanto riguarda le fasi delle varie armoniche si possono sfruttare le conoscenze acquisite dall’analisi spettrale eseguita nella sezione 4.4. Mediante l’utilizzo di due **Lookup Table** è infatti possibile riprodurre in modo approssimato l’andamento delle fasi al variare della velocità angolare del motore. È da notare come questi andamenti sono stati utilizzati con la consapevolezza che le fasi delle varie armoniche sul segnale di coppia applicato in ingresso, potrebbero differire dall’andamento ottenuto mediante FFT in quanto l’analisi spettrale è stata eseguita sul segnale di coppia all’albero di trasmissione che differisce da quello in ingresso.

La coppia  $\tau$  applicata in ingresso risulta quindi essere:

$$\tau_{in} = \tau_m + A_1 \sin(2 \omega_v t + \varphi_1) + A_2 \sin(4 \omega_v t + \varphi_2) \quad (5.2)$$

Molti dei parametri del segnale generato dipendono dalla velocità angolare del volano e, per evitare errori simulativi, bisogna eliminare eventuali oscillazioni;

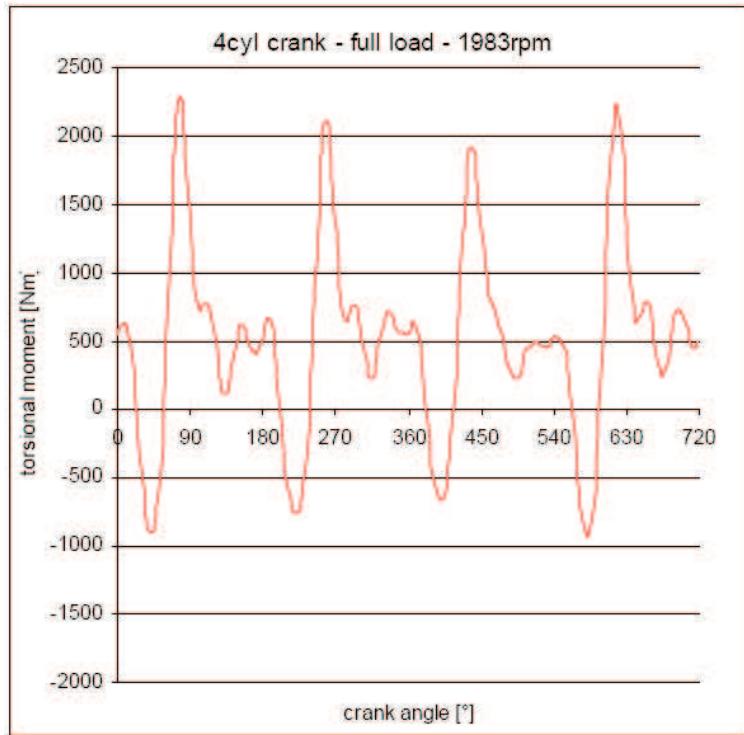


Figura 5.4: Andamento della coppia erogata dal motore ad un determinato numero di giri del volano

per questo motivo nel feed-back viene introdotto un filtro del terzo ordine ( $\frac{1}{(1+\tau s)^3}$ ) dove il  $\tau$  scelto ( $\tau = 0.5\text{sec}$ ) soddisfa la disequazione  $\frac{1}{\tau} \ll \frac{2\pi}{T}$  in cui  $T$  è il periodo delle oscillazioni.

La parte schema Simulink (`UniMoData1sim2mdl.mdl`) che realizza la coppia in ingresso espressa nell'equazione (5.2) mediante il feed-back sulla velocità del volano è riportato in Fig. 5.5.

### 5.1.3 Problematiche relative al feed-back

La retroazione introdotta per generare la coppia da applicare in ingresso sposta i poli sul piano complesso. Il modello del sistema fisico studiato teoricamente avrà quindi un comportamento dinamico differente da quello simulato mediante Simulink proprio a causa del feed-back. Per evidenziare questo fenomeno vengono riportati in Fig. 5.6 i diagrammi di Bode del modello ridotto a due ruote dentate dove la funzione di trasferimento è stata calcolata tra la coppia in ingresso e la coppia misurata all'albero di trasmissione senza feed-back (riportata anche in Fig. 2.10) e retrozionando il sistema con un guadagno elevato per minimizzare l'errore a regime; inoltre viene riportato il diagramma di Bode della funzione di trasferimento calcolata fra la coppia in ingresso e la velocità angolare del volano (si veda la legenda della Fig. 5.6 per discriminare fra i vari diagrammi). Introducendo la retroazione si aggiunge alla funzione di trasferimento un guadagno statico molto basso; questo fa sì che nonostante si verifichi il fenomeno della risonanza il segnale di coppia non venga amplifica-

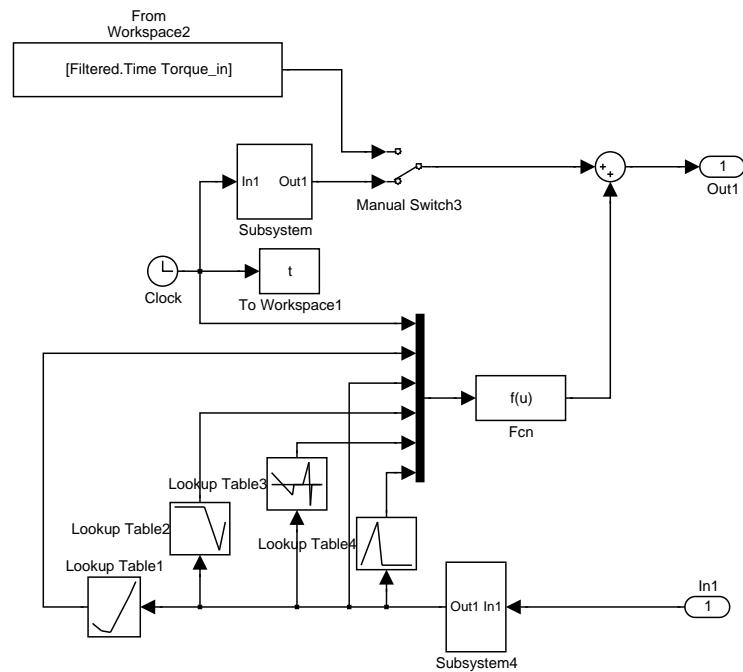


Figura 5.5: Schema Simulink per il calcolo della coppia da applicare in ingresso (UniMoData1sim2mdl.mdl).

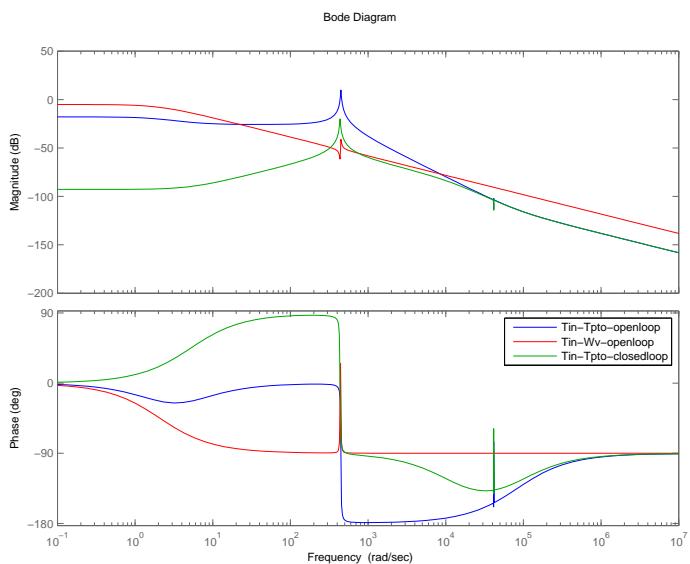


Figura 5.6: Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del sistema ridotto a sole due ruote dentate.

to. Un aspetto positivo sta nel fatto che le pulsazioni di risonanza rimangono praticamente inalterate nel passare da un sistema all'altro.

## 5.2 Simulazioni

Per lanciare le simulazioni è stato utilizzato il codice matlab **PicchiSimulazioni2.m** riportato in Appendice B e lo schema Simulink riportato in Fig. 5.7. L'idea alla base del programma è quella di ottimizzare la ricerca dei parametri incogniti per riprodurre il fenomeno riportato in Fig. 4.2 permettendo di eseguire più prove in catena in una sola simulazione. I parametri utilizzati in ogni prova vengono riportati nella legenda di ogni grafico inoltre nella Tab. 5.1 vengono riportati tutti i valori utilizzati con le relative unità di misura e il riferimento alla figura. Nel titolo vengono riportate le variabili **Sim**, **Prova** e **Con**; le

Fig.	$J_v$ [ $Kg\ m^2$ ]	$J_1$ [ $Kg\ m^2$ ]	$b_t$ [ $\frac{Nm}{rad}$ ]	$g_1$ [mm]	$\gamma$ [adm]	$K$ [ $\frac{N}{mm}$ ]	$J_e$ [ $Kg\ m^2$ ]
5.8	1,446	0,0124	0,01	0,04	3	5625	$J_e$
5.9	1,446	0,0124	0,01	0	3	5625	$J_e$
5.10	1,446	0,0124	0,01	$\frac{9,17}{2}$	20	320	$J_e$
5.11	1,446	0,0124	0,01	$\frac{9,17}{2}$	3	5625	0,85 $J_e$
5.12	1,446	0,0124	0,01	$\frac{9,17}{2}$	5	320	0,8 $J_e$
5.13	1,446	0,0124	0,1	$\frac{9,17}{2}$	5	320	0,8 $J_e$

Tabella 5.1: Dati modificati durante la simulazione

prime due indicano la simulazione e il numero della prova mentre la variabile **Con** indica in che modo è stata calcolata la coppia media applicata in ingresso: se **Con= 0** la coppia media è calcolata utilizzando i profili generati mediante Lookup Table della coppia all'albero di trasmissione e della velocità del volano se **Con= 1** la coppia media è calcolata a partire dai dati forniti filtrati mediante il file matlab **UniMoData1filtered.m** riportato in Appendice B.

I grafici della coppia misurata all'albero di trasmissione e della coppia in funzione della velocità angolare, ottenuti dalle varie simulazioni, vengono riportati nella parte sinistra se ottenuti con il calcolo della coppia media mediante il filtraggio dei dati, nella parte destra se ottenuti utilizzando le Lookup Table. Con le prime simulazioni si è cercato di capire l'influenza che ha il gioco nel fenomeno; per questo motivo si è considerato nella prima un gioco molto maggiore del range fornito (vedi Tab. 4.1) e uno nullo nella seconda. In queste prove oltre ai grafici relativi alla coppia sono stati visualizzati l'andamento della forza tangenziale scambiata tra le due ruote e lo schiacciamento fra i denti per cercare di approfondire la conoscenza del fenomeno.

Come si vede dai grafici riportati in Fig. 5.8 , durante la fase di accelerazione, quando la coppia misurata all'albero di trasmissione risulta essere maggiore di zero (l'ampiezza delle armoniche è minore del valore medio della coppia in ingresso), la forza scambiata diminuisce mantenendo comunque un valore positivo e lo schiacciamento tende al valore assunto dal gioco (0.4 mm); tutto ciò è corretto in quanto per tali condizioni operative la prima ruota dentata riceve una coppia sempre positiva che la spinge. I denti nell'ingranaggio

dovrebbero quindi rimanere sempre in contatto per avere la trasmissione del moto; in realtà nella zona lineare, dove le ruote entrano in contatto, si forma un sistema massa-molla dove la forza elastica è descritta dall'equazione (5.3) le cui variabili sono riportate in Tab. 5.2.

$$F = c_\gamma b \delta = K \delta \quad (5.3)$$

La dinamica di un tale sistema genera dei rimbalzi fra i denti che fanno

$F[N]$	:	forza trasmessa	$c_\gamma [\frac{N}{\mu m \ mm}]$	:	rigidità
$b[mm]$	:	larghezza del dente	$\delta[\mu m]$	:	flessione del dente

Tabella 5.2: Variabili dell'equazione (5.3).

ingranare le ruote dopo un transitorio come si vede anche dal grafico sullo schiacciamento riportato in Fig. 5.8.

Quando la coppia diventa negativa (l'ampiezza delle armoniche è maggiore del valore medio della coppia in ingresso) la forza scambiata aumenta assumendo valori anche negativi e lo schiacciamento inizia a oscillare fra il valore positivo e quello negativo del gioco( $[-0.4 \ mm : 0.4 \ mm]$ ). In questa situazione alla prima ruota dentata viene continuamente invertito il moto per cui il dente si stacca da quello con cui era in contatto e finisce per rimbalzare contro quello opposto. Quando i denti risultano separati la forza scambiata assume un valore nullo e solo la prima ruota viene caricata dalla coppia applicata all'albero; al momento dell'urto le due ruote si devono portare alla stessa velocità ed è qui che entrano in gioco le rigidità. Il fenomeno non lineare risulterà più pronunciato in questa prova rispetto alle altre per l'elevato gioco assunto che permette al dente della prima ruota di essere maggiormente accelerato; inoltre per l'elevata rigidità assunta i denti delle ruote subiranno poche deformazioni durante gli urti di ingranamento.

Per quanto riguarda il fenomeno della risonanza la pulsazione critica calcolata mediante la formula trovata con attriti nulli nella sezione 2.3 risulta essere  $\omega_1 = 441 \frac{rad}{s}$  a cui corrisponde una velocità del volano pari a  $2110 \ rpm$  ( $\omega_v = \frac{\omega_1}{2}$ ); tale valore trovato è da considerarsi solo indicativo in quanto gli attriti spostano i poli del sistema modificando la frequenza di risonanza; in questa simulazione infatti il fenomeno si verifica intorno ai  $1900 \ rpm$  del volano. Una volta superata la pulsazione di risonanza il sistema, rispondendo in controparte (a tale pulsazione i poli complessi coniugati sfasano di  $-180^\circ$ ), si oppone alla sollecitazione in ingresso provocando una rapida diminuzione della coppia misurata all'albero di trasmissione.

Nella fase di decelerazione compaiono tre fenomeni: il primo è dovuto al profilo di velocità, il secondo è legato alla risonanza del sistema e il terzo è provocato dalla non linearità introdotta dal gioco. All'istante temporale in cui inizia la fase di decelerazione si ha infatti un rapido cambiamento della velocità angolare.

lare del volano che rallenta però solo la prima ruota dentata mentre la ruota a valle continua ad avere, per inerzia, la velocità assunta nella fase di accelerazione; iniziano quindi gli urti fra i denti delle due ruote che devono portarsi alla stessa velocità. Il comportamento differente che si evidenzia in salita rispetto alla discesa va attribuito al breve tempo con cui sono state effettuate le prove; viene infatti a cadere l'ipotesi di funzionamento in condizioni quasi statiche (l'ingresso cambia così lentamente che l'uscita assume sempre il valore che avrebbe regime se l'ingresso fosse costante) e i punti di funzionamento dipenderanno quindi dalle condizioni dinamiche in cui si trovano. Quando il gioco assume un valore nullo rimane solo il fenomeno della risonanza: questo è corretto in quanto le due ruote rimangono sempre in contatto. Tale fenomeno si verifica sempre per  $\omega_v = 2110 \text{ rpm}$  in quanto i parametri che influenzano la pulsazione di risonanza sono rimasti gli stessi della simulazione precedente. Gli andamenti assunti dalla forza e dallo schiacciamento seguono il profilo della coppia all'albero di trasmissione; questo è coerente in quanto i due parametri graficati sono legati dall'equazione (5.3). In particolare essendo il gioco nullo (le ruote rimangono sempre a contatto) l'andamento del grafico fornisce l'idea della deformazione  $\delta$  subita dai denti. Si noti come a una simulazione di questo tipo corrisponda un assurdo fisico in quanto in un ingranaggio un po' di gioco è necessario per impedire l'inceppamento dei denti in condizioni di funzionamento.

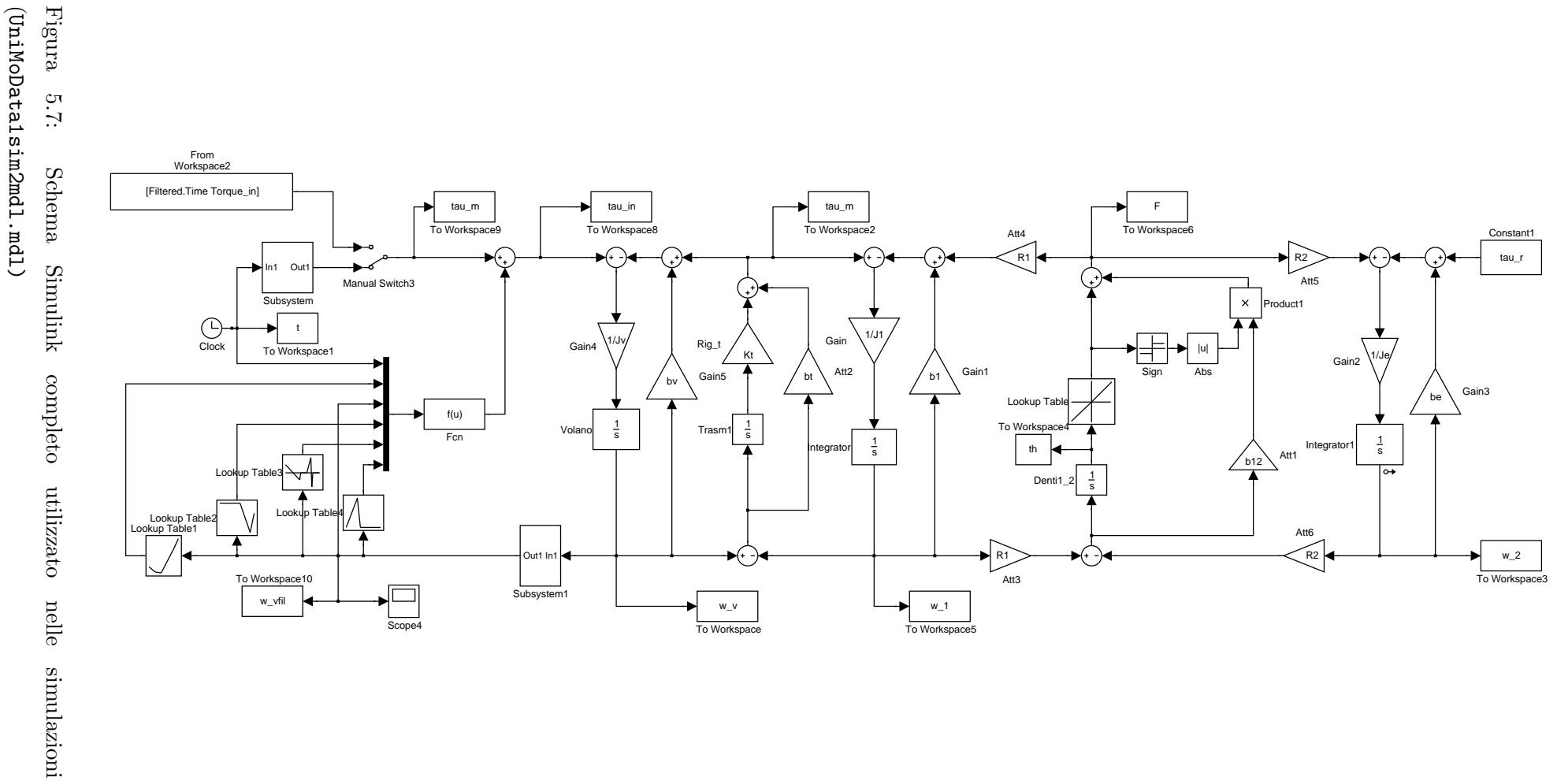
Nelle successive simulazioni vengono utilizzati per i giochi e per la rigidità dei denti i valori forniti; si cambieranno invece i parametri relativi agli attriti e alle inerzie. Per come è stata definita la non linearità di tipo soglia nel file matlab `PicchiSimulazioni2.m` i valori dei giochi forniti devono essere divisi per due prima di essere utilizzati nelle simulazioni. Come emerge dalla Fig. 5.10 assumere  $\gamma = 20$ , cioè distribuire l'attrito nel sistema maggiormente sulla ruota a valle rispetto alla ruota a monte (si veda la sezione 4.2), provoca un'accentuazione del fenomeno non lineare. Il poco attrito presente sulla prima ruota permette infatti al dente una maggiore accelerazione nella fase in cui si trova all'interno del gioco. La pulsazione di risonanza non viene modificata in quanto l'attrito nel sistema non è diminuito ma è solo stato ridistribuito.

Con queste prime prove si è riusciti a riprodurre il fenomeno non lineare causato dai giochi (anche se con una durata minore) mentre il fenomeno della risonanza si è verificato a una velocità angolare del volano ( $1900 \text{ rpm}$ ) minore di quella misurata sperimentalmente ( $2100 \text{ rpm}$ ). In queste due simulazioni viene quindi modificato il parametro relativo all'inerzia della seconda ruota in modo da vedere come questo influenzi la pulsazione di risonanza. Come ci si doveva aspettare dall'equazione (2.10) al diminuire dell'inerzia la pulsazione di risonanza aumenta  $\omega_1 = 477 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  e il fenomeno avviene a  $2000 \text{ rpm}$ .

Con questa ultima simulazione si è voluto verificare l'influenza dell'attrito presente all'albero di trasmissione. Per questo il valore di tale attrito è

stato aumentato di 10 volte rispetto alle precedenti prove. Ci si accorge che la frequenza di risonanza non viene influenzata da questo parametro mentre l'ampiezza della coppia all'albero di trasmissione diminuisce; questo ha fisicamente senso in quanto all'aumentare dell'attrito aumenta l'energia che viene dissipata.

