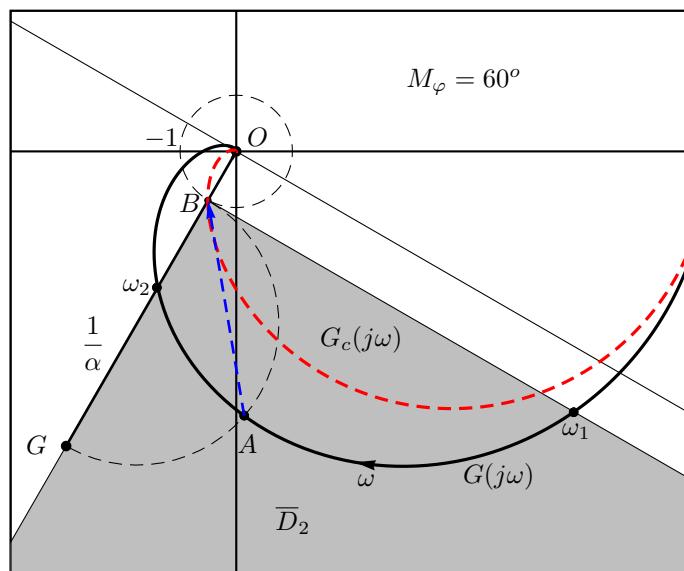


Roberto Zanasi

# Esercizi di Controlli Automatici

Compiti d'esame svolti



Progetto Leonardo

# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>i</b>
<b>1 Sistemi dinamici lineari: analisi temporale</b>	<b>1</b>
1.1 Note introduttive . . . . .	1
1. Trasformate di Laplace . . . . .	1
2. Risposta al gradino . . . . .	3
3. Formula di Mason . . . . .	6
1.2 Trasformate di Laplace . . . . .	9
1. Domande . . . . .	9
2. Esercizi . . . . .	11
1.3 Risposta al gradino . . . . .	19
1. Domande . . . . .	19
2. Esercizi . . . . .	26
1.4 Formula di Mason . . . . .	35
1. Esercizi . . . . .	35
<b>2 Sistemi dinamici lineari: analisi frequenziale</b>	<b>41</b>
2.1 Note introduttive . . . . .	41
1. Funzione di risposta armonica . . . . .	41
2. Diagrammi di Bode . . . . .	43
3. Diagrammi di Nyquist . . . . .	48
2.2 Funzione di risposta armonica . . . . .	53
1. Domande . . . . .	53
2. Esercizi . . . . .	55
2.3 Diagrammi di Bode . . . . .	60
1. Domande . . . . .	60
2. Esercizi . . . . .	63
2.4 Diagrammi di Nyquist . . . . .	77
1. Domande . . . . .	77
2. Esercizi . . . . .	81
2.5 Diagrammi di Nichols . . . . .	86
1. Domande . . . . .	86
2. Esercizi . . . . .	89

---

<b>3 Sistemi lineari in retroazione</b>	<b>91</b>
3.1 Note introduttive . . . . .	91
1. Errori a regime . . . . .	91
2. Criterio di Routh . . . . .	92
3. Luogo delle radici . . . . .	96
4. Contorno delle radici . . . . .	101
3.2 Errori a regime . . . . .	103
1. Domande . . . . .	103
2. Esercizi . . . . .	105
3.3 Criterio di Routh . . . . .	112
1. Domande . . . . .	112
2. Esercizi . . . . .	115
3.4 Sistemi retroazionati . . . . .	116
1. Domande . . . . .	116
3.5 Luogo e contorno delle radici . . . . .	120
1. Domande . . . . .	120
2. Esercizi . . . . .	123
<b>4 Analisi di sistemi dinamici lineari</b>	<b>129</b>
4.1 Esercizi . . . . .	129
<b>5 Sintesi di reti correttive</b>	<b>183</b>
5.1 Note introduttive . . . . .	183
1. Reti correttive . . . . .	183
5.2 Reti correttive . . . . .	190
1. Domande . . . . .	190
2. Esercizi . . . . .	194
<b>6 Sistemi non lineari</b>	<b>211</b>
6.1 Note introduttive . . . . .	211
6.2 Sistemi non lineari . . . . .	214
1. Domande . . . . .	214
2. Esercizi . . . . .	217
<b>7 Sistemi discreti</b>	<b>251</b>
7.1 Sistemi discreti . . . . .	251
1. Domande . . . . .	251
2. Esercizi . . . . .	256
<b>Bibliografia</b>	<b>267</b>

# Prefazione

Questo libro raccoglie una serie di esercizi di Controlli Automatici che sono stati proposti agli studenti della Facoltà di Ingegneria di Modena nelle prove d'esame di Controlli Automatici A, Controlli Automatici B e Controlli Automatici nel periodo 1998-2010 per i Corsi di Laurea di Ingegneria Informatica, Elettronica e delle Telecomunicazioni dell'Università di Modena e Reggio Emilia.

