

Cognome:

Nome:

N. Matr.:

--	--	--	--	--	--	--

 Sistemi di Controllo Controlli Automatici

- Ho superato la Parte A in data (mese/anno) _____
 Non ho svolto la Parte A ma intendo svolgere la tesina con Matlab/Simulink

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

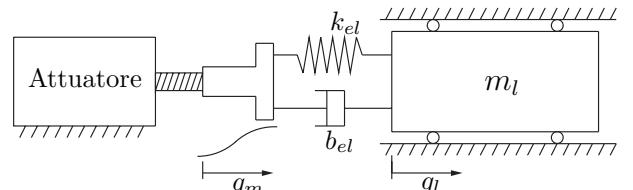
Compito del 12 gennaio 2016 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.

I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5 su 10), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{s + 0.2}{s^2 + 10s + 81}$ chiuso in retroazione con un regolatore proporzionale con guadagno $K > 0$:
 - il sistema in retroazione è stabile $\forall K$
 - è possibile che il sistema diventi semplicemente stabile
 - il margine di fase del guadagno d'anello $L(s) = KG(s)$ è sempre positivo
 - il margine di fase del guadagno d'anello $L(s) = KG(s)$ è sempre negativo
2. La presenza di un ritardo nella funzione d'anello di un sistema di controllo in retroazione negativa:
 - può essere trascurata nel progetto del controllore, qualora si assuma un margine di fase superiore a quello strettamente necessario per il soddisfacimento delle altre specifiche
 - può essere trascurata nel progetto del controllore, qualora si assuma un margine di ampiezza superiore a quello strettamente necessario per il soddisfacimento delle altre specifiche
 - risulta tanto più critica quanto più bassa è la pulsazione d'incrocio ω_c^* imposta
 - risulta tanto più critica quanto più alta è la pulsazione d'incrocio ω_c^* imposta
3. La banda passante di un filtro passa-alto ha la seguente struttura:
 - $[0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, \infty]$
 - $[0, \omega_B]$
 - $[\omega_B, \infty]$
 - $[\omega_{B1}, \omega_{B2}]$
4. Se la funzione anello $L(s)$ di un sistema retroazionato presenta un polo doppio nell'origine:
 - l'errore a regime per ingresso a gradino è nullo
 - l'errore a regime per ingresso a rampa è nullo
 - l'errore a regime per ingresso a rampa è diverso da zero e costante
 - l'errore a regime per ingresso a parabola è infinito
5. Un regolatore PID ideale:
 - si comporta come una rete anticipatrice
 - per ingresso a gradino produce un'azione di controllo infinita
 - può essere reso fisicamente realizzabile aggiungendo un polo ad alta frequenza
 - garantisce una risposta al gradino priva di sovraelongazione