I risultati ottenuti nelle simulazioni sono da considerarsi comunque positivi in quanto agendo sui parametri incogniti si sono riusciti a riprodurre tutti gli effetti che entrano in gioco nel sistema. L'opera di validazione però non è del tutto soddisfacente in quanto se è vero che si sono riprodotti tutti i fenomeni non si è riuscito ad ottenere un andamento uguale a quello riportato in Fig. 4.3; questo è imputabile all'elevato numero di parametri incogniti presenti di cui non è sempre stato facile determinare il legame con i fenomeni fisici.



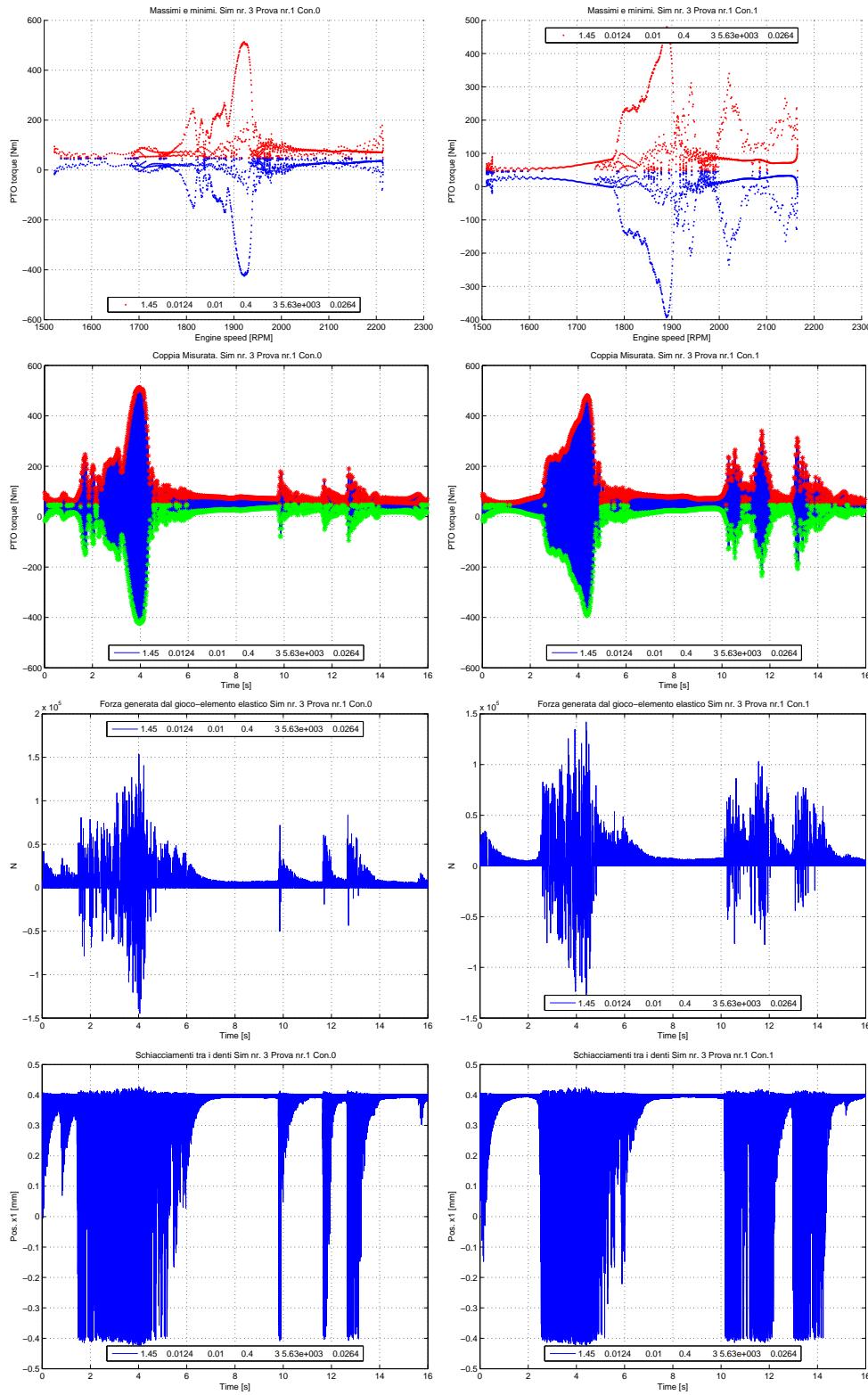


Figura 5.8: Simulazione effettuata con gioco molto elevato.

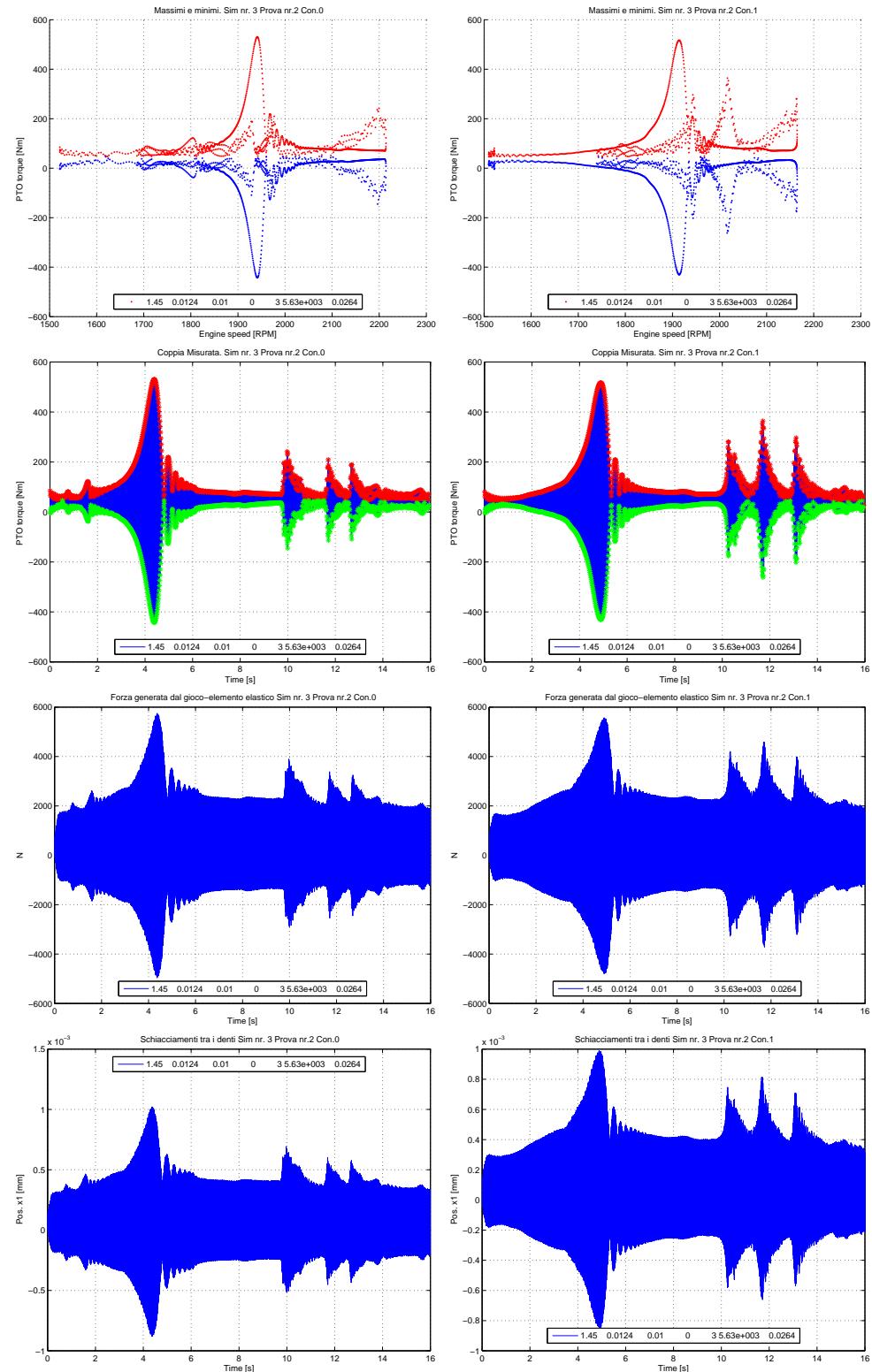


Figura 5.9: Simulazione effettuata con gioco nullo.

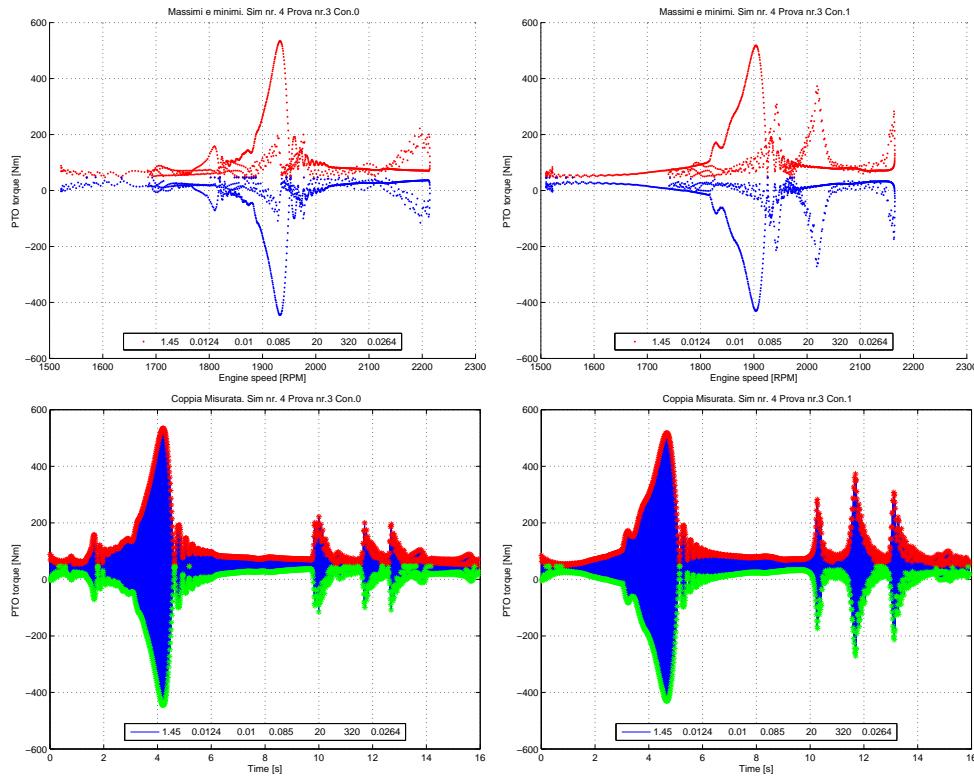


Figura 5.10: Simulazione effettuata dove l'attrito della seconda ruota è molto maggiore rispetto a quello della ruota a monte.

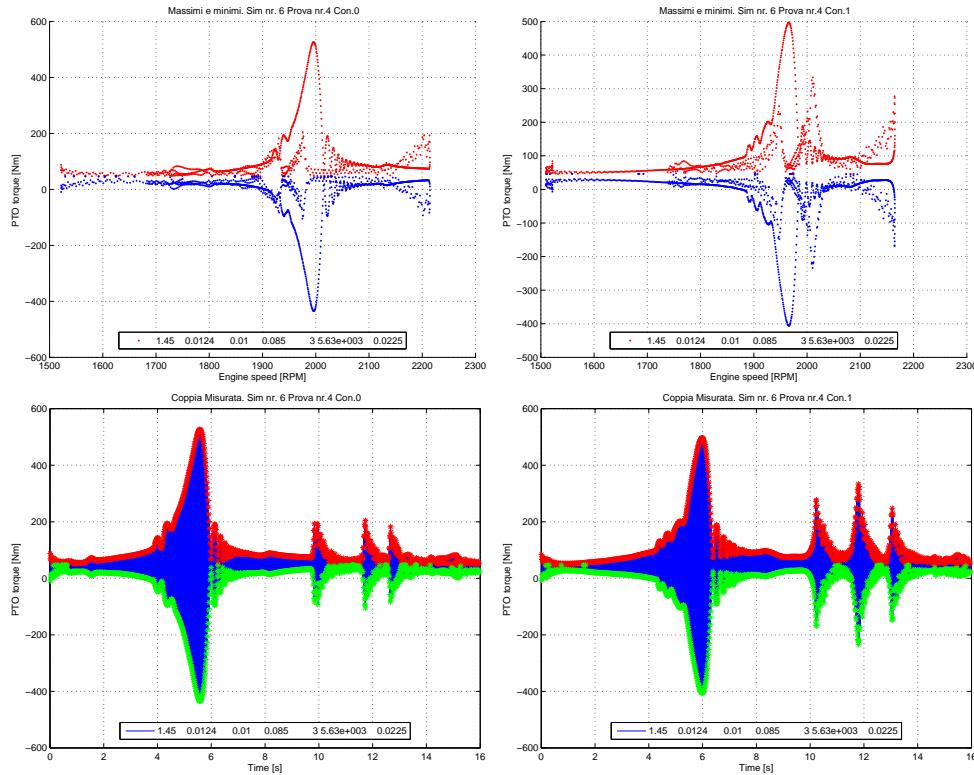


Figura 5.11: Simulazione effettuata diminuendo l'inerzia della ruota a valle.

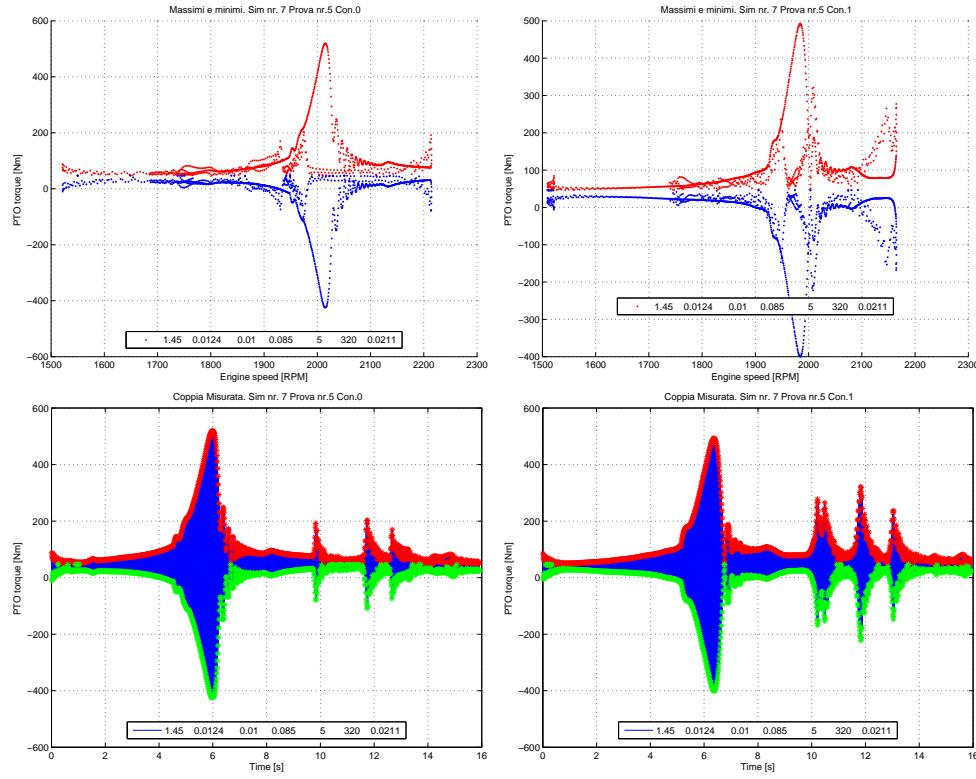


Figura 5.12: Simulazione effettuata diminuendo l'inerzia della ruota a valle.

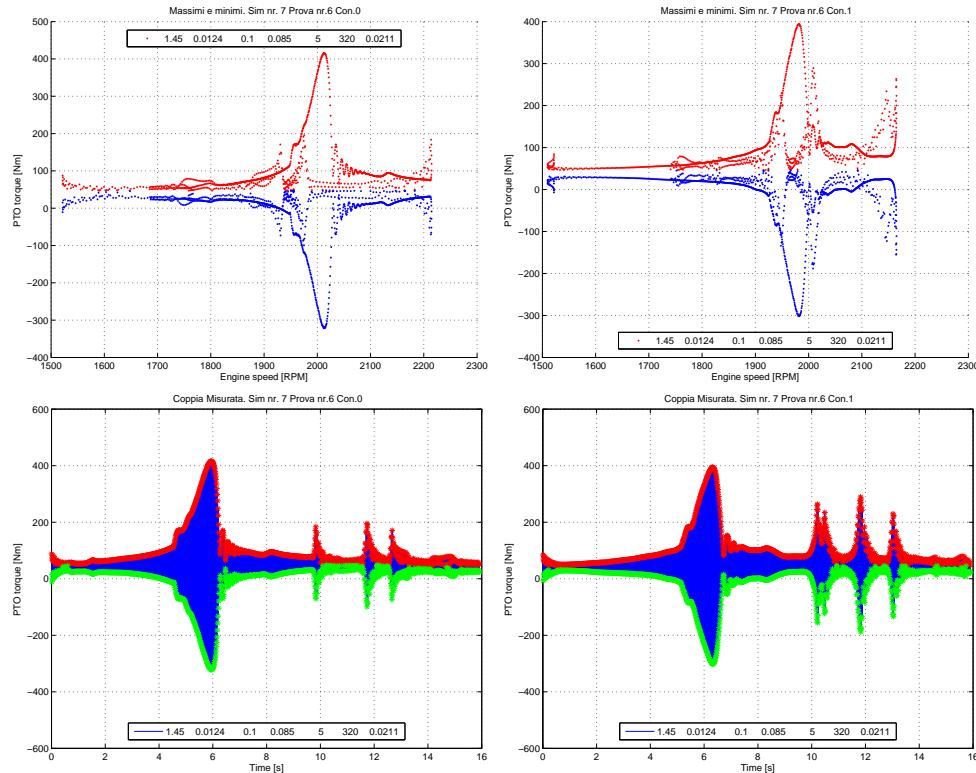


Figura 5.13: Simulazione effettuata aumentando l'attrito all'albero di trasmissione.



# Capitolo 6

## Studio di eventuali cicli limite presenti nel sistema

Per verificare se si instaura un ciclo limite nel sistema bisogna applicare il metodo della funzione descrittiva; per maggiore chiarezza prima di partire con lo studio viene riportata nella sezione (6.1) la teoria che sta dietro a questo metodo.

### 6.1 Metodo della funzione descrittiva

Il metodo della funzione descrittiva viene utilizzato per verificare l'innesto di oscillazioni autosostenute in un sistema non lineare progettato sotto l'ipotesi di linearità. Il metodo si applica ai sistemi che possono essere descritti dallo schema riportato in Fig. 6.1 e sul quale si possono fare le seguenti ipotesi:

- l'ingresso  $r$  del sistema è identicamente nullo;
- l'elemento non lineare è puramente algebrico ed è descritto da una caratteristica indipendente dalla frequenza del segnale di ingresso
- la caratteristica dell'elemento non lineare è simmetrica rispetto all'origine

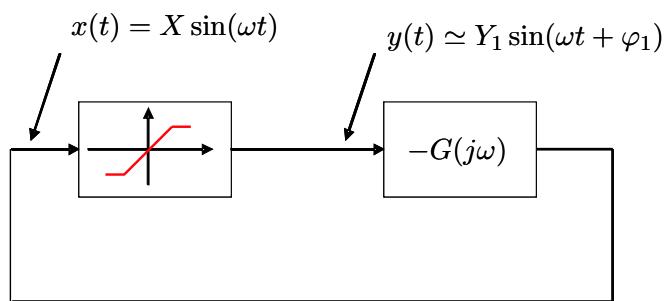


Figura 6.1: Sistema a cui si applica il metodo della funzione descrittiva.

Supponendo che il sistema sia sede di una oscillazione persistente e che all'ingresso del blocco non lineare tele oscillazione sinusoidale si  $x(t) = X \sin(\omega t)$ ;

all'uscita del blocco non lineare si ha un segnale periodico avente la stessa pulsazione  $\omega$  della sinusoide in ingresso. Tale segnale è sviluppabile in serie di Fourier e risulta essere:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

dove

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos(n\omega t) d\omega t$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin(n\omega t) d\omega t$$

Mancando il termine costante per la simmetria della non linearità si può scrivere:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

dove

$$Y_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Trascurando le armoniche di ordine superiore al primo, il segnale periodico di uscita può essere approssimato con la sola componente fondamentale  $y(t) \simeq Y_1(X) \sin(\omega t + \varphi_1(X))$ . Si definisce funzione descrittiva  $F(x)$  dell'elemento non lineare il numero complesso definito dalla relazione:

$$F(x) = \frac{Y_1(X)}{X} e^{j\varphi_1(X)} \quad (6.1)$$

Affinchè il sistema sia sede di un'oscillazione persistente deve essere soddisfatta la condizione di autosostentamento:

$$F(x)G(j\omega) = -1 \quad (6.2)$$

Questa equazione può essere risolta graficamente tracciando (sul piano complesso) i diagrammi polari delle funzioni  $G(j\omega)$  e  $-\frac{1}{F(X)}$ , il primo graduato in valori di  $\omega$  e il secondo in valori di  $X$ .