Il libro è suddiviso in varie sezioni, ognuna delle quali è dedicata ad uno specifico argomento di base di Controlli Automatici: analisi temporale, analisi frequenziale, sistemi retroazionati, reti correttive, non linearità e sistemi discreti. Ciascuna sezione è costituita da alcune note introduttive, da una serie di domande teoriche a risposta multipla e da una serie di esercizi d'esame svolti. Le note introduttive hanno lo scopo di richiamare i principali aspetti teorici riguardanti l'argomento della sezione e di dare alcuni suggerimenti agli studenti sul modo migliore di risolvere i compiti d'esame proposti. Queste note vengono fornite a "completamento" della parte teorica del corso di Controlli Automatici da me attualmente tenuto presso la Facoltà di Ingegneria di Modena per la quale si fa esplicito riferimento ai libri di testo [1] e [2]. Le domande teoriche a risposta multipla e gli esercizi d'esame svolti inseriti in ciascuna sezione hanno invece lo scopo di verificare la preparazione teorica e pratica dello studente sulle principali tematiche di un corso base di Controlli Automatici.

Gran parte dei grafici riportati in questo libro sono stati ottenuti in ambiente Matlab utilizzando i comandi del Control System Toolbox. Molti di questi grafici possono anche essere ottenuti utilizzando il programma di progettazione assistita TFI (Transfer Function Interpreter) [3] sviluppato dal Prof. Marro in ambiente Matlab.

Ringrazio fin da ora i lettori che volessero segnalarmi eventuali errori o imprecisioni contenute in questa prima versione del libro o che volessero semplicemente dare suggerimenti per migliorare o completare il contenuto del libro stesso. A tale scopo possono contattarmi via e-mail all'indirizzo: [roberto.zanasi@unimore.it](mailto:roberto.zanasi@unimore.it).

Colgo inoltre l'occasione per ringraziare il Prof. Claudio Bonivento e il Prof. Giovanni Marro per l'importante ruolo che hanno avuto nella mia formazione, per l'importante contributo che hanno dato allo sviluppo delle tematiche teoriche dell'Automazione e per avermi trasmesso la loro grande passione per questo settore.

Modena, Marzo 2011

L'autore

Roberto Zanasi

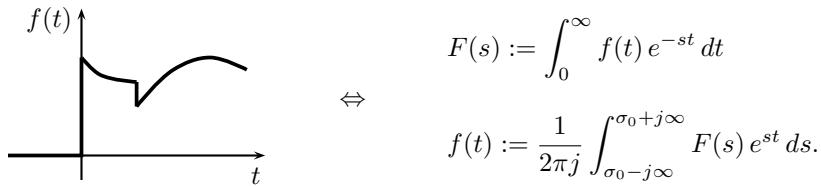
# Capitolo 1

## Sistemi dinamici lineari: analisi temporale

### 1.1 Note introduttive

#### 1. Trasformate di Laplace

- **Definizione.** La trasformata di Laplace crea una *corrispondenza biunivoca* tra segnali temporali  $f(t)$  e funzioni complesse di variabile complessa:  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ .


$$\begin{aligned} f(t) &\uparrow \\ \Leftrightarrow & \\ F(s) &:= \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ f(t) &:= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} F(s) e^{st} ds. \end{aligned}$$

Questa corrispondenza biunivoca si ha per i segnali temporali  $f(t)$  continui a tratti, nulli per  $t < 0$  e per i quali l'integrale  $\int_0^\infty |f(t)| e^{-\sigma t} dt$  assume un valore finito per un qualche  $\sigma \in \mathcal{R}$ .