6. L'eliminazione delle code di assestamento in un sistema di controllo in retroazione può essere ottenuta:
- progettando il regolatore mediante tecniche di cancellazione tra gli zeri del regolatore stesso e i poli dell'impianto
 - progettando il regolatore mediante tecniche di cancellazione tra i poli del regolatore stesso e gli zeri dell'impianto
 - utilizzando un prefiltro sul riferimento
 - utilizzando un compensatore dei disturbi misurabili
7. Una rete a ritardo-anticipo:
- ha come effetto utile l'aumento del guadagno in bassa frequenza senza ridurre la banda passante (pulsazione di incrocio)
 - consente di avere sempre errore a regime nullo per ingresso a gradino
 - consente di migliorare il margine di fase senza modificare la pulsazione di incrocio
 - può introdurre uno sfasamento massimo di $+180^\circ$
8. Si vuole realizzare una sistema di controllo digitale basato su una scheda a microprocessore il cui periodo di campionamento è $T_s = 0.005\text{s}$. Se gli ingressi di misura della scheda sono equipaggiati con filtri anti-aliasing del secondo ordine, quale dovrà essere la (massima) pulsazione di taglio ω_{aa} di tali filtri, per garantire un'attenuazione di almeno 80 db di tutti i disturbi a pulsazione maggiore di quella di Nyquist:
- $\omega_{aa} \approx 6 \text{ rad/sec}$
 - $\omega_{aa} \approx 12 \text{ rad/sec}$
 - $\omega_{aa} \approx 60 \text{ rad/sec}$
 - $\omega_{aa} \approx 120 \text{ rad/sec}$
9. Dato il regolatore tempo discreto $R(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z+3}{z^6 + 3z^5 + 9z^4}$, la corrispondente equazione alle differenze risulta:
- $y(k) = -3y(k-1) - 9y(k-2) + e(k-5) + 3e(k-6)$
 - $y(k) = -3y(k-6) - 9y(k-7) + e(k) + 3e(k-1)$
 - $y(k) = -3y(k-5) - 9y(k-4) + e(k-1) + 3e(k)$
 - $y(k) = -3y(k+5) - 9y(k+4) + e(k+1) + 3e(k)$
10. Dato il sistema di controllo del moto riportato in figura, la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{-1}{s^2 + b_{el}/m_l s + k_{el}/m_l}$ rappresenta la relazione dinamica tra le trasformate di Lapalce di
- q_m e q_l
 - q_m e τ_m (essendo τ_m la forza fornita dal motore)
 - q_m e z (essendo $z = q_l - q_m$)
 - \dot{q}_m e z (essendo $z = q_l - q_m$)
 - \ddot{q}_m e z (essendo $z = q_l - q_m$)



Cognome:

Nome:

N. Matr.: Sistemi di Controllo Controlli Automatici

- Ho superato la Parte A in data (mese/anno) _____
 Non ho svolto la Parte A ma intendo svolgere la tesina con Matlab/Simulink

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 12 gennaio 2016 - Problemi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti. I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (10 su 20), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

1. Implementazione digitale di regolatori tempo-continui: illustrare sinteticamente le problematiche legate alla scelta del periodo di campionamento, alla presenza del ricostruttore e alla tecnica di discretizzazione utilizzata.

2. Dato l'impianto $G(s) = \frac{5}{s(2s+1)(0.05s+1)}$

- a) Progettare un regolatore statico $R_s(s)$ che consenta di ottenere
 - errore a regime a fronte di un ingresso di riferimento a rampa $\leq 5\%$
 - attenuazione di 50 volte di un disturbo sull'uscita "d" sinusoidale a pulsazione $\omega_d = 0.2$ rad/s
- b) Disegnare (nello schema appositamente predisposto) i diagrammi di Bode asintotici di $G_e(s) = R_s(s)G(s)$.
- c) Progettare una rete di ritardo-anticipo $R_d(s)$ che realizzi le seguenti specifiche:
 - massimo sorpasso percentuale $S\% \leq 10\%$ (si richiede di considerare un margine additivo di 5° sul valore minimo del margine di fase per compensare il ritardo dovuto all'implementazione digitale);
 - tempo di assestamento $T_a \leq 2.5s$;
 - minimizzazione dell'azione di controllo.
- d) Volendo discretizzare il regolatore $R(s) = R_s(s)R_d(s)$ scegliere il tempo di campionamento più idoneo tenendo in considerazione
 - la banda del sistema in anello chiuso
 - una specifica sul ricostruttore di ordine zero che deve introdurre uno sfasamento sul margine di fase inferiore a 5°

Discretizzare $R(s)$ con il metodo di Tustin.