### 6.1.1 Estensione del metodo della funzione descrittiva

Quando la caratteristica non lineare non è simmetrica, l'analisi si complica notevolmente, in quanto in genere è presente all'uscita una componente continua, dipendente dall'ampiezza delle oscillazioni, la quale viene riportata in ingresso per la presenza della retroazione e pertanto influisce a sua volta sulla fondamentale della componente alternata del segnale di uscita. Per poter applicare il metodo della funzione descrittiva anche nel caso in cui la caratteristica dell'elemento non lineare non sia simmetrica rispetto all'origine, si devono definire due funzioni descrittive. Con riferimento alla Fig. 6.2, del tutto analoga alla Fig. 6.1, ma relativamente a una non linearità con caratteristica non simmetrica, si suppone che il segnale di ingresso dell'elemento non

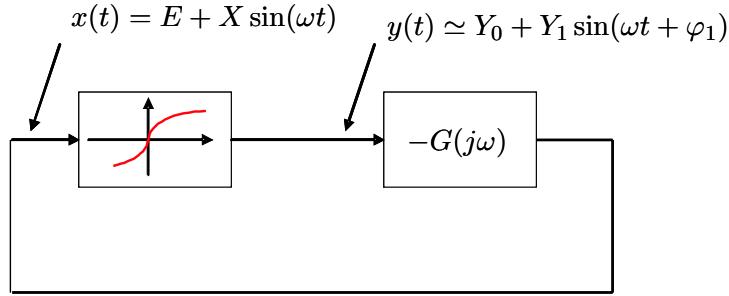


Figura 6.2: Sistema a cui si applica il metodo della funzione descrittiva.

lineare sia esprimibile nella forma  $x(t) = E + X \sin(\omega t)$  in cui  $E$  rappresenta il valore della componente continua: il segnale di uscita viene approssimato, trascurando le armoniche di ordine superiore al primo con l'espressione  $y(t) \approx Y_0(E, X) + Y_1(E, X) \sin(\omega t + \varphi_1(E, X))$ . Si possono così definire le due funzioni descrittive

$$F_0(E, X) = \frac{Y_0(E, X)}{E} \quad (6.3)$$

$$F_1(E, X) = \frac{Y_1(E, X)}{X} e^{j\varphi_1(E, X)} \quad (6.4)$$

Sia le componenti continue sia quelle alternate si devono bilanciare lungo l'anello: in luogo dell'unica equazione (6.2) si hanno ora due equazioni di autosostentamento

$$F_0(E, X)G(j0) = -1 \quad (6.5)$$

$$F_1(E, X)G(j\omega) = -1 \quad (6.6)$$

che si possono utilizzare per determinare i valori dei parametri  $E$ ,  $X$  e  $\omega$  che caratterizzano le possibili autoscillazioni. Si noti che le equazioni (6.5) e (6.6) rappresentano in effetti tre equazioni nelle tre incognite menzionate, essendo la (6.6) relativa a funzioni complesse. L'analisi si complica notevolmente rispetto ai casi in cui la caratteristica della nonlinearità è simmetrica, dato che in genere le tre equazioni si devono risolvere per tentativi. Si ricorda che nell'utilizzazione del metodo della funzione descrittiva per lo studio dei sistemi in retroazione si è finora sempre supposto che il segnale di riferimento  $r$  sia nullo. La presenza di un segnale di riferimento diverso da zero, anche se costante o lentamente variabile, influisce infatti sulle oscillazioni, in quanto equivale ad un'asimmetrizzazione della caratteristica non lineare.

## 6.2 Estensione del metodo della funzione descrittiva applicato al modello del sistema di trasmissione

Il sistema in esame è stabile quindi non è possibile l'innesto di oscillazioni autosostenute se non viene eccitato dall'esterno. A fronte di una sollecitazione costante a cui viene sommata una sinusode si viene a formare un andamento

periodico. Utilizzando come elemento ispiratore il metodo della funzione descrittiva è stato effettuato uno studio a doc sull'oscillazione periodica che si instaura nel sistema.

Il modello utilizzato durante le simulazioni e riportato in Fig. 5.7 può essere ricondotto a quello riportato in Fig. 6.3; le due funzioni di trasferimento possono essere infatti calcolate utilizzando il comando `linmod` di Matlab.  $G_1(j\omega)$  è la funzione di trasferimento, ai capi della non linearità, del sistema con ingresso nullo e dove la non linearità viene tolta (ovviamente la retroazione inserita per il calcolo della coppia da applicare in ingresso è stata tolta in quanto non fa parte del sistema fisico).  $G_2(j\omega)$  è la funzione di trasferimento calcolata dall'ingresso del sistema fino all'ingresso della non linearità e con l'uscita dell'elemento non lineare nulla (anche in questo caso la retroazione inserita per il calcolo della coppia da applicare in ingresso è stata tolta). L'equazioni (6.5) e

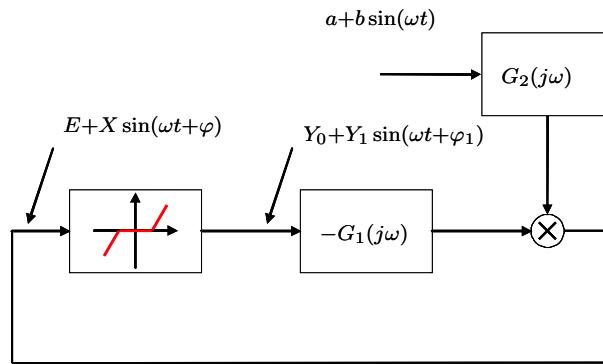


Figura 6.3: Sistema a cui si applica il metodo della funzione descrittiva.

(6.6) in questo caso non possono essere utilizzate essendo presente un segnale di eccitazione esterno; utilizzando però lo stesso procedimento che consiste nel bilanciare sia la componente alternata che quella continua lungo l'anello, le equazioni di autosostentamento risultano essere:

$$\begin{cases} a G_2(0) - Y_0(E, X) G_1(0) = E \\ b G_2(j\omega) - Y_1(E, X) G_1(j\omega) e^{j\varphi} e^{j\varphi_1(E, X)} = X e^{j\varphi} \end{cases}$$

Essendo, definite dalle equazioni (6.3) e (6.4), le due funzioni descrittive:

$$F_0(E, X) = \frac{Y_0(E, X)}{E}$$

$$F_1(E, X) = \frac{Y_1(E, X)}{X} e^{j\varphi_1(E, X)}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \frac{a}{E} G_2(0) - F_0(E, X) G_1(0) = 1 \\ \frac{b}{X} G_2(j\omega) e^{-j\varphi} - F_1(E, X) G_1(j\omega) = 1 \end{cases} \quad (6.7)$$

Si è ottenuto un sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $E$ ,  $X$  e  $\varphi$  dove sono noti i parametri relativi all'eccitazione in ingresso ( $a$ ,  $b$  e  $\omega$ ). L'analisi si complica notevolmente in quanto le equazioni vanno risolte per tentativi.

## 6.3 Calcolo della funzione descrittiva

Come già detto più volte per calcolare la funzione descrittiva ad una non linearità bisogna determinare il segnale periodico che si forma in uscita a fronte di una eccitazione nota. Tale segnale dovrà poi essere sviluppato in serie di Fourier trascurando le armoniche di ordine superiore al primo. Nel nostro caso il segnale di ingresso risulta essere  $x(t) = E + X \sin(\omega t + \varphi)$  mentre quello di uscita  $y(t) \simeq Y_0 + Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ .

### 6.3.1 Espressione analitica del segnale di uscita

Per determinare il segnale di uscita all'elemento non lineare bisogna ragionare nel modo rappresentato in Fig. 6.4.

Applicando il segnale  $x(t) = E + X \sin(\omega t + \varphi)$  si determina analiticamente il segnale periodico ragionando sull'andamento non lineare. Si presentano sei

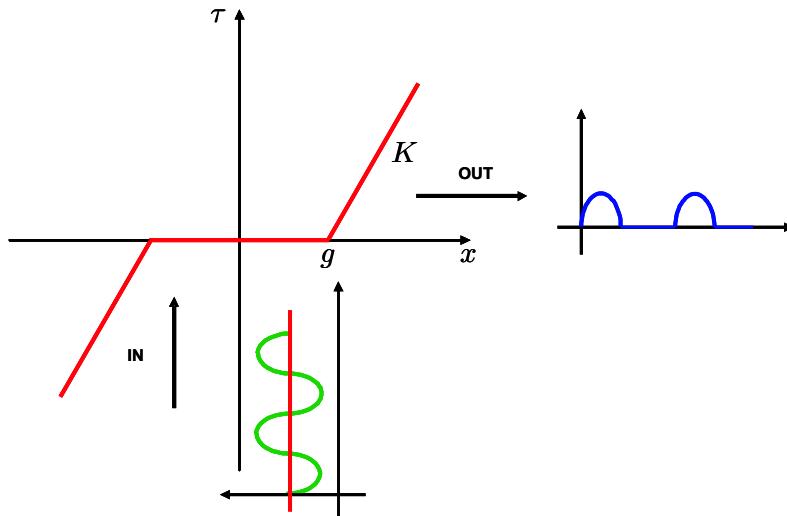


Figura 6.4: Procedimento grafico da seguire per ottenere il segnale periodico in uscita alla non linearità.

casi: il primo è quello in cui l'eccitazione in ingresso non supera il gioco, il secondo e il terzo sono due casi simili in quanto l'eccitazione supera il gioco positivo nel secondo solo una parte del segnale entra nella zona lineare nel terzo tutto il segnale rimane nella zona lineare. Il quarto e il quinto caso sono i complementari dei precedenti in quanto l'eccitazione supera il gioco negativo, l'ultimo caso è quello in cui l'eccitazione supera sia il gioco positivo che quello negativo; di seguito vengono studiati separatamente i vari casi.

Il primo caso rappresentato in Fig. 6.5 è caratterizzato dalla seguente condizione:

$$E + X \leq g \quad \wedge \quad E - X \geq -g$$

questo è il caso banale in quanto l'uscita  $y(t)$  assume sempre il valore nullo. Tutti i coefficienti della serie di Fourier saranno nulli e conseguentemente an-

che le due funzioni descrittive saranno nulle.

Il secondo caso (quando l'eccitazione supera solo il gioco positivo) rappresenta:

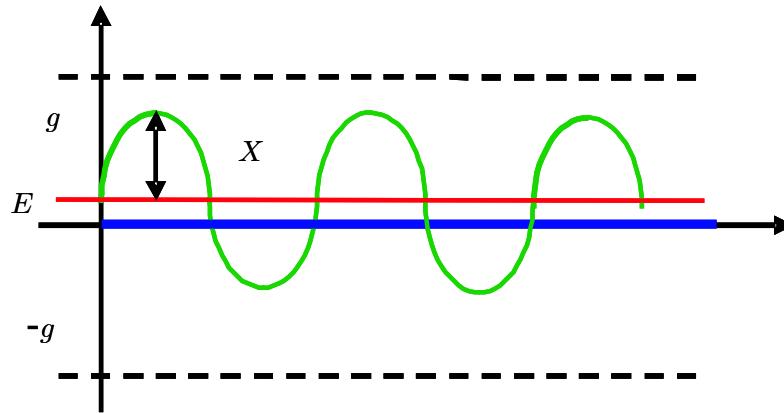


Figura 6.5: Primo caso.

tato in Fig. 6.6 è definito dalla condizione:

$$E + X > g \quad \wedge \quad E - X \geq -g \quad \wedge \quad E - X < g$$

l'uscita  $y(t)$  assume il valore nullo se il segnale rimane entro il gioco rispet-

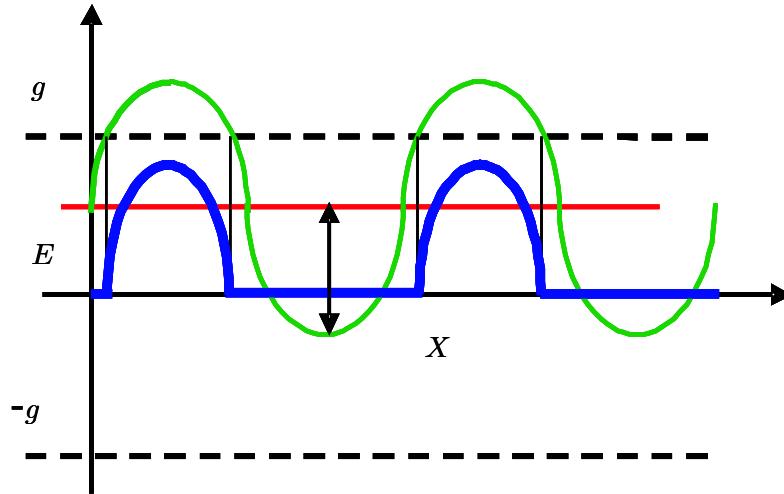


Figura 6.6: Secondo caso.

tando quindi la condizione  $E + X \sin(\omega t) - g < 0$  mentre la parte che supera il gioco viene moltiplicata per il la rigidità del dente; l'espressione analitica dell'uscita risulta essere:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \omega t < \arcsin \frac{g - E}{X} \\ K(X \sin(\omega t) - g + E) & \omega t > \arcsin \frac{g - E}{X} \end{cases}$$

Il terzo caso (quando l'eccitazione rimane sempre nella zona lineare) è definito dalla condizione:

$$E - X \geq g$$

l'uscita  $y(t)$  assume sempre un valore diverso da zero, la cui espressione analitica risulta essere:

$$y(t) = K(X \sin(\omega t) - g + E)$$

Il quarto caso (quando l'eccitazione supera solo il gioco negativo) rappresentato in Fig. 6.7 è definito dalla condizione:

$$E + X \leq g \quad \wedge \quad E - X < -g \quad \wedge \quad E + X > -g$$

l'uscita  $y(t)$  assume il valore nullo se il segnale rimane entro il gioco rispettan-

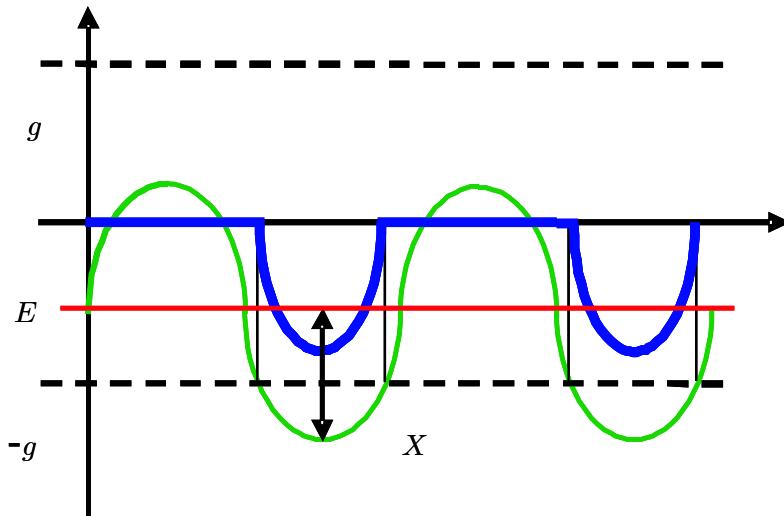


Figura 6.7: Terzo caso.

do quindi la condizione  $E + X \sin(\omega t) + g > 0$  mentre la parte che supera il gioco viene moltiplicata per la rigidità del dente; l'espressione analitica dell'uscita risulta essere:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \omega t > \arcsin \frac{-g - E}{X} \\ K(X \sin(\omega t) + g + E) & \omega t < \arcsin \frac{-g - E}{X} \end{cases}$$

Il quinto caso (quando l'eccitazione rimane sempre nella zona lineare) è definito dalla condizione:

$$E + X \leq -g$$

l'uscita  $y(t)$  assume sempre un valore diverso da zero, la cui espressione analitica risulta essere:

$$y(t) = K(X \sin(\omega t) + g + E)$$

Il sesto e ultimo caso rappresentato in Fig. 6.8 è l'insieme dei precedenti due è invece caratterizzato dalla condizione:

$$E + X > g \quad \wedge \quad E - X < -g$$

l'espressione analitica dell'uscita risulta essere:

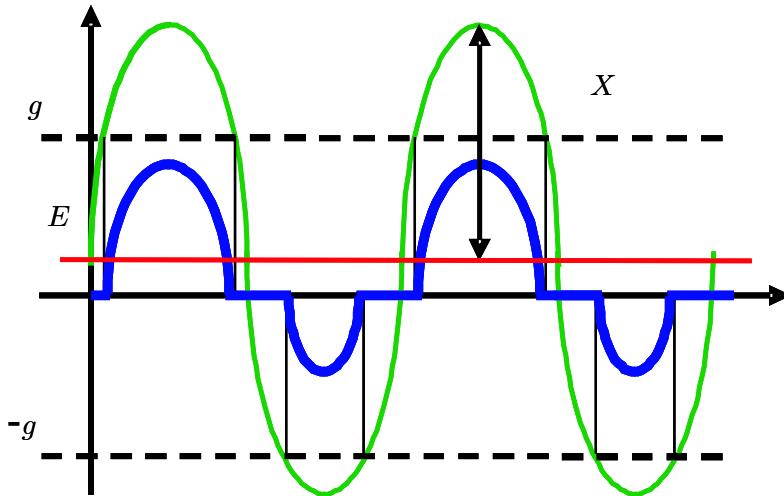


Figura 6.8: Quarto caso.

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \arcsin \frac{-g - E}{X} < \omega t < \arcsin \frac{g - E}{X} \\ K(X \sin(\omega t) + g + E) & \omega t > \arcsin \frac{-g - E}{X} \\ K(X \sin(\omega t) - g + E) & \omega t > \arcsin \frac{g - E}{X} \end{cases}$$

Si noti come le condizioni che discriminano i vari casi discendono tutte dalle condizione di esistenza dell'arcoseno ( $\arcsin(x) - 1 < x < 1$ ). Imponendo infatti tale condizione si ottiene:

$$\begin{aligned} -1 < \frac{g - E}{X} < 1 & \quad \text{risulta} \quad E + X > g \quad \wedge \quad E - X < g \\ -1 < \frac{-g - E}{X} < 1 & \quad \text{risulta} \quad E + X > -g \quad \wedge \quad E - X < -g \end{aligned}$$

### 6.3.2 Sviluppo in serie di Fourier del segnale di uscita

Bisogna adesso sviluppare in serie di Fourier il segnale  $y(t)$ :

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

dove:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos(n\omega t) \, d\omega t \quad ; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(n\omega t) \, d\omega t$$

e

$$Y_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad ; \quad \varphi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Trascurando le armoniche di ordine superiore al primo il segnale  $y(t)$  risulta essere approssimato dalla somma del valore medio con la sola componente fondamentale:

$$y(t) \simeq \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)) = Y_0 + Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

dove

$$Y_0 = \frac{a_0}{2} \quad ; \quad Y_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad ; \quad \varphi_1 = \arctan\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$$

Per determinare gli estremi di integrazione da utilizzare nel calcolo dei coefficienti della serie di Fourier conviene riassumere nella circonferenza goniometrica riportata in Fig. 6.9 gli intervalli angolari per cui il dente entra nella zona lineare della non linearità; si noti che la zona ombreggiata in verde è quella dove il dente entra nella zona lineare destra della non linearità mentre la zona ombreggiata in azzurro è quella dove il dente entra nella zona lineare sinistra.

Definendo le variabili  $\alpha$  e  $\beta$  come:

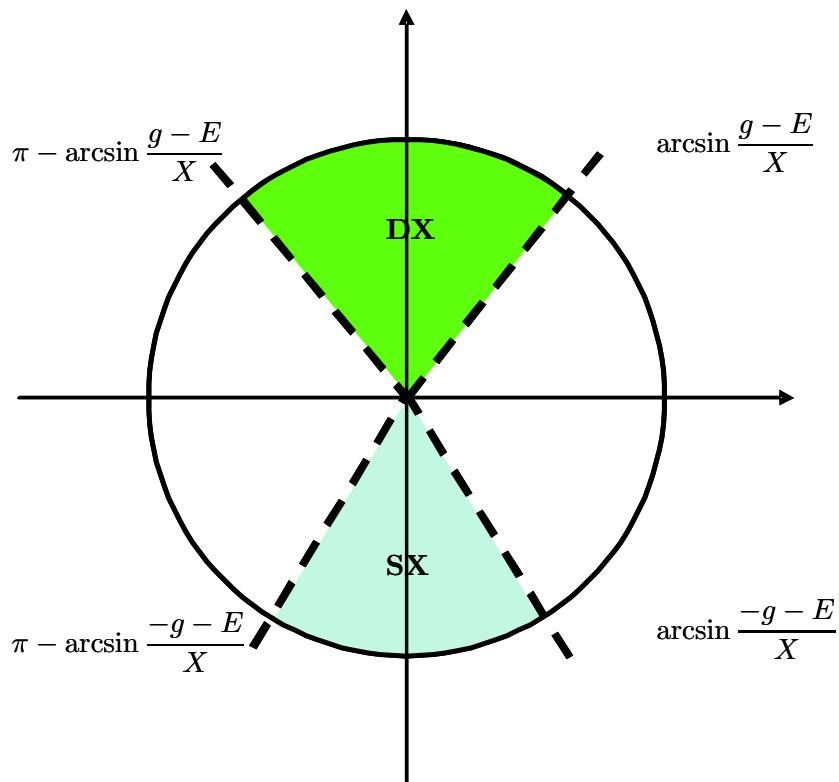


Figura 6.9: Circonferenza goniometrica in cui vengono riportati gli intervalli angolari in cui il dente si trova nella zona lineare.

$$\alpha = \arcsin \frac{g - E}{X} \quad ; \quad \beta = -\arcsin \frac{-g - E}{X}$$

Lo sviluppo in serie nel secondo caso diviene:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} K(X \sin(\omega t) - g + E) \cos(n\omega t) \, d\omega t$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} K(X \sin(\omega t) - g + E) \sin(n\omega t) \, d\omega t$$

$$a_0 = K \frac{(E - g)(\pi - 2\alpha) + 2X \cos(\alpha)}{\pi} \quad ; \quad a_1 = 0$$

$$b_1 = K \frac{4(E - g) \cos(\alpha) + X(-2\alpha + \pi + \sin(2\alpha))}{2\pi}$$

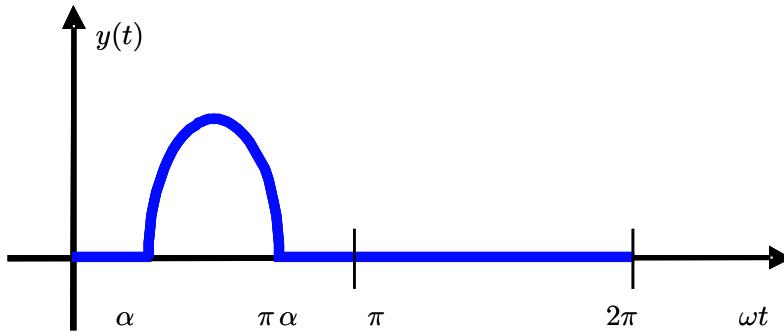


Figura 6.10: Secondo caso.