- **Equazioni differenziali.** Nei controlli automatici la trasformata di Laplace viene utilizzata per studiare la dinamica dei sistemi lineari a costanti concentrate i cui parametri non variano nel tempo. Questi sistemi sono quelli descritti da equazioni differenziali ordinarie, lineari e a coefficienti costanti:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x. \quad (1.1)$$

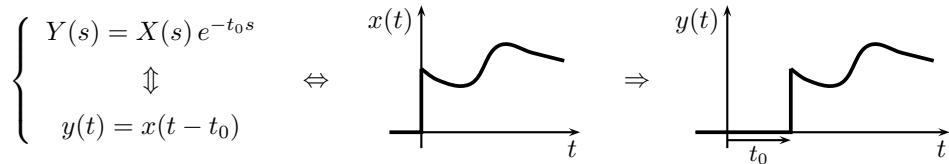
I segnali  $x(t)$  ed  $y(t)$  rappresentano, rispettivamente, le funzioni di ingresso e di uscita del sistema. Utilizzando la trasformata di Laplace e considerando condizioni iniziali nulle, l'equazione differenziale (1.1) viene messa in corrispondenza biunivoca con la seguente funzione complessa  $G(s)$  detta *funzione di trasferimento* del sistema:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (1.2)$$

- **Ritardo finito.** Un sistema fisico che ritarda di una quantità finita  $t_0$  il segnale di ingresso è un sistema lineare, infinito dimensionale (il suo spazio degli stati ha dimensione infinita) la cui dinamica è descritta, con la trasformata di Laplace, dalla funzione trascendente  $G(s) = e^{-t_0 s}$ .

$$\frac{x(t)}{X(s)} \xrightarrow{G(s)} \frac{y(t)}{Y(s)} = x(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-t_0 s}.$$

Moltiplicare in ambito trasformato una funzione  $X(s)$  per  $e^{-t_0 s}$  corrisponde in ambito temporale a ritardare di  $t_0$  il segnale  $x(t)$ :



Si tenga presente che il segnale ritardato  $y(t)$  è sempre nullo per  $0 \leq t < t_0$ . Questo aspetto viene evidenziato nel seguente esempio:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^3} \right] = \frac{t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^3} e^{-t_0 s} \right] = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \frac{(t - t_0)^2}{2} & t \geq t_0 \end{cases}$$

Per il ritardo puro  $G(s) = e^{-t_0 s}$  non vale la formula di Bode per cui tale sistema viene tipicamente inserito tra i sistemi a fase non minima.

- **Valore iniziale e valore finale.** Dato  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ , i teoremi del valore iniziale e del valore finale affermano che:

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s), \quad x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s).$$

Il teorema del valore iniziale è sempre applicabile a qualunque funzione  $X(s)$ , mentre il teorema del valore finale può essere utilizzato solo se la funzione  $X(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa con l'eccezione di un eventuale polo nell'origine. Se  $X(s)$  è una funzione razionale fratta a grado relativo  $r = n - m \geq 0$  e tipo  $h \geq 0$  si ha che:

$$X(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^h (a_n s^{n-h} + a_{n-1} s^{n-h-1} + \dots + a_h)} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_m}{a_n} \frac{1}{s^{n-m-1}} \\ x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_0}{a_h} s^{1-h} \end{cases} \quad (1.3)$$

Il comportamento della funzione  $x(t)$  per  $t = 0$  e per  $t = \infty$  è fortemente influenzato dal grado relativo  $r$  e dal tipo  $h$  della funzione  $X(s)$ . Dalla (1.3) segue infatti che valgono le seguenti affermazioni:

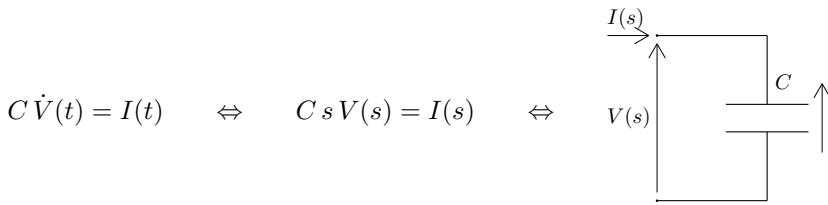
- 1) Se  $r \geq 2$  la funzione  $x(t)$  è nulla e continua in  $t = 0$ . In questo caso si può evitare

di applicare il teorema del valore iniziale perchè è già noto a priori che  $x(0) = 0$ .