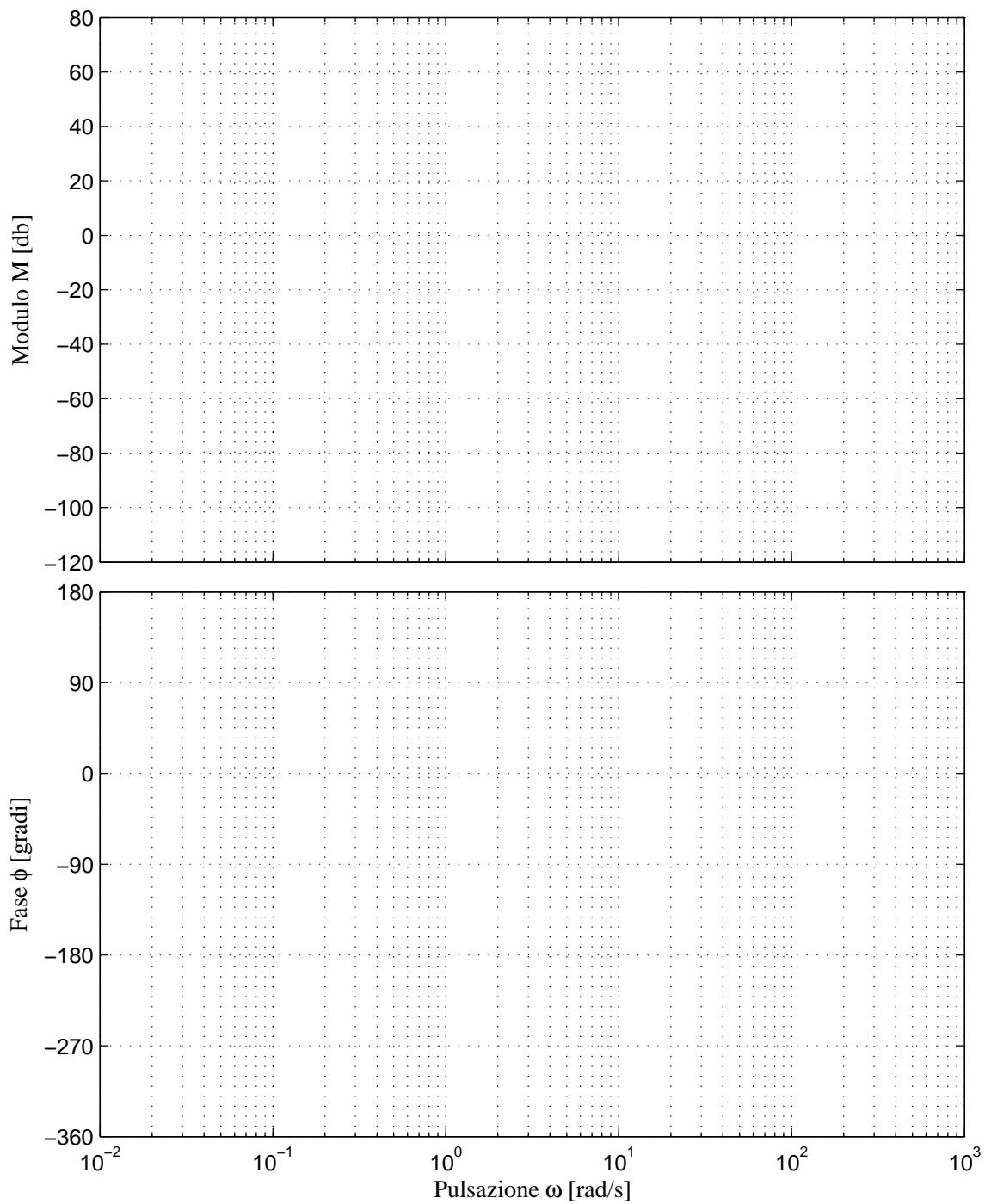
- e) Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente al regolatore $R(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$ discretizzato al punto precedente.
- f) Per migliorare le capacità del sistema controllato di inseguire il riferimento $y_{sp}(t)$ (di cui è nota l'espressione analitica insieme a quella delle sue derivate) progettare l'azione di feed-forward $u_{ff}(t)$ (compensazione in avanti del riferimento) necessaria.
- g) Scegliere tra quelle viste a lezione una traiettoria di ordine minimo (cioè con il minimo ordine di continuità) che consenta di mantenere limitata l'azione di feed-forward $u_{ff}(t)$. Determinare la durata minima di tale traiettoria al fine di portare l'uscita del sistema da $q_0 = 0$ e $q_1 = 30$ ($t_0 = 0$), con vincoli su velocità massima e accelerazione massima $v_{max} = 15$ e $a_{max} = 30$, rispettivamente. Scrivere l'espressione analitica della traiettoria di andata e di quella di ritorno.