Lo sviluppo in serie nel terzo caso è banale in quanto si deve sviluppare in serie di Fourier un segnale già sinusoidale:

$$a_0 = 2K(E - g)$$

$$b_1 = KX$$

Lo sviluppo in serie nel quarto caso diviene:

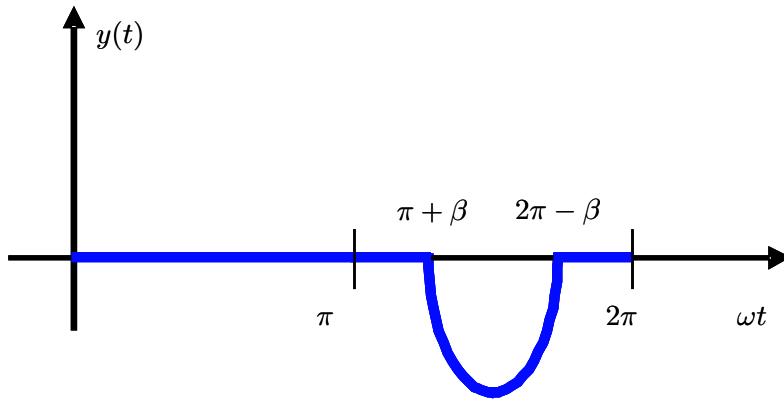


Figura 6.11: Terzo caso.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\beta}^{2\pi-\beta} K(X \sin(\omega t) + g + E) \cos(n\omega t) d\omega t$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\beta}^{2\pi-\beta} K(X \sin(\omega t) + g + E) \sin(n\omega t) d\omega t$$

$$a_0 = K \frac{(E + g)(\pi - 2\beta) - 2X \cos(\beta)}{\pi} ; \quad a_1 = 0$$

$$b_1 = K \frac{-4(E + g) \cos(\beta) + X(-2\beta + \pi + \sin(2\beta))}{2\pi}$$

Lo sviluppo in serie nel quinto caso è banale in quanto si deve sviluppare in serie di Fourier un segnale già sinusoidale:

$$a_0 = 2K(E + g)$$

$$b_1 = KX$$

Lo sviluppo in serie nel sesto e ultimo caso diviene:

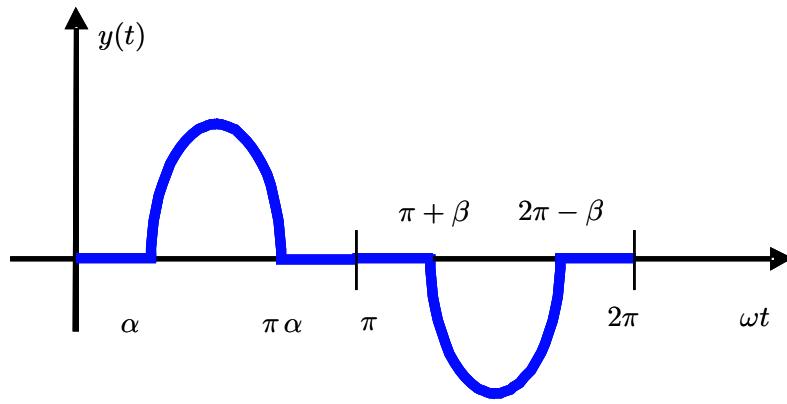


Figura 6.12: Quarto caso.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} K(X \sin(\omega t) - g + E) \cos(n\omega t) d\omega t + \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\beta}^{2\pi-\beta} K(X \sin(\omega t) + g + E) \cos(n\omega t) d\omega t \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} K(X \sin(\omega t) - g + E) \sin(n\omega t) d\omega t + \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\beta}^{2\pi-\beta} K(X \sin(\omega t) + g + E) \sin(n\omega t) d\omega t
 \end{aligned}$$

$$a_0 = -2K \frac{\alpha(E-g) + \beta(E+g) - E\pi - X \cos(\alpha) + X \cos(\beta)}{\pi} ; \quad a_1 = 0$$

$$b_1 = K \frac{4(E-g) \cos(\alpha) - 4(E+g) \cos(\beta) + X(-2(\alpha+\beta-\pi) + \sin(2\beta) + \sin(2\alpha))}{2\pi}$$

Per verificare la bontà dei risultati analitici ottenuti si sono graficate, per i vari casi, alcune  $y(t)$  sviluppate tramite i coefficienti della serie di Fourier precedentemente calcolati (utilizzando il listato Matlab `Sviluppoyth.m` riportato in Appendice B).

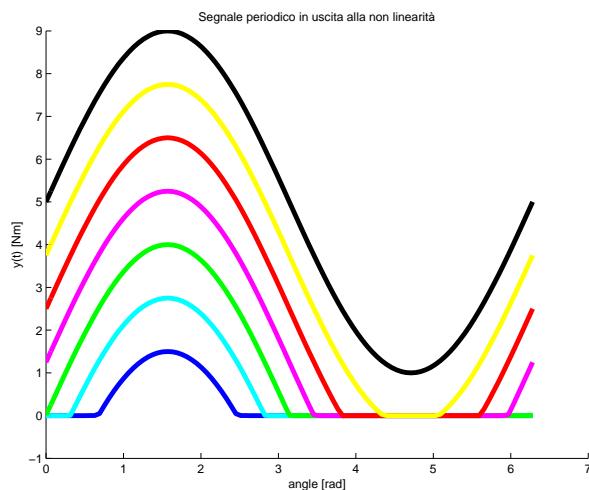


Figura 6.13: Secondo e terzo caso (eccitazione in ingresso supera il gioco a destra).

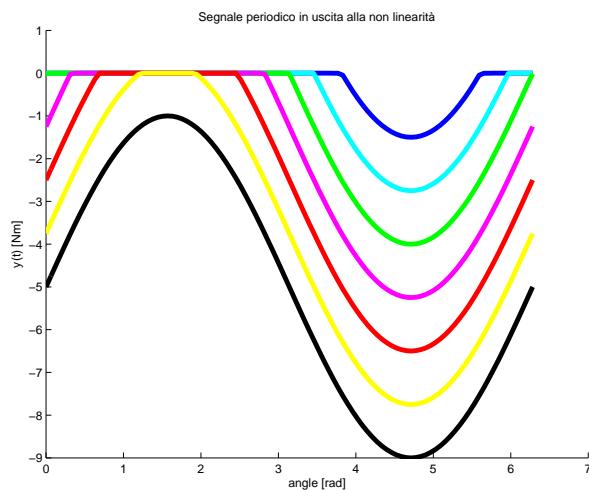


Figura 6.14: Quarto e quinto caso (eccitazione in ingresso supera il gioco a sinistra).

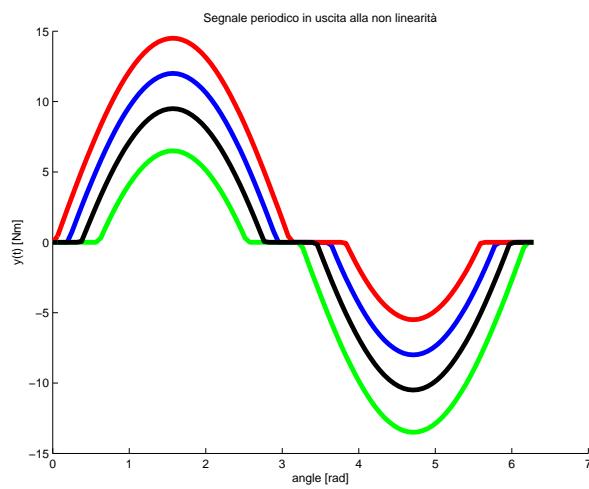


Figura 6.15: Sesto caso (eccitazione in ingresso supera il gioco a destra e a sinistra).

Ricordando che:

$$Y_0 = \frac{a_0}{2} \quad ; \quad Y_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad ; \quad \varphi_1 = \arctan\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$$

risulta:

$$Y_0 = \frac{a_0}{2} \quad ; \quad Y_1 = b_1 \quad ; \quad \varphi_1 = 0$$

Dalle definizioni di funzioni descrittive fornite dall'equazioni (6.3) e (6.4), si ottiene:

$$\begin{aligned} F_0(E, X) &= \frac{Y_0(E, X)}{E} = \frac{a_0}{2E} \\ F_1(E, X) &= \frac{Y_1(E, X)}{X} e^{j\varphi_1(E, X)} = \frac{b_1}{X} \end{aligned}$$

Per il secondo caso risulta:

$$F_0(E, X) = K \frac{(E - g)(\pi - 2\alpha) + 2X \cos(\alpha)}{2\pi E}$$

$$F_1(E, X) = K \frac{4(E - g) \cos(\alpha) + X(-2\alpha + \pi + \sin(2\alpha))}{2\pi X}$$

Per il terzo caso risulta:

$$F_0(E, X) = \frac{K(E - g)}{E}$$

$$F_1(E, X) = K$$

Per il quarto caso risulta:

$$F_0(E, X) = K \frac{(E + g)(\pi - 2\beta) - 2X \cos(\beta)}{2\pi E}$$

$$F_1(E, X) = K \frac{-4(E + g) \cos(\beta) + X(-2\beta + \pi + \sin(2\beta))}{2\pi X}$$

Per il quinto caso risulta:

$$F_0(E, X) = \frac{K(E + g)}{E}$$

$$F_1(E, X) = K$$

Per il sesto caso risulta:

$$F_0(E, X) = -2K \frac{\alpha(E - g) + \beta(E + g) - E\pi - X \cos(\alpha) + X \cos(\beta)}{2\pi E}$$

$$\begin{aligned} F_1(E, X) &= K \frac{4(E - g) \cos(\alpha) - 4(E + g) \cos(\beta)}{2\pi X} + \\ &+ K \frac{X(-2(\alpha + \beta - \pi) + \sin(2\beta) + \sin(2\alpha))}{2\pi X} \end{aligned}$$

Utilizzando i listati Matlab `funzionedesc0.m` e `funzionedesc1.m`, riportati in Appendice B, si sono riuscite a graficare le due funzioni descrittive al variare dei parametri  $E$  e  $X$ . In Fig. 6.16 viene riportato l'andamento della  $F_0(E, X)$  in funzione di  $E$  e al variare di  $X$  mentre in Fig. 6.17 viene riportato l'andamento della  $F_1(E, X)$  in funzione di  $X$  e al variare di  $E$ .

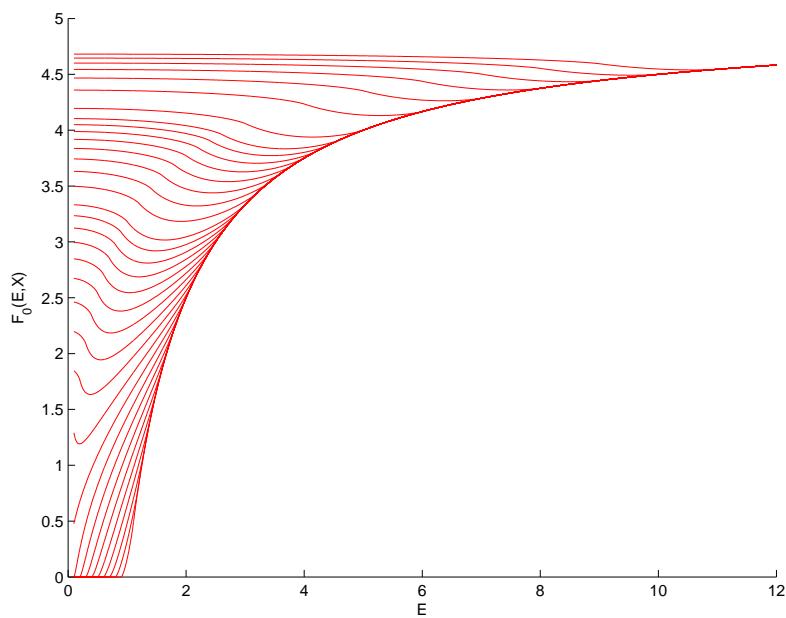


Figura 6.16: Funzione descrittiva  $F_0(E, X)$  relativa alla non linearità di tipo soglia; l'andamento viene riportato in funzione di  $E$  e al variare di  $X$ .

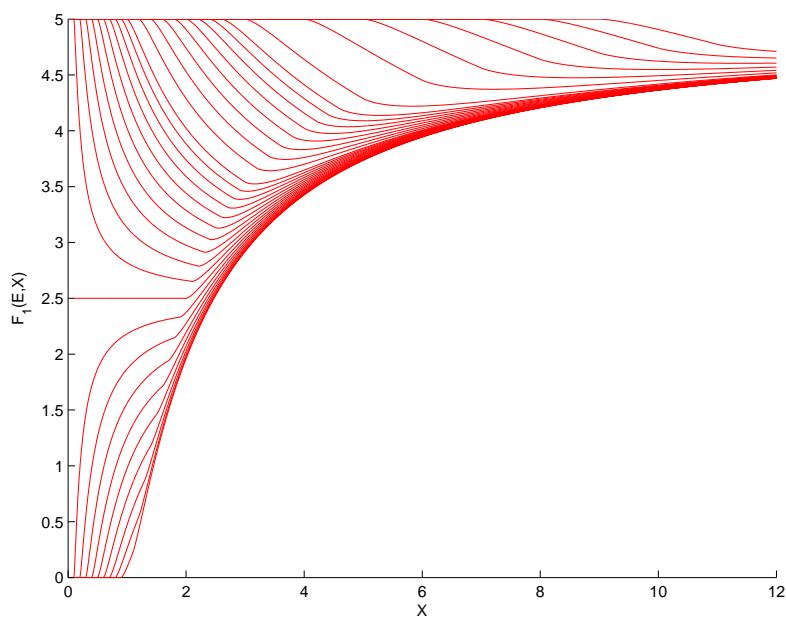


Figura 6.17: Funzione descrittiva  $F_1(E, X)$  relativa alla non linearità di tipo soglia; l'andamento viene riportato in funzione di  $X$  e al variare di  $E$ .

## 6.4 Soluzione delle equazioni di autosostentamento

Una volta determinato l'andamento delle tre funzioni descrittive si deve risolvere il sistema nelle tre incognite  $E$ ,  $X$  e  $\varphi$  dove sono noti i parametri relativi all'eccitazione in ingresso ( $a$ ,  $b$  e  $\omega$ ).

$$\begin{cases} \frac{a}{E}G_2(0) - F_0(E, X)G_1(0) = 1 \\ \frac{b}{X}G_2(j\omega)e^{-j\varphi} - F_1(E, X)G_1(j\omega) = 1 \end{cases} \quad (6.8)$$

Bisogna implementare un algoritmo che, tramite un procedimento iterativo, risolvi tale sistema. Le funzioni di trasferimento però presentano entrambe un polo nell'origine e quanto prima della non linearità è presente un integratore (si veda la Fig. 5.7) che permette di ottenere la posizione relativa dei denti conoscendo la velocità ( $x(t) = \int x'(t)dx$  dove  $x'(t) = \omega_1 R_1 - \omega_2 R_2$ ). Questo porta i guadagni statici nella prima equazione ad infinito per tale motivo si è pensato di fare riferimento al modello riportato in Fig. 6.18 dove l'integratore viene tirato fuori dalle funzioni di trasferimento. Il sistema formato dalle

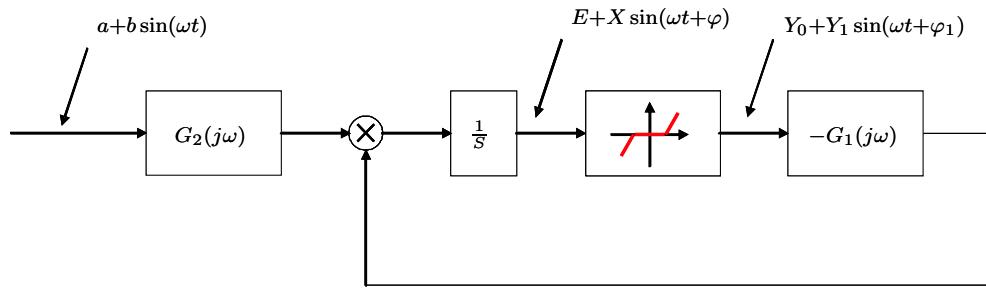


Figura 6.18: Sistema equivalente a quello di Fig. 6.3 a cui si applica il metodo della funzione descrittiva.

tre equazioni di autosostentamento viene quindi modificato per essere congruo al modello utilizzato. Moltiplicando le tre equazioni per  $s$  si ottiene il sistema (6.9) che bilancia sia la componente alternata che quella continua lungo l'anello del modello riportato in Fig. 6.18.

$$\begin{cases} \frac{a}{E}G_2(0) - F_0(E, X)G_1(0) = 0 \\ b G_2(j\omega)e^{-j\varphi} - XF_1(E, X)G_1(j\omega) - Xj\omega = 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

Definendo il funzionale  $F$  come:

$$F(X, E, \varphi) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^2$$

in cui ogni  $\varepsilon_i$  è una delle equazioni del sistema egualata a zero e rappresenta l'errore commesso (inserendo nel sistema valori che non sono soluzioni le equazioni assumono valori diversi da zero); la soluzione del sistema viene determinata trovando il minimo del funzionale utilizzando il comando `fminsearch` di Matlab. In pratica partendo da una condizione iniziale sulle incognite del

sistema ( $E$ ,  $X$  e  $\varphi$ ) si determina tramite un procedimento iterativo di determinare i valori del valore medio  $E$ , dell'ampiezza  $X$  e della fase  $\varphi$ , del segnale periodico che si instaura nel sistema, in modo da minimizzare l'errore commesso. I listati che fanno riferimento ai file Matlab `FindZeroIntFunz.m` e `FindZeroInt.m` vengono riportati in Appendice B.

Bisogna quindi trovare delle condizioni iniziali verosimili da cui fare partire l'algoritmo; per quanto riguarda il valore medio  $E$  si suppone di applicare in ingresso al sistema di Fig. 6.18 la sola componente continua  $a$ . In questo caso è possibile determinare la condizione iniziale tramite il calcolo del punto di lavoro che risulta essere determinato dall'intersezione della non linearità con la retta di carico (calcolata per  $s = 0$ ):

$$x = \frac{1}{s} [aG_2(s) - G_1(s)y]$$

da cui si ricava  $y$ :

$$y = \frac{aG_2(0)}{G_1(0)}$$

Il procedimento grafico per determinare il punto di equilibrio è riportato in Fig. 6.19. Essendo  $y = K(E - g)$  dall'equazione sopra si ricava il valore iniziale

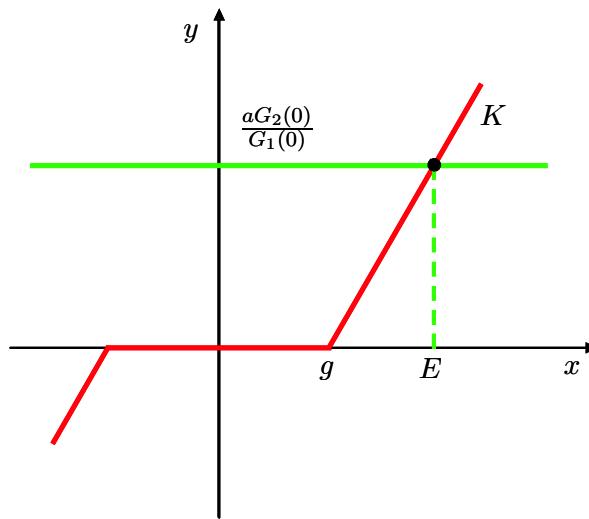


Figura 6.19: Procedimento grafico da seguire per ottenere il punto di lavoro.

da dare al valor medio che risulta essere:

$$E = g + \frac{aG_2(0)}{KG_1(0)}$$

Per quanto riguarda l'ampiezza e la fase dell'eccitazione sinusoidale si linearizza il sistema e si calcola la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita dell'integratore applicando la formula di Mason:

$$G_0(s) = \frac{\frac{G_2(s)}{s}}{1 + K \frac{G_1(s)}{s}} = \frac{G_2(s)}{s + KG_1(s)}$$

l'ampiezza e la fase risultano essere determinate a partire dal modulo e dalla fase del numero complesso che si ottiene moltiplicando l'ampiezza  $b$  dell'ecci-

tazione sinusoidale con la funzione di trasferimento appena calcolata:

$$X = |bG_0(j\omega)|$$

$$\varphi = \angle bG_0(j\omega)$$

Eseguendo varie volte questo algoritmo al variare di  $a$ ,  $b$ ,  $\omega$  si sono determinati i parametri  $E$ ,  $X$ ,  $\varphi$  del segnale periodico che si instaura nel sistema. Momentaneamente è stata eseguita solo la trattazione teorica in quanto i parametri di ingresso risultano essere slegati dai dati reali; bisognerà quindi inserire i valori reali e caricare le funzioni di trasferimento **SYS1** e **SYS2**, calcolate nel listato **cyclilimite.m**; ricordando le equazioni ( 5.1) e ( 5.2) relative alla coppia in ingresso:

$$\tau_{in} = \tau_m + A_1 \sin(2 \omega_v t + \varphi_1) + A_2 \sin(4 \omega_v t + \varphi_2)$$

è evidente che i parametri relativi al segnale in ingresso al sistema risultano:

$$a = \tau_m = \tau_{PTO} + b_v \omega_v + \dot{\omega}_v J_v$$

$$b = A_1$$

Per un ulteriore prova della bontà del modello si potrà simulare mediante lo schema Simulink riportato in Fig. 6.20 lo schema utilizzato nello studio analitico (riportato in Fig. 6.18).