- 2) Se  $r = 1$  la funzione  $x(t)$  presenta una discontinuità per  $t = 0$  il cui valore è  $x(0) = \frac{b_m}{a_n}$ , cioè il rapporto tra i coefficienti di grado più elevato dei due polinomi a numeratore e a denominatore.
- 3) Se  $r = 0$  la funzione  $x(t)$  ha un valore iniziale infinito,  $|x(0)| = \infty$ , cioè al suo interno è sicuramente presente un impulso di Dirac.
- 4) Se  $h = 0$  la funzione  $x(t)$  ha un valore finale nullo:  $x(\infty) = 0$ . (Si ricorda che per ipotesi tutti i poli della funzione  $X(s)$  sono a parte reale negativa).
- 5) Se  $h = 1$  la funzione  $x(t)$  ha un valore finale il cui valore è  $x(\infty) = \frac{b_m}{a_1}$ .

## 2. Risposta al gradino

• **Orientamento del sistema.** L'equazione differenziale (1.1) è, per definizione, un legame statico tra le funzioni  $x(t)$ ,  $y(t)$  e le loro derivate temporali. *L'equazione differenziale è correttamente orientata (con una causalità di tipo integrale) se la variabile di uscita del sistema è quella a cui è associato il massimo grado di derivazione all'interno dell'equazione differenziale.* Questa regola è equivalente alla condizione di fisica realizzabilità: *una funzione di trasferimento  $G(s)$  è fisicamente realizzabile (cioè rappresenta un sistema correttamente orientato) se il suo grado relativo è maggiore o uguale a zero:  $n \geq m$ .* Per meglio comprendere questa condizione si consideri, per esempio, il seguente sistema lineare:



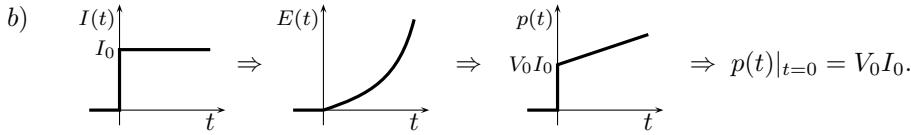
L'energia accumulata nel sistema è:  $E(t) = \frac{1}{2} C V^2(t)$ . Tale energia varia nel tempo solo se è presente un flusso di potenza  $p(t) = \dot{E}(t) = V(t) I(t)$  in ingresso al sistema. Da un punto di vista *matematico* il sistema può essere orientato in due modi diversi:



Da un punto di vista *energetico* solo l'orientamento b), cioè  $I(s)$  in ingresso e  $V(s)$  in uscita, è fisicamente realizzabile perchè è l'unico compatibile con una scelta arbitraria del segnale  $I(s)$  in ingresso. L'orientamento a) non è infatti compatibile con un gradino di tensione  $V(t)$  in ingresso perchè questo implicherebbe per  $t = 0$  una variazione istantanea dell'energia  $E(t)$  accumulata nel sistema e quindi un flusso di potenza  $p(t)$  infinito per  $t = 0$ .

$$a) \quad \begin{array}{c} V(t) \\ \uparrow \\ V_0 \\ \hline t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} E(t) \\ \uparrow \\ \frac{1}{2} C V_0^2 \\ \hline t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} p(t) \\ \uparrow \\ \frac{1}{2} C V_0^2 \delta(t) \\ \hline t \end{array} \Rightarrow p(t)|_{t=0} = \infty.$$

L'orientamento b) è invece compatibile con un gradino di corrente  $I(t)$  in ingresso:



In questo caso l'andamento della tensione in uscita  $V(s)$  a partire dalla condizione iniziale  $V_0$  può essere facilmente calcolato utilizzando la trasformata di Laplace:

$$V(s) = \frac{V_0}{s} + \frac{I_0}{C s^2} \quad \rightarrow \quad V(t) = V_0 + \frac{I_0}{C} t.$$

Dalla  $V(t)$  si ricavano gli andamenti temporali della potenza  $p(t)$  e dell'energia  $E(t)$ :

$$p(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 + \frac{I_0^2}{C} t, \quad \rightarrow \quad E(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau = V_0 I_0 t + \frac{I_0^2}{2C} t^2.$$

La potenza  $p(t)$  è discontinua per  $t = 0$  mentre l'energia  $E(t)$  è sempre continua.