Cognome:

Nome:

N. Matr.:

Diagrammi asintotici di Bode di $G_e(s) = R_s(s)G(s)$



Cognome:

Nome:

N. Matr.:

--	--	--	--	--	--	--

 Sistemi di Controllo Controlli Automatici

- Ho superato la Parte A in data (mese/anno) _____
 Non ho svolto la Parte A ma intendo svolgere la tesina con Matlab/Simulink

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 12 gennaio 2016 - Quiz

Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti possono avere più risposte corrette.

I quiz si ritengono superati se vengono individuate almeno metà delle risposte esatte (punti 5 su 10), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della seconda prova.

1. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{s + 0.2}{s^2 + 10s + 81}$ chiuso in retroazione con un regolatore proporzionale con guadagno $K > 0$:
 - il sistema in retroazione è stabile $\forall K$
 - è possibile che il sistema diventi semplicemente stabile
 - il margine di fase del guadagno d'anello $L(s) = KG(s)$ è sempre positivo
 - il margine di fase del guadagno d'anello $L(s) = KG(s)$ è sempre negativo
2. La presenza di un ritardo nella funzione d'anello di un sistema di controllo in retroazione negativa:
 - può essere trascurata nel progetto del controllore, qualora si assuma un margine di fase superiore a quello strettamente necessario per il soddisfacimento delle altre specifiche
 - può essere trascurata nel progetto del controllore, qualora si assuma un margine di ampiezza superiore a quello strettamente necessario per il soddisfacimento delle altre specifiche
 - risulta tanto più critica quanto più bassa è la pulsazione d'incrocio ω_c^* imposta
 - risulta tanto più critica quanto più alta è la pulsazione d'incrocio ω_c^* imposta
3. La banda passante di un filtro passa-alto ha la seguente struttura:
 - $[0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, \infty]$
 - $[0, \omega_B]$
 - $[\omega_B, \infty]$
 - $[\omega_{B1}, \omega_{B2}]$
4. Se la funzione anello $L(s)$ di un sistema retroazionato presenta un polo doppio nell'origine:
 - l'errore a regime per ingresso a gradino è nullo
 - l'errore a regime per ingresso a rampa è nullo
 - l'errore a regime per ingresso a rampa è diverso da zero e costante
 - l'errore a regime per ingresso a parabola è infinito
5. Un regolatore PID ideale:
 - si comporta come una rete anticipatrice
 - per ingresso a gradino produce un'azione di controllo infinita
 - può essere reso fisicamente realizzabile aggiungendo un polo ad alta frequenza
 - garantisce una risposta al gradino priva di sovraelongazione

6. L'eliminazione delle code di assestamento in un sistema di controllo in retroazione può essere ottenuta:

- progettando il regolatore mediante tecniche di cancellazione tra gli zeri del regolatore stesso e i poli dell'impianto
- progettando il regolatore mediante tecniche di cancellazione tra i poli del regolatore stesso e gli zeri dell'impianto
- utilizzando un prefiltro sul riferimento
- utilizzando un compensatore dei disturbi misurabili

7. Una rete a ritardo-anticipo:

- ha come effetto utile l'aumento del guadagno in bassa frequenza senza ridurre la banda passante (pulsazione di incrocio)
- consente di avere sempre errore a regime nullo per ingresso a gradino
- consente di migliorare il margine di fase senza modificare la pulsazione di incrocio
- può introdurre uno sfasamento massimo di $+180^\circ$