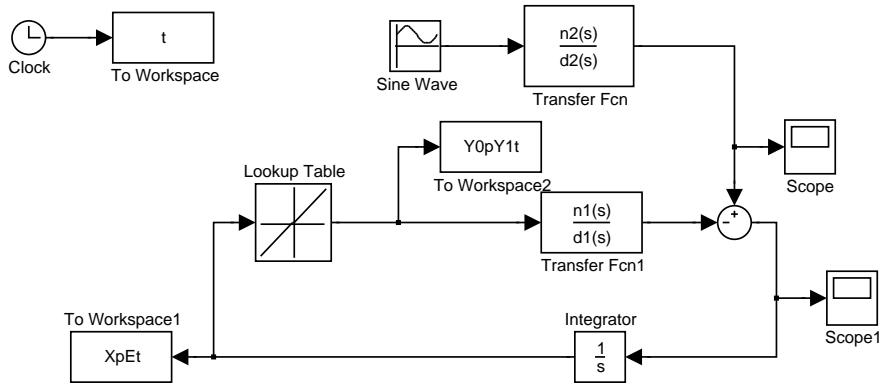


Figura 6.20: Schema Simulink per lo studio delle oscillazioni presenti nel sistema (**FindZeroIntmdl.mdl**) .



# Capitolo 7

## Conclusioni

Giunti alla conclusione della trattazione possiamo fare una panoramica di ciò che è stato fatto e dei suoi sviluppi futuri. Il lavoro di ricerca svolto e presentato in questa tesi aveva come obiettivo la realizzazione di un modello e la simulazione degli effetti dinamici causati dalla non linearità di tipo soglia introdotta dai giochi in un sistema di trasmissione a ruote dentate. Durante lo svolgimento della tesi, alcuni problemi non hanno favorito la completa comprensione del fenomeno che risulta essere provocato dalla simultanea azione della risonanza e della non linearità introdotta dai giochi fra i denti.

Lo studio teorico effettuato sugli urti alla testa dei denti, sebbene corretto da un punto di vista energetico, non ha portato ai risultati sperati in quanto non è stato possibile creare un blocco ingranaggio che permetesse di ottenere il modello del sistema componendo questi **Subsystem** visto che ogni ruota dentata risultava influenzata sia dalla ruota a monte che da quella a valle.

L'analisi dei dati sperimentali ha richiesto molto tempo; creare una funzione che selezionasse i picchi su un segnale che presentava una moltitudine di massimi e minimi non è stato semplice. Va però notato che tale funzione, basandosi su un algoritmo semplice e ottimizzato al massimo, funziona su qualsiasi segnale e potrà quindi essere utilizzata anche in futuro.

Nei dati forniti la coppia di ingresso non è stata data e per ottenerla, partendo dalla coppia all'albero di trasmissione e dalla velocità del volano, si è retroazionato il sistema. Le simulazioni quindi sono state effettuate su un modello differente dal sistema fisico in quanto la retroazione sposta i poli del sistema sul piano complesso.

Si è in fine scoperto che le prove a banco sono state effettuate in un tempo breve; viene quindi a cadere l'ipotesi di funzionamento in condizioni quasi statiche del sistema. Questo spiega il diverso comportamento che presenta il modello fra la fase accelerazione e quella di decelerazione.

I risultati ottenuti nelle simulazioni sono da considerarsi comunque positivi in quanto agendo sui parametri incogniti si sono riusciti a riprodurre tutti gli effetti che entrano in gioco. L'opera di validazione però non è del tutto

soddisfacente in quanto se è vero che si sono riprodotti tutti i fenomeni non si è riuscito ad ottenere un andamento uguale a quello riportato in Fig. 4.3; questo è imputabile all'elevato numero di parametri incogniti presenti di cui non è sempre stato facile determinare il legame con i fenomeni fisici.

Un possibile miglioramento sulla comprensione del fenomeno non lineare potrà essere ottenuto continuando lo studiando con il metodo della funzione descrittiva iniziato nel Capitolo 7. Tale studio potrà infatti spiegare il motivo per cui il fenomeno persiste per una elevata gamma di velocità angolari del volano, come già accennato nel Capitolo 5.

Il lavoro di ricerca svolto e presentato in questa tesi è da considerarsi comunque più che soddisfacente in quanto il modello rispecchia la realtà fisica e inoltre durante la sua elaborazione sono stati trattati, in maniera più o meno approfondita, una vasta quantità di argomenti trasversali fra loro (i contenuti non hanno la presunzione di essere completi ma costituiranno un valido supporto per chi dovrà proseguire il lavoro).

## Appendice A

# Modellistica Power-Oriented Graph

### A.1 Modellistica dinamica di sistemi fisici

I Power-Oriented Graph (POG) rappresentano una tecnica grafica e matematica adatta a modellare sistemi reali. Nella realtà fisica esistono vari ambiti energetici che presentano una struttura dinamica simile, per esempio: meccanico (traslazionale e rotazionale), elettro-magnetico, idraulico. Ogni ambito è infatti caratterizzato da due elementi dinamici  $D_1$  e  $D_2$ , duali fra loro, che accumulano energia ed un elemento statico  $R$  che dissipata (o genera) energia. In un sistema dinamico si ha trasferimento di energia attraverso la potenza, esistono quindi due variabili interne  $q_1(t), q_2(t)$  che caratterizzano l'energia accumulata nei due elementi dinamici e due variabili di uscita  $v_1(t), v_2(t)$  che, rappresentando la potenza, permettono all'energia di spostarsi all'interno del sistema dinamico.

La generica struttura di un elemento dinamico è rappresentata in Fig. A.1. In ingresso la variabile potenza  $v_2$ , differenza di due valori, viene integrata ottenendo il valore della variabile energia interna  $q_1(t)$ ; proprio da questo integratore nasce la natura dell'equazione differenziale che lega le due variabili ( $dq_1 = v_2 dt \leftrightarrow \frac{dq_1}{dt} = v_2$ ). La variabile interna è poi la variabile indipendente dell'inversa della relazione costitutiva  $\Phi_1(v_1)$  che lega la variabile energia con la variabile di uscita  $v_1$  ( $q_1 = \Phi_1(v_1) \leftrightarrow v_1 = \Phi_1^{-1}(q_1)$ ). Si può quindi ricavare la funzione di energia  $E_1$  che è funzione della sola variabile interna:

$$E_1 = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t v_1 v_2 dt = \int_0^{q_1} \Phi_1^{-1}(q_1) dq_1$$

La generica struttura di un elemento statico è rappresentata in Fig. A.2, esso è caratterizzato solamente da una relazione costitutiva statica  $\Phi_R$  che lega fra loro le variabili di potenza ( $v_1 = \Phi_R(v_2) \leftrightarrow v_2 = \Phi_R^{-1}(v_1) = \Phi_G(v_1)$ ). Se si ha una realtà fisica non generativa, allora tutti gli elementi statici sono dissipativi.

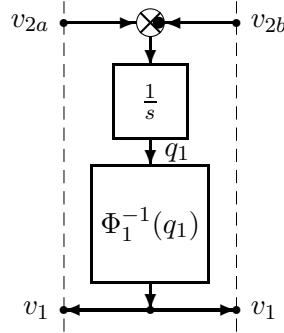


Figura A.1: generico elemento dinamico di un sistema mostrato in Fig. A.1.

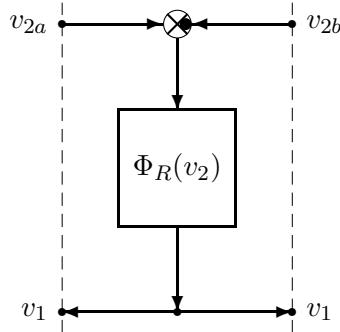


Figura A.2: generico elemento statico di un sistema mostrato in Fig. A.2.

In entrambi gli elementi il tratteggio rappresenta sezioni fisiche attraverso le quali fluisce potenza: quella entrante è data dal prodotto fra  $v_{2a}$  e  $v_1$ , quella uscente dal prodotto fra  $v_{2b}$  e  $v_1$ .

Concludendo la tecnica di modellizzazione POG si basa sulla stessa idea dei Bond Graph di utilizzare le interazioni di potenza; individuando una corrispondenza diretta fra i blocchi dello schema e le parti reali del sistema descritto. I POG utilizzano una notazione grafica differente dai Bond Graph, che permette di ottenere l'equazione differenziale che descrive il sistema direttamente dal modello; inoltre è possibile ottenere direttamente il modello matematico nello spazio degli stati. Quando alcuni parametri dinamici del sistema tendono a zero (o ad infinito), si può usare una trasformazione congruente per ottenere la riduzione del modello.

## A.2 Blocchi fondamentali

### A.2.1 Caso monodimensionale

Nel paragrafo precedente sono stati descritti i due elementi principali che caratterizzano un ambito energetico, nella struttura di un modello POG questi elementi sono raggruppati nel blocco di elaborazione che immagazzina energia e dissipata potenza.

In un sistema dinamico si ha spostamento di energia anche da un ambito fi-

sico ad un altro; per questo nei modelli POG troviamo anche il blocco di connessione dove l'energia non viene né accumulata, né dissipata ma soltanto redistribuita. I due blocchi fondamentali sono rappresentati in Fig. A.3.

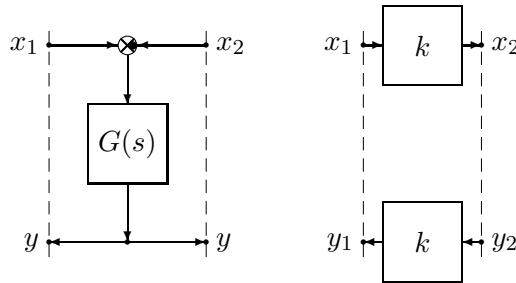


Figura A.3: Blocchi Fondamentali modello POG.

La forma tipica per la funzione di trasferimento del blocco di elaborazione è:

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{X_1(s) - X_2(s)} = \frac{1}{b + as} \quad (\text{A.1})$$

L'equazione A.1 può essere ricavata anche graficamente come si evince dalla Fig. A.2.1.

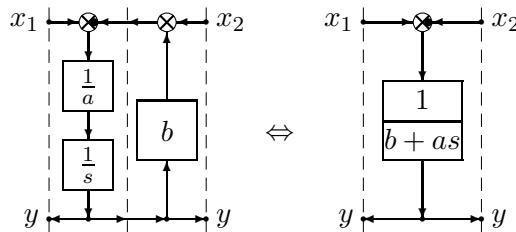


Figura A.4: Blocco di elaborazione POG.

Se le variabili  $x_1, x_2$  ed  $y$  sono scelte in modo tale che i prodotti  $x_1y$  e  $x_2y$  siano rispettivamente la potenza entrante ed uscente dal blocco, si può dimostrare che  $b y^2$  indica sempre la potenza dissipata e  $\frac{1}{2}a y^2$  l'energia immagazzinata. Nel blocco di connessione invece sia la potenza dissipata che l'energia immagazzinata sono nulle e la relazione caratteristica è data dall'uguaglianza  $x_1y_1 = x_2y_2$ , cioè la potenza entrante è sempre uguale a quella uscente.

### A.2.2 Caso multidimensionali

I blocchi introdotti, sono utilizzabili anche per rappresentare sistemi vettoriali; in questo caso assumeranno la forma di Fig. A.5.

Nel caso di rappresentazione vettoriale,  $\mathbf{G}(s)$  e  $\mathbf{K}$  sono matrici:  $\mathbf{G}(s)$  è sempre quadrata e simmetrica mentre  $\mathbf{K}$  può essere anche rettangolare. Non esiste alcuna restrizione sulle variabili  $\mathbf{x}$  ed  $\mathbf{y}$ , a patto che il prodotto scalare fra le variabili ( $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ ) abbia il significato fisico di una potenza.

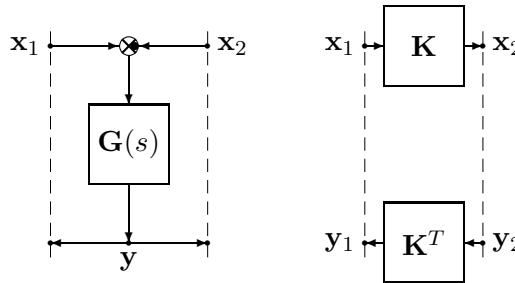


Figura A.5: Blocchi POG Fondamentali.

Il blocco di connessione, come nel caso monodimensionale, è usato per trasformare le variabili di sistema da un ambito energetico ad un altro. Esso non si dissipa né immagazzina energia infatti:

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{y}_1 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{K}^T \mathbf{y}_2) = (\mathbf{K} \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_2^T \mathbf{y}_2$$

Se il blocco di elaborazione è definito dalle equazioni:

$$\mathbf{G}^{-1}(s) = \mathbf{M}s + \mathbf{R}$$

l'energia immagazzinata nel blocco e la potenza dissipata sono forme quadratiche delle matrici  $\mathbf{M}$  ed  $\mathbf{R}$ :

$$E_s = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y} \quad P_d = \mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{y}$$

### A.3 Inversione di modello

Una caratteristica importante dei POG è quella di poter invertire un modello (per esempio perché si vuol rendere ingresso una variabile che prima era una uscita o viceversa), senza dover cambiare la posizione dei vari blocchi, ma soltanto invertendo uno o più cammini del grafo. Questa caratteristica, molto importante in fase di simulazione, contraddistingue questi schemi a blocchi dai grafi di flusso in cui un'operazione del genere dà luogo inevitabilmente ad una modifica radicale del grafo.

Più in particolare possiamo dire che nella inversione di un cammino in un POG, occorre applicare le seguenti regole:

1. Tutti i rami del cammino da invertire devono cambiare direzione.
2. Di tutte le F.d.T., presenti lungo il cammino da invertire, deve essere calcolato in reciproco.
3. Tutti i nodi sommatori presenti nei blocchi di elaborazione devono essere modificati, cambiando segno alle variabili interessate dal cammino di inversione.

Questa proprietà è molto utile, per esempio, quando durante la fase di stesura del modello compare un blocco derivatore inaccettabile da un punto di vista simulativo (poiché non causale, cioè non fisicamente realizzabile). Invertendo allora un cammino che lo contiene (con un altro blocco algebrico), lo si può trasformare in blocco integratore risolvendo il problema.

## A.4 Rappresentazione nello S.d.S per sistemi lineari tempo-invarianti

I POG, per le loro caratteristiche peculiari, si adattano molto bene ad una rappresentazione nello Spazio degli Stati (S.d.S.) dove la funzione di stato e la funzione di uscita sono ricavate dalle variabili di stato  $\mathbf{x}$  e dalle variabili di ingresso  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{cases} \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Quando le variabili di uscita  $\mathbf{y}$  coincidono con le variabili accoppiate a quelle di ingresso, la matrice di uscita diventa la trasposta della matrice di ingresso ( $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T$ ). Nella maggioranza dei casi la matrice  $\mathbf{D}$  è nulla, si ottiene quindi il sistema A.3 a cui corrisponde lo schema di Fig. A.6.

$$\begin{cases} \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}^T\mathbf{x} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

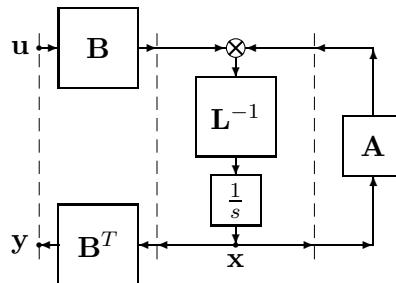


Figura A.6: Modello P.O.G di un sistema dinamico con rappresentazione nello Spazio degli Stati.

Dal modello POG di Fig. A.6 si deduce che:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \frac{1}{s}\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}^T\mathbf{x} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

basta moltiplicare la prima equazione delle A.4 per  $s\mathbf{L}$  per ottenere il sistema A.3.

### A.4.1 Riduzione del sistema

Quando alcuni elementi della matrice  $\mathbf{L}$  tendono a zero (o ad infinito), il sistema degenera in uno a dimensione minore. Questa riduzione può essere

ottenuta direttamente per via grafica, invertendo il percorso, oppure applicando delle trasformazioni di congruenza del tipo mostrato in A.5, dove  $\mathbf{T}$  è una matrice rettangolare.

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} \quad (\text{A.5})$$

Un tale cambiamento di coordinate nello spazio degli stati altera le matrici delle equazioni in modo da produrre una diversa ma equivalente descrizione matematica del sistema dinamico di partenza A.3. Moltiplicando infatti la funzione di stato per  $\mathbf{T}^T$  si ottiene:

$$\begin{cases} \mathbf{T}^T \mathbf{L} \mathbf{T} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}^T \mathbf{T} \mathbf{z} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Posto nelle A.6  $\mathbf{L}_{eq} = \mathbf{T}^T \mathbf{L} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}_{eq} = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{B}_{eq} = \mathbf{B}^T \mathbf{T}$  si ricava il sistema A.7 formalmente equivalente a quello iniziale A.3.