• **Scomposizione in fratti semplici.** Sia  $Y(s)$  una funzione razionale fratta a poli semplici posta nella forma poli-zeri. La scomposizione in fratti semplici della  $Y(s)$  può essere fatta (nel caso di poli semplici) nel seguente modo:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \quad (1.4)$$

dove con  $K_i$  si indicano i seguenti coefficienti:

$$K_i = |(s - p_i)Y(s)|_{s=p_i} \quad (1.5)$$

che prendono il nome di *residui* della funzione  $Y(s)$ . La formula (1.5) vale anche nel caso di poli  $p_i$  complessi coniugati. La scomposizione (1.4) può essere utilizzata solo se la funzione  $Y(s)$  ha grado relativo  $r \geq 1$  ed è nella forma poli-zeri. Se la funzione  $Y(s)$  ha grado relativo  $r = 0$  può sempre essere scomposta nel seguente modo come somma di un termine costante  $y_0$  e di una funzione  $Y_1(s)$  con grado relativo  $r \geq 1$ :

$$Y(s) = y_0 + Y_1(s) \quad \text{dove} \quad y_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s), \quad Y_1(s) = Y(s) - y_0.$$

La funzione  $Y_1(s)$  è ora essere scomponibile in fratti semplici utilizzando la (1.4).

• **Polli complessi coniugati.** Nella scomposizione in fratti semplici è utile tenere accoppiati i termini corrispondenti ai poli complessi coniugati  $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$ . I residui  $K_{1,2}$  corrispondenti ai poli complessi coniugati  $p_{1,2}$  sono anch'essi complessi coniugati,  $K_1 = K_2^* = u \pm jv$ , e possono essere calcolati utilizzando la formula (1.5). Ad ogni coppia di poli semplici complessi coniugati  $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$  è sempre associato un termine temporale  $y_{1,2}(t)$  oscillatorio smorzato che ha la seguente struttura:

$$y_{1,2}(t) = M_1 e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{dove} \quad M_1 = 2|K_1|, \quad \varphi_1 = \arg K_1.$$

Si noti che la parte reale  $-\sigma$  e la pulsazione  $\omega$  dei poli complessi  $p_{1,2}$  determinano completamente il termine esponenziale  $e^{-\sigma t}$  e la pulsazione del termine periodico

$\cos(\omega t + \varphi_1)$  del termine temporale  $y_{1,2}(t)$ .

• **Forma mista.** Se la funzione  $Y(s)$  non è stata posta nella forma poli-zeri, ma è in forma mista, vale la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(a_1s+b_1)(a_2s+b_2) \cdots (a_ns+b_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{K}_i}{a_is+b_i} \Rightarrow y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{K}_i}{a_i} e^{-\frac{b_i}{a_i}t}$$

dove i coefficienti  $\bar{K}_i$  si calcolano utilizzando la seguente formula:

$$\bar{K}_i = |(a_is+b_i)Y(s)|_{s=-\frac{b_i}{a_i}}.$$

Quando  $a_i = 1$ , il coefficiente  $\bar{K}_i$  coincide con il residuo  $K_i$ .

• **Residui.** Nella scomposizione in fratti semplici di una funzione  $Y(s)$ , prendono il nome di *residui* i coefficienti  $K_i$  dei termini con polinomio a denominatore di primo grado. È utile ricordare che valgono le seguenti proprietà:

1) la somma dei residui è nulla se il grado relativo della funzione  $Y(s)$  è maggiore o uguale a due:  $r = n - m \geq 2$ . Esempio:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

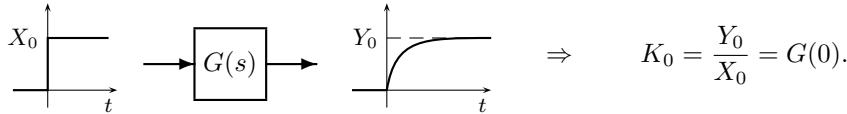
Il grado relativo è  $r = 3$  per cui la somma dei due termini  $K_1$  e  $K_2$  è nulla. Dopo aver calcolato  $K_2 = 1$ , il valore di  $K_1$  è  $K_1 = -K_2 = -1$ .

2) la somma dei residui è  $\frac{b_m}{a_n}$  se il grado relativo della funzione  $Y(s)$  è uguale a uno:  $r = n - m = 1$ . Si ricorda che  $b_m$  e  $a_n$  sono i coefficienti di grado massimo dei due polinomi a numeratore e a denominatore della funzione  $Y(s)$ . Esempio:

$$Y(s) = \frac{2s^3 + 3s^2 + 3s + 4}{s(s+1)^2(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{-2}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{(s+1)} + \frac{K_3}{(s+2)}$$

Il grado relativo è  $r = 1$  per cui la somma dei residui  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  è uguale a 2. Calcolato  $K_1 = 2$  e  $K_3 = 3$  il valore di  $K_2$  è  $K_2 = 2 - K_1 - K_3 = -3$ .

• **Guadagno statico.** Il *guadagno statico*  $K_0$  di un sistema  $G(s)$  è definito come il rapporto  $Y_0/X_0$  tra l'ampiezza  $Y_0$  del segnale in uscita che si ottiene a regime quanto il sistema  $G(s)$  è sollecitato in ingresso con un gradino costante di ampiezza  $X_0$ .



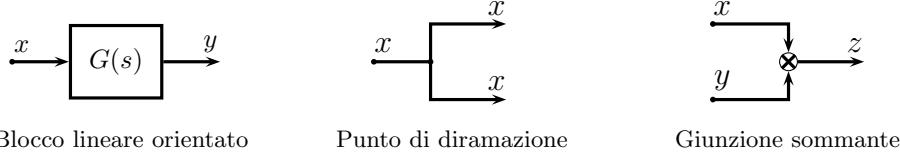
Utilizzando il criterio del valore finale è facile dimostrare che il guadagno statico  $K_0$  di un sistema coincide con  $G(0) = G(s)|_{s=0}$  cioè con il valore della  $G(s)$  per  $s = 0$ :

$$Y_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \frac{X_0}{s} = G(0) X_0 \Rightarrow K_0 = \frac{Y_0}{X_0} = G(0).$$

Da un punto di vista pratico il guadagno statico è definibile solo per sistemi  $G(s)$  asintoticamente stabili (gli unici per i quali l'uscita a regime tende ad un valore costante), ma per estensione è prassi parlare di guadagno statico  $G(0)$  anche per i sistemi  $G(s)$  instabili o semplicemente stabili.

### 3. Formula di Mason

- **Schemi a blocchi.** I sistemi dinamici complessi vengono spesso rappresentati graficamente mediante *schemi a blocchi*. Nel caso di sistemi lineari, un qualunque schema a blocchi si ottiene utilizzando solo tre diversi elementi grafici: *un blocco orientato*, *un punto di diramazione* e *una giunzione sommante*:



- **Formula di Mason.** Dato uno schema a blocchi lineare, il modo più rapido per calcolare la funzione di trasferimento  $T(s)$  che lega un segnale di ingresso  $X(s)$  ad un segnale di uscita  $Y(s)$  è quello di utilizzare la seguente *formula di Mason*:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$$

dove  $\Delta$  è il determinante dell'intero schema a blocchi,  $\mathcal{P}$  è l'insieme degli indici di tutti i percorsi distinti che collegano l'ingresso  $X(s)$  all'uscita  $Y(s)$ ,  $P_i$  è il coefficiente dell' $i$ -esimo percorso (cioè il prodotto dei coefficienti di tutti i rami che compongono il percorso) e  $\Delta_i$  è il determinante dello schema a blocchi parziale che si ottiene eliminando tutti gli elementi appartenenti al percorso  $i$ -esimo. Il determinante  $\Delta$  di uno schema a blocchi si calcola nel modo seguente:

$$\Delta := 1 - \sum_{i \in \mathcal{J}_1} A_i + \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}_2} A_i A_j - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{J}_3} A_i A_j A_k + \dots$$

dove  $A_i$  è il coefficiente dell' $i$ -esimo anello,  $\mathcal{J}_1$  è l'insieme degli indici di tutti gli anelli dello schema,  $\mathcal{J}_2$  è l'insieme degli indici di tutte le coppie di anelli che non si toccano,  $\mathcal{J}_3$  è l'insieme degli indici di tutte le terne di anelli che non si toccano, ecc.

- **Esempio 1.** Si consideri lo schema a blocchi mostrato in Fig. 1.1 che descrive la

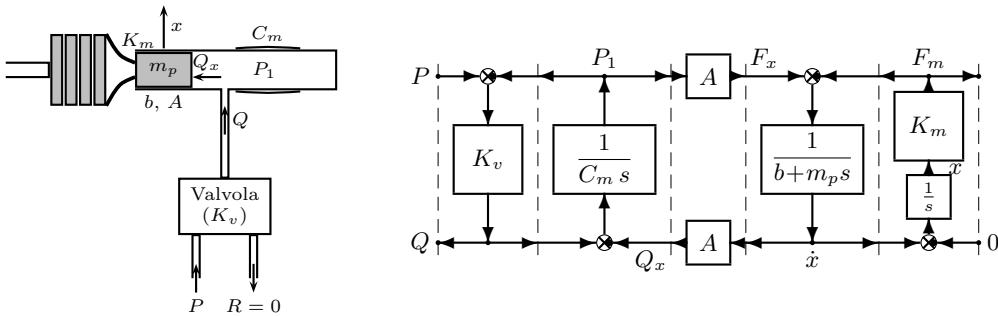


Figura 1.1: Schema a blocchi che descrive la dinamica di una frizione idraulica.