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{eq} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{eq} \mathbf{z} + \mathbf{B}_{eq} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}_{eq}^T \mathbf{x} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

# Appendice B

## Codici Matlab

In questa appendice vengono riportati i vari listati Matlab utilizzati per analizzare i dati sperimentali e simulare il comportamento dinamico del sistema

### B.1 UniMoData1Reduced.m

Filtro che elimina gli spike sulla velocità del volano e diminuisce il numero di dati non cambiando le informazioni contenute sui dati sperimentali.

```
%%%%%%%%
%
%          UniMo_Data1_Reduced.m
%
%
% Filtro che elimina gli spike sulla velocità del volano e diminuisce il %
% numero di dati non cambiando l'info contenute nel grafico
%
%%%%%%%
load UniMo_Data1.mat
% Forma della struttura UniMO_Data =
%           Time: [800000x1 double]
%           PTOTorque: [800000x1 double]
%           EngineSpeed: [800000x1 double]
%       EngineSpeedFiltered: [800000x1 double]

figure(1)
clf plot(Data.Time,Data.EngineSpeed,'.')
hold on

% ciclo che salva solo i dati diversi--> diminuisco il numero di dati ma
% non cambia l'info contenuta

jj=1;
TR(jj)=Data.Time(jj);
ESR(jj)=Data.EngineSpeed(jj);
nr=length(Data.Time);
for ii=[2:nr]
    if Data.EngineSpeed(ii)~=Data.EngineSpeed(ii-1)
        jj=jj+1;
    end
end
```

```

        TR(jj)=Data.Time(ii);
        ESR(jj)=Data.EngineSpeed(ii);
    end
end

plot(TR,ESR,'.r')

% creo una nuova struttua Velocity_Reduced con i nuovi dati e la salvo
%
%           Time: [1x29634 double]
%       EngineSpeed: [1x29634 double]

Velocity_Reduced.Time=TR;
Velocity_Reduced.EngineSpeed=ESR;

%save Velocity_Reduced Velocity_Reduced

figure(2)
clf
plot(diff(TR),'.') % plotta la differenza fra il dato e il succ

% filtro che elimina gli spike: se dato inserito non è fuori dal range
% (definito dalla soglia) lo aggiungo e aggiorno la media

nf=5;
soglia=70;
Nr=length(TR);
media=mean(ESR(1:nf));
TR2(1:nf)=TR(1:nf);
ESR2(1:nf)=ESR(1:nf);
jj=nf;
for ii=[nf+1:Nr]
    if abs(ESR(ii)-media)< soglia
        jj=jj+1;
        TR2(jj)=TR(ii);
        ESR2(jj)=ESR(ii);
        media=mean(ESR2(jj-nf+1:jj));
    end
end

figure(3)
clf
plot(TR,ESR,'.r')
hold on
plot(TR2,ESR2,'.b')

% creo una nuova struttua Velocity_Reduced2 con i dati filtrati e la salvo
%
%           Time: [1x28606 double]
%       EngineSpeed: [1x28606 double]

```

```

Velocity_Reduced2.Time=TR2;
Velocity_Reduced2.EngineSpeed=ESR2;

%save Velocity_Reduced2 Velocity_Reduced2

```

## B.2 UniMoData1filtered.m

Filtraggio dei dati forniti mediante filtro del terzo ordine e filtro a media mobile

```

%%%%%%%%%%%%%%%
%
%
%           UniMo_Data1_filtered.m
%
%
% Filtraggio della velocità del volano (che viene anche derivata) e
% della coppia all'albero di trasmissione utilizzando un filtro a media
% mobile e un filtro del terzo ordine realizzato con un polo.
%
%
%%%%%%%
clc
clear all
close all
%%%%%%%
%
% Definizione delle unità di misura del SI
%
metri=1; km=1000*metri; cm=0.01*metri; mm=0.001*metri;
sec=1; msec=0.001*sec; minuti=60*sec; ora=60*minuti;
kg=1; gr=0.001*kg;
Newton=1; Nm=Newton*metri;
rad=1; gradi=pi*rad/180; giri=2*pi; rpm=2*pi/minuti;
g_gravity = 9.81*metri/sec^2; % Accelerazione di gravità
Kgf=g_gravity; % Kilogrammi forza
Volt=1; Amp=1; Ohm=Volt/Amp;
Henry=Volt*sec/Amp; Weber=Volt*sec;
Si=true;
No=false;
%%%%%%%
load UniMo_Data1.mat
% Forma della struttura UniMO_Data =
%
%           Time: [800000x1 double]
%
%           PTOTorque: [800000x1 double]
%
%           EngineSpeed: [800000x1 double]
%
%           EngineSpeedFiltered: [800000x1 double]

load Velocity_Reduced2.mat
% Forma della struttura Velocity_Reduced2 =
%
%           Time: [1x28606 double]
%
%           EngineSpeed: [1x28606 double]

%
% Una volta caricati i dati ridotti, utilizzo l'interpolazione per
% ottenere tutti i valori equispaziati

```

```

tt=Data.Time(1:10:length(Data.Time));

%tt= [Data.Time(1):(Data.Time(2)-Data.Time(1))*10 :
%                  (Data.Time(2)-Data.Time(1))*length(Data.Time)];
%modo alternativo per eliminare dei campioni nel tempo mantenendoli cmq
%equispaziati

Velocity_Reduced3.Time=tt;
Filtered.Time=tt;
Velocity_Reduced3.EngineSpeed=
    interp1(Velocity_Reduced2.Time,Velocity_Reduced2.EngineSpeed,tt);

% YI = INTERP1(X,Y,XI) nel vettore YI vengono memorizzati i campioni
% interpolati del vettore Y intervallati con i valori del vettore XI
% il vettore X è il vettore i cui valori intervallavano Y

% Forma della struttura Velocity_Reduced3 =
%
%      Time: [80000x1 double]
%      EngineSpeed: [80000x1 double]

figure(4)
clf
plot(Velocity_Reduced3.Time,Velocity_Reduced3.EngineSpeed)

% Filtro la velocità in uscita dal volano con un filtro del terzo ordine

LPtau = .02 ;
LPsys = c2d( tf( 1 , [ LPtau, 1 ] ) , Data.Time(2) - Data.Time(1), 'tustin' );
LPsys = LPsys * LPsys * LPsys;

Offset = 0.5 * 770 * 3 / 60;
tt      = [ Data.Time(1) : Data.Time(2) - Data.Time(1) :
            ( Data.Time(2) - Data.Time(1) ) * length( Data.EngineSpeed ) ];
tt      = tt( 1 : length( Data.EngineSpeed ) );
Data.EngineSpeedFiltered = lsim( LPsys , Data.EngineSpeed , tt ) + Offset;
clear tt

Data.EngineSpeedFiltered =
    Data.EngineSpeedFiltered + 20 * ( Data.EngineSpeedFiltered / 1000 - 1.5 );

figure(5)
clf
title('Velocità angolare del volano ')
xlabel( 'Time [seconds]' )
ylabel( 'Engine speed [RPM]' )
ylim( [ 0 2500 ] )
grid on
plot( Data.Time , Data.EngineSpeedFiltered, 'g' )
hold on

```

```
% Utilizzando il filtro a media mobile filtro Velocity_Reduced3

Filtered.EngineSpeed=filtromedia(Velocity_Reduced3.EngineSpeed,1000);
plot(Filtered.Time,Filtered.EngineSpeed)
Filtered.EngineSpeed=Filtered.EngineSpeed';

%Filtro la coppia sull'albero di trasmissione con un filtro del terzo
%ordine

LPtau1 = 0.05 ;
LPsys1 = c2d( tf( 1 , [ LPtau1, 1 ] ) , Data.Time(2) - Data.Time(1), 'tustin' );
LPsys1 = LPsys1 * LPsys1 * LPsys1;
tt      = [ Data.Time(1) : Data.Time(2) - Data.Time(1) :
            ( Data.Time(2) - Data.Time(1) ) * length( Data.PTOTorque ) ];
tt      = tt( 1 : length( Data.PTOTorque ) );
Data.PTOTorqueFiltered = lsim( LPsys1 , Data.PTOTorque , tt );

figure(6)
title('Coppia misurata all albero di trasmissione')
xlabel( 'Time [seconds]' )
ylabel( 'PTO torque [Nm]' )
hold on
grid on
plot( Data.Time , Data.PTOTorqueFiltered, 'g' )
hold on

%Filtro ulteriormente la coppia media con un filtro a media mobile
%riducendo prima il numero di campioni della coppia

PTOTorque=Data.PTOTorqueFiltered(1:10:length(Data.PTOTorqueFiltered));
Filtered.PTOTorque=filtromedia(PTOTorque,1000);
plot(Filtered.Time,Filtered.PTOTorque,'r')
Filtered.PTOTorque=Filtered.PTOTorque';

%derivo la velocità del volano stando attento alle unità di misura la
%velocità fornita in rpm deve essere convertita in rad/s
% variabile * rpm converti rpm --> rad/s
% variabile / rpm converti rad/s --> rpm
[Filtered.dEngineSpeed,f]=deriva(Filtered.Time,Filtered.EngineSpeed*rpm);
Filtered.dEngineSpeed=Filtered.dEngineSpeed';

% Forma della struttura salvata Filtered =
%
%           Time: [80000x1 double]
%           EngineSpeed: [80000x1 double]
%           PTOTorque: [80000x1 double]
%           dEngineSpeed: [80000x1 double]

%Salvataggio della struttura
%save UniMo_Data1_filtered Filtered
```

### B.3 deriva.m

Funzione che calcola la derivata rispetto al tempo del vettore in ingresso

```
%%%%%
%
% deriva.m
%
% filtra e deriva la variabile z che gli si fornisce in ingresso insieme %
% al tempo
%
% function [dz,zf]=deriva(t,z)
% t = vettore dei tempi
% z = vettore dei campioni
% vet = [dz | zf] dove:
%      dz = derivata di z rispetto a t
%      zf = campioni z filtrati
%
%%%%%
%
function [dz,zf]=deriva(t,z)

% valori primo campione
dz(1)=(z(2)-z(1))/(t(2)-t(1)); zf(1)=z(1);

for i=[2:length(t)-1]
    x0=t(i-1);
    x1=t(i);
    x2=t(i+1);
    s0=zf(i-1);
    ds0=dz(i-1);
    y1=z(i);
    y2=z(i+1);
    a=-((s0-ds0*x0+ds0*x1-y1)*(x0-x1)^2+(s0-ds0*x0+ds0*x2-y2)*(x0-x2)^2)/
        ((x0-x1)^4+(x0-x2)^4);
    b=ds0-2*a*x0;
    c=s0-a*x0^2-b*x0;
    zf(i)=a*x1^2+b*x1+c;
    dz(i)=2*a*x1+b;
    % dz2(i)=(zf(i)-zf(i-1))/(t(i)-t(i-1));
    % dz3(i)=(z(i)-z(i-1))/(t(i)-t(i-1));
end

% ultimo valore
i=length(t);
zf(i)=z(i);
dz(i)=(z(i)-zf(i-1))/(t(i)-t(i-1));
```

## B.4 picchi.m

Funzione che estrae i picchi da una variabile in ingresso

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%                               picchi.m
%
% estrae i picchi max e minimi della variabile z che gli si fornisce in %
% ingresso insieme al tempo
% function [dz,zf]=deriva(time,z)
% time = vettore dei tempi
% z = vettore dei campioni
% vet = [i_max | i_min | time_minmaxiii | z_minmax] dove:
%
%           i_max = indici dei massimi
%
%           i_min = indici dei minimi
%
%           time_minmaxiii = vettore temporale dei picchi
%
%           z_minmax = vettore dei valori dei picchi
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
function [time_minmax,z_minmax]=picchi(time,z)

dt=sign(diff(z));

% elimino tutti i punti di permanenza (dove la coppia risulta costante)
% che potrebbero essere riconosciuti come min o max in modo da ottenere
% la giusta alternanza fra min e max

notzero=find(dt~=0); dt=dt(notzero);

% dt è uguale a dt solo quando è diverso da 0 --> elimino permanenze

time=time(notzero); z=z(notzero);

%diff(X), for a vector X, is [X(2)-X(1)  X(3)-X(2) ... X(n)-X(n-1)].
%sign(X), 1 for X>0 -1 for X<0
% creo onda quadra che quando scende individua un max e quando sale un min

nr=length(dt);
dt1=[dt(2:nr);0]; %scifto a sinistra il vettore dt
ind_max=find((dt>0)&(dt1)<0)+1;

% se l'indice dt è maggiore di zero e dt2 (che è l'indice successivo)
% è minore di zero allora vuole dire che ho trovato un massimo visto
% che la prima differenza è positiva e quella successiva negativa
% e la funzione find restituisce l'indice

ind_min=find((dt<0)&(dt1)>0)+1;

% se l'indice dt è minore di zero e dt2 (che è l'indice successivo)
% è maggiore di zero allora vuole dire che ho trovato un minimo visto
```

```
% che la prima differenza è negativa e quella successiva positiva
% e la funzione find restituisce l'indice

mediaMobileIniz=mean(z);

ind_minmax=sort([ind_max;ind_min]); time_minmax=time(ind_minmax);
z_minmax=z(ind_minmax);

% nr=length(ind_minmax);

% elimina i massimi sotto mediaMobileMax creando il vettore ind_maxii
% e crea il vettore startmax che contiene gli indici dei max sopra la
% media che sono preceduti da un min sotto in modo da dividere la funzione
% in gruppi di max

ind_maxii=[]; startmax=[]; for
ii=1:min(length(ind_max),length(ind_min))-1
    if (z(ind_max(ii))>mediaMobileIniz)
        ind_maxii=[ind_maxii ind_max(ii)];
    end
    if(ind_max(1)>ind_min(1)) %se è verificata vuole dire che parto con un min
        if ((z(ind_min(ii))<mediaMobileIniz)&&(z(ind_max(ii))>mediaMobileIniz))
            startmax=[startmax ind_max(ii)];
        end
    else if((z(ind_min(ii))<mediaMobileIniz)&&(z(ind_max(ii+1))>mediaMobileIniz))
        startmax=[startmax ind_max(ii+1)];
    end
end
end

% riciclo il vettore dei max sopra la media (ind_maxii) caricando mediante
% il confronto con il vettore startmax i vari gruppi nel vettore temporaneo
% Tind_maxii e salvando il massimo nel vettore ind_maxii

temp_ind_max = ind_maxii; ind_maxiii=[]; Tind_maxii=[]; jj=1; ii=1;
while
((ii<length(temp_ind_max))&&(temp_ind_max(ii)<=startmax(length(startmax)))&&
(jj<length(startmax)))
    if ((temp_ind_max(ii))~=startmax(jj)) %confronto fra i vettori
        Tind_maxii=[Tind_maxii ; temp_ind_max(ii)]; %carico gruppo
        ii=ii+1;
    else
        [tt,a]=max(z(Tind_maxii)); %seleziona massimo nel gruppo
        ind_maxiii=[ind_maxiii Tind_maxii(a)]; %salvataggio dell'indice del
                                                %massimo (carico contenuto
                                                %della cella a-esima del
                                                %vettore Tind_maxii)
        jj=jj+1; %aggiornamento puntatore indice
        %startmax per selezionare gruppo successivo
        Tind_maxii=[];
        tt=0;
    end
end
```

```

    a=0;
end
end

% elimina i minimi sopra mediaMobileMax creando il vettore ind_minii
% e crea il vettore startmin che contiene gli indici dei min sotto la
% media che sono preceduti da un max sopra in modo da dividere la funzione
% in gruppi di min

ind_minii=[]; startmin=[]; for
ii=1:min(length(ind_max),length(ind_min))-1
    if (z(ind_min(ii))<mediaMobileIniz)
        ind_minii=[ind_minii ind_min(ii)];
    end
    if(ind_max(1)<ind_min(1)) %se è verificata vuole dire che parto con un max
        if ((z(ind_min(ii))<mediaMobileIniz)&&(z(ind_max(ii))>mediaMobileIniz))
            startmin=[startmin ind_min(ii)];
        end
    else if((z(ind_min(ii+1))<mediaMobileIniz)&&(z(ind_max(ii))>mediaMobileIniz))
        startmin=[startmin ind_min(ii+1)];
    end
end
end

% riciclo il vettore dei min sotto la media (ind_minii) caricando mediante
% il confronto con il vettore startmin i vari gruppi nel vettore temporaneo
% Tind_minii e salvando il minimo nel vettore ind_minii

temp_ind_min = ind_minii; ind_miniii=[]; Tind_minii=[]; jj=1; ii=1;
while
((ii<length(temp_ind_min))&&(temp_ind_min(ii)<=startmin(length(startmin)))&&
(jj<length(startmin)))
    if ((temp_ind_min(ii))~=startmin(jj)) %confronto fra i vettori
        Tind_minii=[Tind_minii ; temp_ind_min(ii)]; %carico gruppo
        ii=ii+1;
    else
        [tt,a]=min(z(Tind_minii)); %seleziona minimo nel gruppo
        ind_miniii=[ind_miniii Tind_minii(a)]; %salvataggio dell'indice del
                                                %minimo (carico contenuto
                                                %della cella a-esima del
                                                %vettore Tind_minii)
        jj=jj+1;    %aggiornamento puntatore indice
                    %startmin per selezionare gruppo successivo
        Tind_minii=[];
        tt=0;
        a=0;
    end
end

ind_minmaxiii=sort([ind_maxiii';ind_miniii']);
% per verificare l'alternanza fra massimi e minimi bisogna che ok sia = 0

```

```
% ok=find(diff(ind_minmaxiii)<0);
time_minmax=time(ind_minmaxiii); z_minmax=z(ind_minmaxiii);
```

## B.5 UniMoData1ANALISIDATI.m

L'analisi dei dati sperimentali forniti viene eseguita utilizzando la funzione `picchi.m` e il comando Matlab che esegue l'operazione di FFT. Utilizzando i massimi e i minimi trovati sulla coppia all'albero di trasmissione viene calcolato il periodo del segnale e da questo la velocità angolare del volano; inoltre l'analisi spettrale viene eseguita per ogni periodo in modo da ottenere gli andamenti in funzione della velocità angolare del volano. Nel file vengono riportati tutti i grafici relativi ai dati forniti.

```
%%%%%
%
%          UniMo_Data1_grafici.m
%
%
% Analisi dei dati sperimentali forniti: graficazione dei dati filtrati; %
% calcolo dei massimi e dei minimi utilizzando la funzione picchi; %
% calcolo del periodo; analisi spettrale fatta periodo per periodo %
% mediante FFT %
%
%%%%%
clc
clear all
close all
%%%%%
%
% Definizione delle unità di misura del SI %
%%%%%
metri=1; km=1000*metri; cm=0.01*metri; mm=0.001*metri;
sec=1; msec=0.001*sec; minuti=60*sec; ora=60*minuti;
kg=1; gr=0.001*kg;
Newton=1; Nm=Newton*metri;
rad=1; gradi=pi*rad/180; giri=2*pi; rpm=2*pi/minuti;
g_gravity = 9.81*metri/sec^2; % Accelerazione di gravità
Kgf=g_gravity; % Kilogrammi forza
Volt=1; Amp=1; Ohm=Volt/Amp;
Henry=Volt*sec/Amp; Weber=Volt*sec;
Si=true;
No=false;
%%%%%
load UniMo_Data1_filtered.mat;
load UniMo_Data1.mat;

figure(1)
clf
title('Velocità angolare del volano ')
xlabel( 'Time [seconds]' )
ylabel( 'Engine speed [RPM]' )
ylim( [ 0 2500 ] )
```

```

hold on
grid on
EngineSpeed=Data.EngineSpeed(1:10:length(Data.EngineSpeed));
Filtered.Time=Filtered.Time(1:1:length(Filtered.Time));
Filtered.EngineSpeed=Filtered.EngineSpeed(1:1:length(Filtered.EngineSpeed));
plot( Filtered.Time , EngineSpeed )
plot( Filtered.Time , Filtered.EngineSpeed, 'g' )
%print -depsc velocità_1.eps

figure(2)
title('Coppia misurata all albero di trasmissione')
xlabel( 'Time [seconds]' )
ylabel( 'PTO torque [Nm] ' )
hold on
grid on
PTOTorque=Data.PTOTorque(1:10:length(Data.PTOTorque));
Filtered.PTOTorque=Filtered.PTOTorque(1:1:length(Filtered.PTOTorque));
plot( Filtered.Time , PTOTorque)
plot( Filtered.Time , Filtered.PTOTorque, 'g' )
%print -depsc coppia_1.eps

ratio=Filtered.PTOTorque./(Filtered.EngineSpeed*rpm);

figure(3);
clf
plot(Filtered.Time,ratio);
hold on;
plot(Filtered.Time,0.23,'r');
%axis([0 16 0.15 0.3])
grid on
title('PTO torque / Engine speed')
ylabel( '[(Nm s)/rad] ' )
xlabel('Time [s]')
legend ('ratio','0.23 (Nm s)/rad','Location','Best')
%print -depsc funzditrasf.eps

% calcolo dei massimi e dei minimi attraverso la funzione picchi
[time_minmax,torque_minmax]=picchi(Data.Time,Data.PTOTorque);

figure(4)
plot(time_minmax,torque_minmax)
hold on
plot(time_minmax(1:2:length(time_minmax)),
      torque_minmax(1:2:length(time_minmax)),'*r')
plot(time_minmax(2:2:length(time_minmax)),
      torque_minmax(2:2:length(time_minmax)),'*g')

T_max=[];
for ii=3:2:length(time_minmax)
    T_max = [T_max (time_minmax(ii)-time_minmax(ii-2))];
end

```

```

T_min=[];
for ii=4:2:length(time_minmax)
    T_min = [T_min (time_minmax(ii)-time_minmax(ii-2))];
end

figure (5)
subplot(2,1,1)
ylabel('Periodo [s]')
xlabel('Time [s]')
ylim( [0.01 0.022] )
hold on
plot(time_minmax(3:2:length(time_minmax)),T_max,'r')
subplot(2,1,2)
ylabel('Periodo [s]')
xlabel('Time [s]')
ylim( [0.01 0.022] )
hold on
plot(time_minmax(4:2:length(time_minmax)),T_min,'b')

kk=1;
ind_minmax=[];
for ii=1:length(Data.Time)
    if((Data.Time(ii)==time_minmax(kk))&&(kk<length(time_minmax)))
        ind_minmax=[ind_minmax ii];
        kk=kk+1;
    end
end
ind_max=ind_minmax(1:2:length(ind_minmax));
ind_min=ind_minmax(2:2:length(ind_minmax));

figure (6)
xlabel( 'Engine speed [RPM]' )
ylabel( 'PTO torque [Nm]' )
xlim( [1500 2300] )
hold on
grid on
plot( Data.EngineSpeedFiltered(ind_max), Data.PTOTorque(ind_max),'r.' );
plot( Data.EngineSpeedFiltered(ind_min), Data.PTOTorque(ind_min),'b.' );
%print -depsc coppia_velocita_sim.eps

%calcolo del periodo a partire dalla velocità del volano
T_calc=pi./(Data.EngineSpeedFiltered*rpm);

figure (7)
title('Periodo')
xlabel( 'Engine speed [RPM]' )
ylabel( 'Period [s]' )
xlim( [1800 2300] )
hold on
plot( Data.EngineSpeedFiltered(ind_max), T_max);
plot (Data.EngineSpeedFiltered,T_calc,'r');

```

```

legend('periodo simulato ','periodo teorico','Location','Best');
%plot( Data.EngineSpeedFiltered(ind_min),T_min );
%print -depsc periodo.eps

%calcolo della velocità del volano a partire dal periodo
volano=(pi./T_max)/rpm;

figure (8)
title('Velocità angolare del volano')
ylabel( 'Engine speed [RPM]' )
xlabel( 'Time [s]' )
ylim( [0 2300] )
hold on
plot(Data.Time(ind_max),volano);
plot(Data.Time,Data.EngineSpeedFiltered,'r');
legend('velocità simulata ','velocità sperimentale','Location','Best');
%print -depsc velocitàvolano.eps