dinamica di una frizione idraulica. Utilizzando le seguenti variabili ausiliarie:

$$G_1 = K_v, \quad G_2 = \frac{1}{C_m s}, \quad G_3 = \frac{1}{b + m_p s}, \quad G_4 = \frac{K_m}{s}, \quad (1.6)$$

ed applicando la formula di Mason si ottiene la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{F_m(s)}{P(s)} = \frac{A G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 + A^2 G_2 G_3 + G_3 G_4 + G_1 G_2 G_3 G_4}. \quad (1.7)$$

Sostituendo le (1.6) in (1.7) si ottiene:

$$G(s) = \frac{A K_m K_v}{C_m m_p s^3 + (C_m b + K_v m_p) s^2 + (A^2 + C_m K_m + K_v b) s + K_m K_v}. \quad (1.8)$$

• **Proprietà della formula di Mason.** Quando si applica la formula di Mason per portare in forma minima uno schema a blocchi lineare che rappresenta la dinamica di un sistema fisico, è bene tenere presente che valgono le seguenti proprietà:

- *L'ordine n della funzione di trasferimento  $G(s)$ , cioè il numero dei poli della funzione  $G(s)$ , è pari al numero n di elementi fisici del sistema che possono accumulare energia in modo indipendente oppure, in modo equivalente, è pari al numero n di integratori distinti presenti all'interno dello schema a blocchi.* Nel caso dello schema a blocchi di Fig. 1.1 si ha  $n = 3$ . I tre elementi dinamici che caratterizzano la frizione idraulica sono: capacità idraulica  $C_m$ , massa del pistone  $m_p$  e rigidità della molla  $K_m$ .
- *La stabilità del sistema dipende solamente dal determinante del grafo  $\Delta$  e non dalla coppia di segnali ingresso-uscita che è stata scelta.* Tutte le funzioni di trasferimento che si possono ottenere da uno schema a blocchi utilizzando la formula di Mason hanno a denominatore lo stesso determinante  $\Delta$ . Per studiare la stabilità dello schema a blocchi è sufficiente applicare il criterio di Routh all'equazione caratteristica  $\Delta(s) = 0$ .
- Data una qualsiasi coppia di segnali ingresso-uscita,  $X(s)$  ed  $Y(s)$ , presa all'interno dello schema a blocchi, *il grado relativo r = n - m della funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$  è pari al numero minimo r di integratori che si è costratti ad attraversare quando si passa dall'ingresso  $X(s)$  all'uscita  $Y(s)$ .* Nel caso dello schema a blocchi di Fig. 1.1, il numero r di integratori che si incontra passando da  $P(s)$  a  $F_m(s)$  è  $r = 3$ , per cui il grado relativo della funzione  $G(s)$  in (1.8) è  $r = 3$ . Utilizzando questa regola è possibile affermare *a priori* che il grado relativo r della funzione di trasferimento  $G_1(s) = \frac{F_x(s)}{P(s)}$  che lega la variabile  $P(s)$  in ingresso alla variabile  $F_x(s)$  in uscita è  $r = 1$ , cioè la funzione  $G_1(s)$  ha  $n = 3$  poli e  $m = n - r = 1$  zeri.
- *Se il sistema fisico che ha generato lo schema a blocchi è composto solamente da elementi fisici che accumulano e/o dissipano energia, allora è possibile affermare a priori che tutti i poli della funzione  $G(s)$ , cioè gli zeri dell'equazione caratteristica  $\Delta(s) = 0$ , sono tutti a parte reale negativa o nulla, cioè il sistema  $G(s)$  è asintoticamente stabile o semplicemente stabile.*
- *Se tutti gli elementi fisici  $d_i$  che dissipano energia presenti all'interno del sistema vengono posti uguali a zero, l'equazione caratteristica  $\Delta(s) = 0$  si semplifica e diventa un'equazione polinomiale in s,  $\Delta^*(s) = \lim_{d_i \rightarrow 0} \Delta(s) = 0$ , nella quale*

compaiono solo le potenze "pari" o solo le potenze "dispari". Inoltre, le soluzioni  $j\omega^*$  dell'equazione semplificata  $\Delta^*(s) = 0$  coincidono con le pulsazioni di risonanza  $\omega^*$  del sistema fisico in oggetto. Nel caso della funzione  $G(s)$  in (1.8), se si pone  $K_v = 0$  e  $b = 0$  si ottiene la seguente equazione polinomiale  $\Delta^*(s)$  e la seguente pulsazione di risonanza  $\omega^*$ :

$$\Delta^*(s) = C_m m_p s^3 + (A^2 + C_m K_m) s = 0, \quad \omega^* = \sqrt{\frac{A^2 + C_m K_m}{C_m m_p}}.$$

Le soluzioni dell'equazione  $\Delta^*(s) = 0$  sono sempre tutte sull'asse immaginario, cioè sono sempre tutte a parte reale nulla.

- **Esempio 2.** Si consideri lo schema a blocchi mostrato in Fig. 1.2 che descrive la

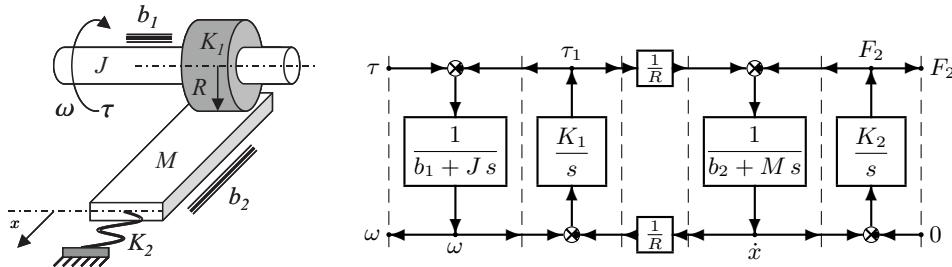


Figura 1.2: Schema a blocchi che descrive la dinamica di un sistema meccanico.

dinamica di un sistema meccanico costituito da un albero di inerzia  $J$ , che ruota a velocità  $\omega$ , a cui è applicata la coppia esterna  $\tau$ . Tramite un rullo elastico avente rigidità torsionale  $K_1$  e raggio  $R$ , l'albero spinge una massa  $M$  che comprime una molla con coefficiente di rigidità  $K_2$ . La funzione di trasferimento  $G(s)$  che lega l'ingresso  $\tau(s)$  all'uscita  $F_2(s)$  si calcola facilmente utilizzando la formula di Mason:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{F_2(s)}{\tau(s)} = \frac{\frac{K_1 K_2}{R s^2 (b_1 + J s) (b_2 + M s)}}{1 + \frac{K_1}{s (b_1 + J s)} + \frac{K_1}{R^2 s (b_2 + M s)} + \frac{K_2}{s (b_2 + M s)} + \frac{K_1 K_2}{s^2 (b_1 + J s) (b_2 + M s)}} \\ &= \frac{K_1 K_2 R}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

dove  $a_4 = J M R^2$ ,  $a_3 = (b_2 J + b_1 M) R^2$ ,  $a_2 = J K_1 + b_1 b_2 R^2 + J K_2 R^2 + K_1 M R^2$ ,  $a_1 = b_1 K_1 + b_2 K_1 R^2 + b_1 K_2 R^2$  e  $a_0 = K_1 K_2 R^2$ . Se si annullano le dissipazioni,  $b_1 = b_2 = 0$ , il sistema diventa conservativo con tutti i poli sull'asse immaginario:

$$G(s) = \frac{K_1 K_2 R}{a_4 s^4 + a_2 s^2 + a_0} = \frac{K_1 K_2 R}{J M R^2 s^4 + (J K_1 + J K_2 R^2 + K_1 M R^2) s^2 + K_1 K_2 R^2}.$$

In questo caso si ottengono le seguenti pulsazioni di risonanza  $\omega^*$ :

$$\omega_{1,2}^* = \sqrt{\frac{a_2 \mp \sqrt{a_2^2 - 4 a_4 a_0}}{2 a_4}} = \sqrt{\frac{J K_1 + J K_2 R^2 + K_1 M R^2 \mp \sqrt{(J K_1 + J K_2 R^2 + K_1 M R^2)^2 - 4 J M R^2 K_1 K_2 R^2}}{2 J M R^2}}.$$