% analisi spettrale fatta mediante FFT caricando i campioni di ogni periodo
Value=[];
M=[];
F=[];
jj=2;
T=[];
for ii=2:length(ind_max)
v=(fft(Data.PTotorque(ind_max(ii-1):ind_max(ii))))/(ind_max(ii)-ind_max(ii-1));
Value(jj,:)=v(1:4);
M(jj,:)=abs(v(1:4));
F(jj,:)=angle(v(1:4));
T=[T Data.Time(ind_max(ii))-Data.Time(ind_max(ii-1))];
jj=jj+1;
end

figure(9)
title('Analisi spettrale')
ylabel( 'Moduli armoniche [Nm]' )
xlabel( 'Time [s]' )
hold on
grid on
plot(Data.Time(ind_max),M(:,1))
plot(Data.Time(ind_max),2*M(:,2),'r')
plot(Data.Time(ind_max),2*M(:,3),'g')
plot(Data.Time(ind_max),2*M(:,4),'k')
legend('fondamentale','1° armonica','2° armonica','3° armonica','Location','Best');
%print -depsc modulia.eps

volano=(pi./T)/rpm;
volano=[0 volano];

figure(10)
title('Analisi spettrale')

```

```

xlabel( 'Engine speed [RPM]' )
ylabel( 'Moduli armoniche [Nm]' )
xlim( [1500 2300] )
hold on
grid on
plot(volano,M(:,1),'b.')
plot(volano,2*M(:,2),'r.')
plot(volano,2*M(:,3),'g.')
plot(volano,2*M(:,4),'k.')
legend('fondamentale','1° arm','2° arm','3° arm','Location','Best');
%print -depsc modulib.eps

figure(11)
title('Analisi spettrale')
xlabel( 'Engine speed [RPM]' )
ylabel( 'Fasi armoniche [gradi]' )
xlim( [1500 2300] )
hold on
grid on
plot(volano,F(:,1)/gradi,'b.')
plot(volano,F(:,2)/gradi,'r.')
plot(volano,F(:,3)/gradi,'g.')
legend('fondamentale','1° arm','2° arm','Location','Best');
%print -depsc fasia.eps

figure(12)
title('Analisi spettrale')
ylabel( 'Fasi armoniche [gradi]' )
xlabel( 'Time [s]' )
hold on
grid on
plot(Data.Time(ind_max),F(:,1)/gradi)
plot(Data.Time(ind_max),F(:,2)/gradi,'r')
plot(Data.Time(ind_max),F(:,3)/gradi,'g')
legend('fondamentale','1° arm','2° arm','Location','Best');
%print -depsc fasib.eps

```

## B.6 PicchiSimulazioni2.m

L'idea alla base del programma è quella di ottimizzare la ricerca dei parametri incogniti per riprodurre il fenomeno riportato in Fig. 4.2 permettendo di eseguire più prove in catena in una sola simulazione. I vari parametri utilizzati vengono riportati nella legenda di ogni grafico; l'ordine dei parametri con le relative unità di misura sono riportate nella Tab. B.1

$J_v [Kg * m^2]$	$J_1 [Kg * m^2]$	$b_t [\frac{Nm*sec}{rad}]$	$g_1 [mm]$	$\gamma [adm]$	$K [\frac{N}{mm}]$	$J_e [Kg * m^2]$
------------------	------------------	----------------------------	------------	----------------	--------------------	------------------

Tabella B.1: Dati modificati durante la simulazione

Nel titolo sono riportate le varibili **Sim**, **Prova** e **Con**; le prime due indicano la simulazione e il numero della prova mentre la variabile **Con** indica in che modo è stata calcolata la coppia media applicata in ingresso: se **Con= 0** la coppia media è calcolata utilizzando i profili generati mediante Lookup Table della coppia all'albero di trasmissione e della velocità del volano se **Con= 1** la coppia media è calcolata a partire dai dati forniti filtrati mediante il file matlab **UniMoData1filtered.m**.

```

%
% Picchi_Simulazioni2.m
%
%
% simulazione della risonanza del sistema sommando alla coppia media le
% prime due armoniche e con l'eventuale salvataggio della coppia in
% ingresso e un ulteriore simulazione
%
%%%%%%%%%%%%%%%
clc
clear all
close all

%%%%%%%%%%%%%%
% Definizione delle unità di misura del SI
%%%%%%%%%%%%%
metri=1; km=1000*metri; cm=0.01*metri; mm=0.001*metri; ym=1e-6*metri;
sec=1; msec=0.001*sec; minuti=60*sec; ora=60*minuti;
kg=1; gr=0.001*kg;
Newton=1; Nm=Newton*metri;
rad=1; gradi=pi*rad/180; giri=2*pi; rpm=2*pi/minuti;
g_gravity = 9.81*metri/sec^2; % Accelerazione di gravità
Kgf=g_gravity; % Kilogrammi forza
Volt=1; Amp=1; Ohm=Volt/Amp;
Henry=Volt*sec/Amp; Weber=Volt*sec;
Si=true;
No=false;
%%%%%%%%%%%%%
% Definizione dei parametri fisici del sistema noti
%%%%%%%%%%%%%
bv = 1.56*Nm*sec/rad; % Attrito lineare sul volano
Kt=8380*Nm/rad; % Rigidità dell'albero di trasmissione
R1 = (175.26/2)*mm; % Raggio della prima ruota dentata
b12=20*Newton/(100*metri/sec); % Attrito interno tra la 1° e 2° ruota
J2 = 9.276e-3*kg*metri^2; % Momento di inerzia della 2° ruota
%b2 = 0*35*Nm/(1000*rpm); % Attrito lineare della 2° ruota
R2 = (160.02/2)*mm; % Raggio della 2° ruota dentata

```

```

J3 = 4.710e-3*kg*metri^2; % Momento di inerzia della 3° ruota
%b3 = 0*35*Nm/(1000*rpm); % Attrito lineare della 3° ruota
R3 = (132.08/2)*mm; % Raggio della 3° ruota

J4 = 1.229e-2*kg*metri^2; % Momento di inerzia della 4° ruota
%b4 = 0*35*Nm/(1000*rpm); % Attrito lineare della 4° ruota
R4 = (175.26/2)*mm; % Raggio della 4° ruota

Je = J2 + R2^2*(J3/(R3^2)+J4/(R4^2)); % Momento di inerzia della ruota eq
%b1 = 0.05*Nm*sec/rad;
%be = 0.23*Nm*sec/rad;

% TABELLA DOVE MIDIFICO I PARAMETRI PER LE VARIE SIMULAZIONI %
%   Jv      J1      bt      g1      y      K1      Je    salva T_in
Mat=[%0.815 1.229e-2 0.1 0.5*0.17 1 2000000 Je;
     1.446 1.243e-2 0.01    0.4    3  5625 Je    0;
     1.446 1.243e-2 0.01    0    3  5625 Je    0;
     1.446 1.243e-2 0.01 0.5*0.17 20   320 Je    0;
     1.446 1.243e-2 0.01 0.5*0.17 3  5625 0.85*Je 0;
     1.446 1.243e-2 0.01 0.5*0.17 5   320 0.8*Je 0;
     1.446 1.243e-2 0.1   0.5*0.17 5   320 0.8*Je 0;];

A1_sin=0*Nm; % Ampiezza della sollecitazione sinusoidale
A2_sin=0*Nm; % Ampiezza della seconda armonica
Phi_2_sin=2*pi/2*rad; % Fase della seconda armonica
Nr_Im_Ciclo=2; % Numero di scoppi per giro motore
tau_fil=0.05*sec;

LTtau1_y=0.6*[250 90 75 750 1000]*Nm; %Prima arm coppia Look-up table
LTtau1_x=[800 1150 1510 2320 2540]*rpm;
LTPhi_1_y=[0 0.5 0 0]*rad; %Prima arm fase
LTPhi_1_x=[1500 1765 1840 2300]*rpm;
LTtau2_y=1.4*[250 250 190 230]*Nm; %Seconda arm coppia Look-up table
LTtau2_x=[800 1840 2320 2540]*rpm;
LTPhi_2_y=[0.5 -0.5 0 0 1 -1 0 0]*rad; %Seconda arm fase
LTPhi_2_x=[1500 1840 1860 2000 2090 2110 2125 2300]*rpm;
LTtorque_y=[ 45 50 48 50 45 40]*Nm; % coppia Look-up table
LTtorque_x=[ 0 7.8 8 10 10.5 16 ]*sec; % Velocita volano Look-up table
LTw_v_y=[1530 1600 1730 1750 1800 2020 2240 1960 1940 1800 1660]*rpm;
LTw_v_x=[ 0 0.36 0.7 1.2 1.5 6 9.7 11.5 12.5 14 16]*sec;
%LTw_v_y=[1530 1600 1730 1750 1800 2020 2240 2030 1990 1960 1940 1660]*rpm;
%LTw_v_x=[ 0 0.36 0.7 1.2 1.5 6 9.7 10.5 11 11.5 12.5 16]*sec;

%%%%%%%%%%%%%%%
% Caricamento dei dati sperimentali %
%%%%%%%%%%%%%%%
load UniMo_Data1_filtered.mat
%%%%%%%%%%%%%%%

```

```
% Definizione degli ingressi del sistema %
%%%%%%%%%%%%%%%
tau_r = 0*Nm; % Coppia resistente in uscita

%%%%%%%%%%%%%%%
% Definizione delle condizioni iniziali %
%%%%%%%%%%%%%%%
th1_0=0; % Sfasamento angolare dell' albero di trasmissione
x12_0=0; % Sfasamento lineare tra la 1^a e 2^a ruota dentata
x23_0=0; % Sfasamento lineare tra la 2^a e 3^a ruota dentata
x34_0=0; % Sfasamento lineare tra la 3^a e 4^a ruota dentata

w_v_0 = Filtered.EngineSpeed(1)*rpm; % Velocita iniziale del volano
w_1_0 = w_v_0; % Velocita iniziale della 1^ ruota
w_2_0 = w_1_0*R1/R2; % Velocita iniziale della 2^ ruota

%%%%%%%%%%%%%%%
% Simulazione del modello Simulink %
%%%%%%%%%%%%%%%
Sim=8;
Stampa=1;
a=size(Mat); % a=[n^ righe n^ colonne]

for Prova=1:a(1);

%%%%%%%%%%%%%%%
% Definizione dei parametri fisici del sistema %
%%%%%%%%%%%%%%%
Jv = Mat(Prova,1)*kg*metri^2; % Momento di inerzia del volano
J1 =Mat(Prova,2)*kg*metri^2; % Momento di inerzia della 1^ ruota
bt=Mat(Prova,3)*Nm*sec/rad; % Attrito dell'albero di trasmissione
g1 =Mat(Prova,4)*mm; % Gioco tra la 1^ e la 2^ ruota
gamma=Mat(Prova,5);
b1 = (0.23/(1+gamma*(R1/R2)^2))*Nm*sec/rad;% Attrito lineare 1^ ruota
be = gamma*b1*Nm*sec/rad; % Attrito lineare ruota eq
K1 =Mat(Prova,6)*Newton/(ym); % Rigidità dei denti
Je = Mat(Prova,7); % Momento di inerzia ruota eq
LT1_y=[-K1 0 0 K1]; % Prima Look-up table
LT1_x=[-g1-1 -g1 g1 g1+1];
salva_T_in=Mat(Prova,8); %salva_T_in=1 carico la coppia
%salvata =0 non la carico

%%%%%%%%%%%%%%%
% Calcolo delle pulsazioni di risonanza
numa=sqrt(-4*J1*Jv*Je*K1*Kt*(Je*R1^2+(J1+Jv)*R2^2)+(Je*Jv*(Kt+K1*R1^2)+
```

```

J1*(Je*Kt+Jv*K1*R2^2))^2)

omega1= abs(sqrt(-(Kt/(2*J1))-(K1*R1^2/(2*J1))-(Kt/(2*Jv))-  

(K1*R2^2/(2*Je))-(numa/(2*Je*J1*Jv)))))
omega2= abs(sqrt(-(Kt/(2*J1))-(K1*R1^2/(2*J1))-(Kt/(2*Jv))-  

(K1*R2^2/(2*Je))+(numa/(2*Je*J1*Jv)))))

omega1v=(omega1/rpm)/Nr_Im_Ciclo
omega2v=(omega2/rpm)/Nr_Im_Ciclo

% Simulazione

T_sim=16*sec;
Tc=Filtered.Time(2)-Filtered.Time(1);
Torque_in = Filtered.PTOTorque + 0*Jv*Filtered.dEngineSpeed +
Filtered.EngineSpeed*rpm*bv;
Conti=1; %nel file mdl selezionare lo switch =1 col from workspace
% =0 Look-up table

sim('UniMo_Data1_sim2_mdl',T_sim)

Data_sim.Time = t;
Data_sim.PTOTorque = tau_m;
Data_sim.EngineSpeedFiltered = w_vfil/rpm;

[time_minmax_sim,torque_minmax_sim]=picchi(Data_sim.Time,Data_sim.PTOTorque);

figure(1)
clf
plot(time_minmax_sim,torque_minmax_sim)
hold on
plot(time_minmax_sim(1:2:length(time_minmax_sim)),  

torque_minmax_sim(1:2:length(time_minmax_sim)),'*r')
plot(time_minmax_sim(2:2:length(time_minmax_sim)),  

torque_minmax_sim(2:2:length(time_minmax_sim)),'*g')

T_max_sim=[];
for ii=3:2:length(time_minmax_sim)
T_max_sim = [T_max_sim (time_minmax_sim(ii)-time_minmax_sim(ii-2))];
end
T_min_sim=[];
for ii=4:2:length(time_minmax_sim)
T_min_sim = [T_min_sim (time_minmax_sim(ii)-time_minmax_sim(ii-2))];
end
ylabel( 'PTO torque [Nm] ' )
xlabel('Time [s]')
grid on
axis([0 16 -600 600])
title(['Coppia Misurata. Sim nr. ' num2str(Sim) ' Prova nr.'  

num2str(Prova) ' Con.' num2str(Conti)])
legend(num2str(Mat(Prova,1:a(2)-2),3),'Location','Best')

if Stampa

```

```

eval(['print -depsc Picchi_Simulazioni_Prov_ num2str(Prova)
      num2str(Conti) num2str(Sim) '_Tau_t.eps'])
end

% figure (2)
% subplot(2,1,1)
% ylabel('Periodo [s]')
% xlabel('Time [s]')
% ylim( [0.01 0.022] )
% hold on
% plot(time_minmax_sim(3:2:length(time_minmax_sim)),T_max_sim,'r')
% subplot(2,1,2)
% ylabel('Periodo [s]')
% xlabel('Time [s]')
% ylim( [0.01 0.022] )
% hold on
% plot(time_minmax_sim(4:2:length(time_minmax_sim)),T_min_sim,'b')

kk=1;
ind_minmax_sim=[];
for ii=1:length(Data_sim.Time)
    if((Data_sim.Time(ii)==time_minmax_sim(kk))&&(kk<length(time_minmax_sim)))
        ind_minmax_sim=[ind_minmax_sim ii];
        kk=kk+1;
    end
end

ind_max_sim=ind_minmax_sim(1:2:length(ind_minmax_sim));
ind_min_sim=ind_minmax_sim(2:2:length(ind_minmax_sim));

figure (3)
clf
xlabel( 'Engine speed [RPM]' )
ylabel( 'PTO torque [Nm]' )
xlim( [1500 2300] )
hold on
plot( Data_sim.EngineSpeedFiltered(ind_max_sim),
      Data_sim.PTOTorque(ind_max_sim),'r.');
plot( Data_sim.EngineSpeedFiltered(ind_min_sim),
      Data_sim.PTOTorque(ind_min_sim),'b.');
grid on
title(['Massimi e minimi. Sim nr. ' num2str(Sim) ' Prova nr.'
        num2str(Prova) ' Con.' num2str(Conti)])
legend(num2str(Mat(Prova,1:a(2)-2),3),'Location','Best')
if Stampa
    eval(['print -depsc Picchi_Simulazioni_Prov_ num2str(Prova)
          num2str(Conti) num2str(Sim) '_MaxMin.eps'])
end

%figure (4)
%clf

```

```
%xlabel( 'Engine speed [RPM]' )
%ylabel( 'Period [s]' )
%xlim( [1800 2300] )
%hold on
%plot(Data_sim.EngineSpeedFiltered(ind_max_sim(1:length(T_max_sim))),T_max_sim)
%plot( Data_sim.EngineSpeedFiltered(ind_min_sim),T_min_sim );
%axis([1800 2300 0.01 0.025])
%grid on
%title(['Prova nr. ' num2str(Prova)])
%if Stampa
% eval(['print -depsc Picchi_Simulazioni_Prov_ ' num2str(Prova)
%           num2str(Conti) num2str(Sim) '_T.eps'])
%end

figure(5);
clf
plot(t,F);
hold on
grid on
title(['Forza generata dal gioco-elemento elastico Sim nr. ' num2str(Sim)
       ' Prova nr.' num2str(Prova) ' Con.' num2str(Conti)])
ylabel('N')
xlabel('Time [s]')
legend(num2str(Mat(Prova,1:a(2)-2),3),'Location','Best')
if Stampa
    eval(['print -depsc Picchi_Simulazioni_Prov_ ' num2str(Prova)
          num2str(Conti) num2str(Sim) '_F.eps'])
end

figure(6)
plot(t,x1/mm);
grid on
title(['Schiacciamenti tra i denti Sim nr. ' num2str(Sim) ' Prova nr.'
       num2str(Prova) ' Con.' num2str(Conti)])
ylabel('Pos. x1 [mm]')
xlabel('Time [s]')
legend(num2str(Mat(Prova,1:a(2)-2),3),'Location','Best')
if Stampa
    eval(['print -depsc Picchi_Simulazioni_Prov_ ' num2str(Prova)
          num2str(Conti) num2str(Sim) '_schiacciamento.eps'])
end

if(salva_T_in)
    T_sim=16*sec;
    Tc=Filtered.Time(2)-Filtered.Time(1);
    Torque_in = Filtered.PTOTorque + 0*Jv*Filtered.dEngineSpeed +
               Filtered.EngineSpeed*rpm*bv;

    sim('UniMo_Data1_sim5.mdl',T_sim)

    Data_sim.Time = t;

```

```

Data_sim.PTOTorque = tau_m;
Data_sim.EngineSpeedFiltered = w_vfil/rpm;

[time_minmax_sim,torque_minmax_sim]=
picchi(Data_sim.Time,Data_sim.PTOTorque);

figure(1)
clf
plot(time_minmax_sim,torque_minmax_sim)
hold on
plot(time_minmax_sim(1:2:length(time_minmax_sim)),
      torque_minmax_sim(1:2:length(time_minmax_sim)),'*r')
plot(time_minmax_sim(2:2:length(time_minmax_sim)),
      torque_minmax_sim(2:2:length(time_minmax_sim)),'*g')

T_max_sim=[];
for ii=3:2:length(time_minmax_sim)
    T_max_sim=[T_max_sim (time_minmax_sim(ii)-time_minmax_sim(ii-2))];
end
T_min_sim=[];
for ii=4:2:length(time_minmax_sim)
    T_min_sim=[T_min_sim (time_minmax_sim(ii)-time_minmax_sim(ii-2))];
end
ylabel('PTO torque [Nm]')
xlabel('Time [s]')
grid on
axis([0 16 -600 600])
title(['Coppia Misurata. Sim nr. ' num2str(Sim) ' Prova nr.'
       num2str(Prova) ' Con. ' num2str(Conti) ' Tauin salvata'])
legend(num2str(Mat(Prova,1:a(2)-2),3),'Location','Best')

if Stampa
    eval(['print -depsc Picchi_Simulazioni_Prov_ ' num2str(Prova)
          num2str(Conti) num2str(Sim) num2str(salva_T_in)'_Tau_t.eps'])
end

% figure (2)
% subplot(2,1,1)
% ylabel('Periodo [s]')
% xlabel('Time [s]')
% ylim( [0.01 0.022] )
% hold on
% plot(time_minmax_sim(3:2:length(time_minmax_sim)),T_max_sim,'r')
% subplot(2,1,2)
% ylabel('Periodo [s]')
% xlabel('Time [s]')
% ylim( [0.01 0.022] )
% hold on
% plot(time_minmax_sim(4:2:length(time_minmax_sim)),T_min_sim,'b')

kk=1;

```

```

ind_minmax_sim=[];
for ii=1:length(Data_sim.Time)
    if((Data_sim.Time(ii)==time_minmax_sim(kk))&&(kk<length(time_minmax_sim)))
        ind_minmax_sim=[ind_minmax_sim ii];
        kk=kk+1;
    end
end

ind_max_sim=ind_minmax_sim(1:2:length(ind_minmax_sim));
ind_min_sim=ind_minmax_sim(2:2:length(ind_minmax_sim));

figure (3)
clf
xlabel( 'Engine speed [RPM]' )
ylabel( 'PTO torque [Nm]' )
xlim( [1500 2300] )
hold on
plot( Data_sim.EngineSpeedFiltered(ind_max_sim),
       Data_sim.PTOTorque(ind_max_sim),'r.' );
plot( Data_sim.EngineSpeedFiltered(ind_min_sim),
       Data_sim.PTOTorque(ind_min_sim),'b.' );
grid on
title(['Massimi e minimi. Sim nr. ' num2str(Sim) ' Prova nr.'
        num2str(Prova) ' Con.' num2str(Conti) ' Tauin salvata'])
legend(num2str(Mat(Prova,1:a(2)-2),3),'Location','Best')
if Stampa
    eval(['print -depsc Picchi_Simulazioni_Prov_ ' num2str(Prova)
          num2str(Conti) num2str(Sim) num2str(salva_T_in) '_MaxMin.eps'])
end

figure(5);
clf
plot(t,F);
hold on
grid on
title(['Forza generata dal gioco-elemento elastico Sim nr. 'num2str(Sim)
       ' Prova nr.' num2str(Prova) ' Con.' num2str(Conti) ' Tauin salvata'])
ylabel('N')
xlabel('Time [s]')
legend(num2str(Mat(Prova,1:a(2)-2),3),'Location','Best')
if Stampa
    eval(['print -depsc Picchi_Simulazioni_Prov_ ' num2str(Prova)
          num2str(Conti) num2str(Sim) num2str(salva_T_in) '_F.eps'])
end
end
end

```

## B.7 PlotytF0F1.m

Vengono graficati i vari tipi di segnale periodico che si possono instaurare in uscita dalla non linearità a seconda dell'eccitazione in ingresso. La graficazione

viene effettuata tramite il calcolo dei coefficienti della serie di Fourier in questo modo si riesce ad avere anche un'idea sulla bontà dei risultati coefficienti calcolati. Tali coefficienti verranno infatti poi utilizzati per calcolo delle due funzioni descrittive.

```
%%%%%%%%
%
% Plot_yt_F0_F1.m
%
% Graficazione del segnale in uscita alla non linearità di tipo soglia %
% a cui applico una costante e una sinusoide; graficazione della %
% funzione descrittiva della non linearità %
%
%%%%%%%%%%%%%
```

```
clc clear all close all

th=[0:0.01:1]*2*pi;

% graficazione del segnale periodico in out alla non linearità quando
% l'eccitazione supera solo il gioco a dx; il segnale viene graficato
% tramite il suo sviluppo in serie; in questo modo si verifica anche che
% i conti teorici siano corretti;

g=1; K=5; E=[-0.5:-0.25:-2]; X=0.8;
N=100; % numero di armoniche
figure(1) title('Segnale periodico in uscita alla non linearità')
xlabel( 'angle [rad]' ) ylabel( 'y(t) [Nm]' ) hold on for
ii=1:length(E)
if(ii==1)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'b','LineWidth',4)
elseif(ii==2)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'c','LineWidth',4)
elseif(ii==3)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'g','LineWidth',4)
elseif(ii==4)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'m','LineWidth',4)
elseif(ii==5)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'r','LineWidth',4)
elseif(ii==6)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'y','LineWidth',4)
elseif(ii==7)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'k','LineWidth',4)
end end print -depsc giocosx.eps

% graficazione del segnale periodico in out alla non linearità quando
% l'eccitazione supera entrambi i giochi

g=1; K=5; E=[0.4 0.9 -0.7 -0.1]; X=3;
N=100; % numero di armoniche
figure(2) title('Segnale periodico in uscita alla non linearità')
xlabel( 'angle [rad]' ) ylabel( 'y(t) [Nm]' ) hold on for
ii=1:length(E)
if(ii==1)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'b','LineWidth',4)
elseif(ii==2)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'r','LineWidth',4)
elseif(ii==3)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'g','LineWidth',4)
elseif(ii==4)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'k','LineWidth',4)
end end print -depsc giocosxdx.eps
```

```
% graficazione del segnale periodico in out alla non linearità quando
% l'eccitazione supera solo il gioco a sx

g=1; K=5; E=[0.5:0.25:2]; X=0.8;
N=100; % numero di armoniche
figure(3) title('Segnale periodico in uscita alla non linearità')
xlabel( 'angle [rad]' ) ylabel( 'y(t) [Nm]' ) hold on for
ii=1:length(E)
if(ii==1)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'b','LineWidth',4)
elseif(ii==2)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'c','LineWidth',4)
elseif(ii==3)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'g','LineWidth',4)
elseif(ii==4)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'m','LineWidth',4)
elseif(ii==5)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'r','LineWidth',4)
elseif(ii==6)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'y','LineWidth',4)
elseif(ii==7)plot(th,Sviluppo_y_th(th,g,K,E(ii),X,N),'k','LineWidth',4)
end end print -depsc giocodx.eps

% Creo due matrici vuote dove mentre ciclo i due vettori carico il
% risultato delle 2 funzioni (funzionedesc_0 e funzionedesc_1) nella matrice

g=1; K=5;
E=[0.1:0.005:12]; %valore medio applicato in ingresso
X=[0.1:0.1:2 2.2:0.2:3.6 4:1:10]; F2_0=zeros(length(E),length(X));
F2_1=zeros(length(E),length(X)); for ll=1:length(E) for
ii=1:length(X)
    F_0(ll,ii)=funzionedesc_0(g,K,E(ll),X(ii));
    F_1(ll,ii)=funzionedesc_1(g,K,E(ll),X(ii));
end
end

%viene stampata la funzione descrittiva F_0 in funzione di E e al variare
%dì X

figure(4) xlabel( 'E' ) ylabel( 'F_0(E,X)' ) for ii=1:length(X)
hold on plot (E,F_0(:,ii),'-r') end print -depsc F_0.eps

g=1; K=5;
E=[0.1:0.1:2 2.2:0.2:3.6 4:1:10]; %valore medio applicato in ingresso
X=[0.1:0.005:12]; F_0=zeros(length(E),length(X));
F_1=zeros(length(E),length(X)); for ll=1:length(E) for
ii=1:length(X)
    F_0(ll,ii)=funzionedesc_0(g,K,E(ll),X(ii));
    F_1(ll,ii)=funzionedesc_1(g,K,E(ll),X(ii));
end
end

%viene stampata la funzione descrittiva F_1 in funzione di X e al variare
%dì E

figure(5) xlabel( 'X' ) ylabel( 'F_1(E,X)' ) for ii=1:length(E)
```

```

hold on plot (X,F_1(ii,:),'-r') end print -depsc F_1.eps

%%%%%%%%%%%%%
%
% Sviluppo_y_th.m
%
%
% Calcola i coefficienti della serie di Fourier del segnale di uscita
% alla non linearit  a seconda di dove viene applicate l'eccitazione
%
%%%%%%%%%%%%%

function y_th=Sviluppo_y_th(th,g,K,E,X,N)

if (E+X<=g)&&(E-X>=-g)
    y_th=0*th;
elseif (E+X>g)&&(E-X>=-g)&&(E<g+X)
    alfa=asin((g-E)/X);
    y_th=0*th+K*((E-g)*(pi-2*alfa)+2*X*cos(alfa))/(2*pi);
    for n=[1:N]
        if n==1
            an=0;
            bn=K*(4*(E-g)*cos(alfa)+X*(pi-2*alfa+sin(2*alfa)))/(2*pi);
        else
            an=-K*(n*X*cos(alfa)*(cos(n*alfa)+cos(n*(pi-alfa)))+
            ((E-g)*(n^2-1)+n^2*X*sin(alfa))*(sin(n*alfa)-
            sin(n*(pi-alfa))))/(n*(n^2-1)*pi);
            bn=(K*(cos(alfa*n)*((E-g)*(n^2-1)+n^2*X*sin(alfa))-
            cos(n*(pi-alfa))*((E-g)*(n^2-1)+n^2*X*sin(alfa))-n*X*cos(alfa)-
            *(sin(n*alfa)+sin(n*(pi-alfa)))))/(n*(n^2-1)*pi);
        end
        y_th=y_th+an*cos(n*th)+bn*sin(n*th);
    end
elseif (E+X<=g)&&(E-X<-g)&&(E>-g-X)
    beta=-asin((-g-E)/X);
    y_th=0*th+K*((E+g)*(pi-2*beta)-2*X*cos(beta))/(2*pi);
    for n=[1:N]
        if n==1
            an=0;
            bn=K*(-4*(E+g)*cos(beta)+X*(pi-2*beta+sin(2*beta)))/(2*pi);
        else
            an=K*(n*X*cos(beta)*(cos(n*(beta-2*pi))+cos(n*(beta+pi)))-
            ((E+g)*(1-n^2)+n^2*X*sin(beta))*(sin(n*(beta-2*pi))+
            sin(n*(pi+beta))))/(n*(n^2-1)*pi);
            bn=(K*(cos(n*(beta+pi))*((E+g)*(n^2-1)-n^2*X*sin(beta))-
            cos(n*(beta-2*pi))*((E+g)*(1-n^2)+n^2*X*sin(beta))+
            n*X*cos(beta)*(sin(n*(beta+pi))+sin(n*(2*pi-beta)))))/
            (n*(n^2-1)*pi);
        end
        y_th=y_th+an*cos(n*th)+bn*sin(n*th);
    end
elseif (E+X>g)&&(E-X<-g)

```

```

alfa=asin((g-E)/X);
beta=-asin((-g-E)/X);
y_th=0*th-2*K*(alfa*(E-g)+beta*(E+g)-E*pi-X*cos(alfa)+X*cos(beta))/(2*pi);
for n=[1:N]
    if n==1
        an=0;
        bn=K*(4*(E-g)*cos(alfa)-4*(E+g)*cos(beta)+X*(-2*(alfa+beta-pi)+sin(2*alfa)+sin(2*beta)))/(2*pi);
    else
        an=(K*(-n*X*cos(alfa)*(cos(n*alfa)+cos(n*(pi-alfa)))+n*X*cos(beta)*(cos(n*(beta-2*pi))+cos(n*(beta+pi)))-(E-g)*(n^2-1)+n^2*X*sin(alfa))*(sin(alfa*n)-sin(n*(-alfa+pi)))-((E+g)*(n^2-1)-n^2*X*sin(beta))*(sin(n*(beta-2*pi))+sin(n*(beta+pi))))/(n*(n^2-1)*pi);
        bn= (K*(cos(alfa*n)*((E-g)*(n^2-1)+n^2*X*sin(alfa))-cos(n*(pi-alfa))*((E-g)*(n^2-1)+n^2*X*sin(alfa))+cos(n*(beta+pi)))*((E+g)*(1-n^2)+n^2*X*sin(beta))+cos(n*(beta-2*pi))*((E+g)*(1-n^2)+n^2*X*sin(beta))-n*X*cos(alfa)*(sin(alfa*n)+sin(n*(pi-alfa)))+n*X*cos(beta)*(sin(n*(beta+pi))+sin(n*(2*pi-beta)))))/(n*(n^2-1)*pi);
    end
    y_th=y_th+an*cos(n*th)+bn*sin(n*th);
end
elseif (E>=g+X)
    y_th=0*th+K*(X*sin(th)-g+E);
elseif (E<=-g-X)
    y_th=0*th+K*(X*sin(th)+g+E);
end

%%%%%
% % funzionedesc_0.m %
%
% Calcola la funzione descrittiva F_0 a partire dai coefficienti della serie di Fourier %
%
%%%%%

function F_0=funzionedesc_0(g,K,E,X)

if (E+X<=g)&&(E-X>=-g)
    F_0=0;
elseif (E+X>g)&&(E-X>=-g)&&(E<g+X)
    alfa=asin((g-E)/X);
    F_0=K*((E-g)*(pi-2*alfa)+2*X*cos(alfa))/(2*pi*E);
elseif (E+X<=g)&&(E-X<-g)&&(E>-g-X)
    beta=-asin((-g-E)/X);
    F_0=K*((E+g)*(pi-2*beta)-2*X*cos(beta))/(2*pi*E);
elseif (E+X>g)&&(E-X<-g)
    alfa=asin((g-E)/X);
    beta=-asin((-g-E)/X);
    F_0=-2*K*(alfa*(E-g)+beta*(E+g)-E*pi-X*cos(alfa)+X*cos(beta))/(2*pi*E);
end

```

```

elseif (E>=g+X)
    F_0=K*(E-g)/E;
elseif (E<=-g-X)
    F_0=K*(E+g)/E;
end

%%%%%%%%%%%%%
%
%          funzionedesc_1.m
%
%
% Calcola la funzione descrittiva F_1 a partire dai coefficienti della %
% serie di Fourier
%
%%%%%%%%%%%%%

function F_1=funzionedesc_1(g,K,E,X)

if (E+X<=g)&&(E-X>=-g)
    F_1=0*g;
elseif (E+X>g)&&(E-X>=-g)&&(E<g+X)
    alfa=asin((g-E)/X);
    F_1=K*(4*(E-g)*cos(alfa)+X*(pi-2*alfa+sin(2*alfa)))/(2*pi*X);
elseif (E+X<=g)&&(E-X<-g)&&(E>-g-X)
    beta=-asin((-g-E)/X);
    F_1=K*(-4*(E+g)*cos(beta)+X*(pi-2*beta+sin(2*beta)))/(2*pi*X);
elseif (E+X>g)&&(E-X<-g)
    alfa=asin((g-E)/X);
    beta=-asin((-g-E)/X);
    F_1=K*(4*(E-g)*cos(alfa)-4*(E+g)*cos(beta)+X*(-2*(alfa+beta-pi)-
        sin(2*alfa)+sin(2*beta)))/(2*pi*X);
elseif (E>=g+X)
    F_1=K;
elseif (E<=-g-X)
    F_1=K;
end

```

## B.8 FindZeroInt.m

Vengono calcolate l'ampiezza la fase e il valore medio dell'oscillazione che si instaura nel sistema tramite la risoluzione delle tre equazioni di autosostentamento con il procedimento iterativo che minimizza il funzionale.

```

%%%%%%%%%%%%%
%
%          Find_Zero_Int_Funz.m
%
%
% Calcola il funzionale F(E,X,phi)
%
%%%%%%%%%%%%%

function f=Find_Zero_Int_Funz(x,g,K,a,b,w,g1s,g2s)

```

```

E=x(1);
X=x(2);
phi=x(3);
FF0=a*evalfr(g2s,0)/E-funzionedesc_0(g,K,E,X)*evalfr(g1s,0);
FF=b*evalfr(g2s,j*w)*exp(-j*phi)-
X*funzionedesc_1(g,K,E,X)*evalfr(g1s,j*w)-X*j*w;
f=(FF0)^2+(real(FF))^2+(imag(FF))^2;

%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Find_Zero_Int.m
%
%
% Risoluzione del sistema, tramite il calcolo del minimo del funzionale %
%
%%%%%%%%%%%%%%%
clc
clear all
close all
%%%%%%%%%%%%%%%
% Definizione delle unità di misura del SI %
%%%%%%%%%%%%%%%
metri=1; km=1000*metri; cm=0.01*metri; mm=0.001*metri;
sec=1; msec=0.001*sec; minuti=60*sec; ora=60*minuti;
kg=1; gr=0.001*kg;
Newton=1; Nm=Newton*metri;
rad=1; gradi=pi*rad/180; giri=2*pi; rpm=2*pi/minuti;
%%%%%%%%%%%%%%%
load SYS1
load SYS2

figure(1)
clf
figure(2)
clf
figure(3)
clf
% figure(4)
% clf

K = 320*Newton/(mm); % Rigidità dei denti tra la 1° e la 2° ruota dentata
g = 0.5*0.17*mm; % Gioco tra la 1° e la 2° ruota dentata
a = 300*Nm; % Valore medio della coppia applicata in ingresso

for w=800*[430:1:447]; % pulsazione dell'oscillazione di coppia
for b=[350:15:500]; % ampiezza dell'oscillazione di coppia
%
s=tf('s');
g2s=tf(minreal(SYS2))
%g2s=1000/(s+1000);

```

```

[n2,d2]=tfdata(g2s,'v');
g1s=tf(-minreal(SYS1))
%g1s=40^2/(s^2+4*s+40^2);
[n1,d1]=tfdata(g1s,'v');
g0s=minreal(g2s/(s+K*g1s));
%
E0=g+a*evalfr(g2s,0)/(K*evalfr(g1s,0));
bg=b*evalfr(g0s,j*w);
X0=abs(bg);
phi0=angle(bg);
[x,fval,exitflag,output] =
fminsearch(@(x) Find_Zero_Int_Funz(x,g,K,a,b,w,g1s,g2s),[E0 X0 phi0])

LT_y=[-K   0   0   K  ];      % Prima Look-up table
LT_x=[-g-1 -g  g  g+1];      %
T_sim=10;
Ts=T_sim/2000;
sim('Find_Zero_Int.mdl',T_sim)

xx=XpEt(length(XpEt)-400:length(XpEt));
Xsim=(max(xx)-min(xx))/2;
Esim=(max(xx)+min(xx))/2;

figure(3)
subplot(311)
plot(b,[x(1) E0 Esim],'*')
hold on
ylabel('E(b)')
%
subplot(312)
plot(b,[x(2) X0 Xsim],'*')
hold on
ylabel('X(b)')
%
subplot(313)
plot(b,[x(3) phi0],'*')
hold on
ylabel('phi(b)')
xlabel('Parametro b')

% figure(4)
% subplot(311)
% plot(w,[x(1) E0],'*')
% hold on
% ylabel('E(w)')
% %
% subplot(312)
% plot(w,[x(2) X0],'*')
% hold on
% ylabel('X(w)')

```

```
%      %
% subplot(313)
% plot(w,[x(3) phi0],'*')
% hold on
% ylabel('phi(w)')
% xlabel('Parametro w')
%
end
end
figure(1)
plot(t,XpEt)
hold on
plot(t,0*XpEt+g,'r--')
plot(t,0*XpEt-g,'r--')
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('E + X sinwt')

figure(2)
plot(t,Y0pY1t)
hold on
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Y0 + Y1 sinwt')
```

# Bibliografia

- [1] G. Marro, *Controlli Automatici*, Zanichelli, Bologna, 1992.
- [2] G. Marro, *Teoria dei sistemi e del controllo*, Zanichelli, Bologna, 1994.
- [3] R. Zanasi, *Power Oriented Graphs for Modelling Electric Motors*, Technical Report n. DEIS-LAR-10-96, University of Bologna, June 1993.
- [4] R. Zanasi, *Power Oriented Graphs : Basic Properties*, Technical Report n. DEIS-LAR-17-96, University of Bologna, May 1996.
- [5] P. Mazzoldi, M. Nigro,C. Voci, *Fisica - Meccanica Termodinamica - Vol.1*, EdiSES s.r.l, Napoli, 1995
- [6] M. Luise, G.M. Vitetta, *Teoria dei segnali*, McGraw-Hill, Italia, 1999
- [7] A. Kahramant, R.Singh *Non-linear dynamics of a spur gear pair*, Technical Report, Department of Mechanical Engineering, The Ohio University Nov 1989.
- [8] D.W. Dudley, D.P. Townsend, *Manuale degli ingranaggi*, McGraw-Hill, Milano, 1996
- [9] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, E. Schlegl *Una (mica tanto) breve introduzione a L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*, 2000



# Ringraziamenti

I ringraziamenti sono forse la parte più difficile da scrivere, non vorrei dimenticare qualcuno che poi se ne avesse a male; per cui se tu che stai leggendo non compari nei ringraziamenti perdonami non è mancanza di gratitudine è solo che sono le 2 di notte (sono arrivato lungo a scrivere la tesi) e a volte la stanchezza fa brutti scherzi.

Prima di tutto vorrei ringraziare il Prof. Zanasi per i suoi insegnamenti, la sua disponibilità e la sua professionalità e l'Ing.Balluchi che mi ha fornito i dati sperimentali utilizzati nell'elaborato. Un doveroso ringraziamento va poi alla Dott.ssa Grossi per il supporto e i consigli che mi sono stati dati.

Un grazie enorme a Les, Lollo, Capra e Ferro con cui sono volati questi mesi passati in laboratorio. Un particolare ringraziamento al Monto che mi ha sopportato in questi tre anni di studio e che si dovrà rassegnare alle mie domande ancora per altri due.. e a Pelle con cui le lezioni diventano sempre più leggere. Non posso non ringraziare i miei compagni di squadra con i quali tutti i santi giorni mi trovo ad allenarmi (ma chi me lo ha fatto fare di giocare a pallanuoto...): Lollo e Erick le prove viventi che portieri non si diventa ma si nasce, Massa l'uomo immagine del gruppo , Nando che come me ha la mano fracassata (poco male tanto a tirare fa schifo..), Fede (ice man) che passa più tempo dai fisioterapisti che in vasca..., Gabry e le sue palombe , Marcello che è diventato secchione tutto di un colpo e si è messo a studiare.., Pietro che mi ha iniziato a questo sport, Sacchi (black hole) con lui le cene iniziano ma non finiscono mai.., Davide (Slot), Rud (Ally) senza il quale dovrei andare ad allenamento a piedi, Brosio e la casa al lago.., Sgarra il bagnino di Campogalliano , Paolone mano di pietra ma cuore da leone , Nora che da quando è caduto nel buco è diventato più furbo, il Doctor Emy e Mala che per raggiunti limiti di età hanno appeso la calottina al chiodo..

Un grazie enorme anche agli amici della parrocchia: Simo, Cirso, Alle e la Volpe, Korg, la Vale, Enry, Manzo, la Stefy (che si sta guadagnando il paradiso sopportando mio fratello), la Patty, Fra, Bodo, Art, Gazza e la Rita.

Alla fine i ringraziamenti più importanti: quelli alla mia famiglia! che mi ha sostenuto e sopportato in questi anni di studio; colgo anche l'occasione per ricordandogli che la mia intenzione è quella di continuare a studiare per molti

e molti anni (meglio studiare che lavorare..) e che quindi dovrà sopportarmi ancora per un pò; ci tengo in modo particolare a ringraziare la persona con cui divido la camera (e a cui spesso rubo i vestiti), mio fratello Luca, ricordandogli che nonostante il nostro rapporto di odio e amore in fondo ma molto in fondo gli voglio bene.

Per ultima ma non per questo meno importante (anzi è sicuramente la persona più importante) ringrazio Michela che mi è sempre stata vicina nei momenti difficili credendo sempre nelle mie possibilità.