8. Si vuole realizzare una sistema di controllo digitale basato su una scheda a microprocessore il cui periodo di campionamento è $T_s = 0.005\text{s}$. Se gli ingressi di misura della scheda sono equipaggiati con filtri anti-aliasing del secondo ordine, quale dovrà essere la (massima) pulsazione di taglio ω_{aa} di tali filtri, per garantire un'attenuazione di almeno 80 db di tutti i disturbi a pulsazione maggiore di quella di Nyquist:

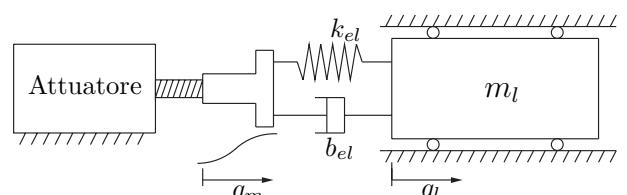
- $\omega_{aa} \approx 6 \text{ rad/sec}$
- $\omega_{aa} \approx 12 \text{ rad/sec}$
- $\omega_{aa} \approx 60 \text{ rad/sec}$
- $\omega_{aa} \approx 120 \text{ rad/sec}$

9. Dato il regolatore tempo discreto $R(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z+3}{z^6 + 3z^5 + 9z^4}$, la corrispondente equazione alle differenze risulta:

- $y(k) = -3y(k-1) - 9y(k-2) + e(k-5) + 3e(k-6)$
- $y(k) = -3y(k-6) - 9y(k-7) + e(k) + 3e(k-1)$
- $y(k) = -3y(k-5) - 9y(k-4) + e(k-1) + 3e(k)$
- $y(k) = -3y(k+5) - 9y(k+4) + e(k+1) + 3e(k)$

10. Dato il sistema di controllo del moto riportato in figura, la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{-1}{s^2 + b_{el}/m_l s + k_{el}/m_l}$ rappresenta la relazione dinamica tra le trasformate di Lapalce di

- q_m e q_l
- q_m e τ_m (essendo τ_m la forza fornita dal motore)
- q_m e z (essendo $z = q_l - q_m$)
- \dot{q}_m e z (essendo $z = q_l - q_m$)
- \ddot{q}_m e z (essendo $z = q_l - q_m$)



Cognome:

Nome:

N. Matr.: Sistemi di Controllo Controlli Automatici

- Ho superato la Parte A in data (mese/anno) _____
 Non ho svolto la Parte A ma intendo svolgere la tesina con Matlab/Simulink

Sistemi di Controllo - Controlli Automatici (Parte B)

Ingegneria Meccanica e Ingegneria del Veicolo

Compito del 12 gennaio 2016 - Problemi

Rispondere in maniera analitica ai seguenti quesiti. I problemi e le domande a risposta aperta si ritengono superati se vengono conseguiti almeno metà dei punti totali (10 su 20), diversamente il compito verrà ritenuto insufficiente a prescindere dal risultato della prima prova.

1. Implementazione digitale di regolatori tempo-continui: illustrare sinteticamente le problematiche legate alla scelta del periodo di campionamento, alla presenza del ricostruttore e alla tecnica di discretizzazione utilizzata.

2. Dato l'impianto $G(s) = \frac{5}{s(2s+1)(0.05s+1)}$
 - a) Progettare un regolatore statico $R_s(s)$ che consenta di ottenere
 - errore a regime a fronte di un ingresso di riferimento a rampa $\leq 5\%$
 - attenuazione di 50 volte di un disturbo sull'uscita "d" sinusoidale a pulsazione $\omega_d = 0.2$ rad/s

SOLUZIONE:

Dal momento che è richiesto un errore a regime finito ma non nullo per ingresso a rampa e considerando che l'impianto già possiede un polo nell'origine il regolatore statico $R_s(s)$ dovrà essere di tipo 0. Avrà perciò la forma di una semplice costante

$$R_s(s) = \mu$$

in cui il guadagno μ è determinato imponendo la condizione statica sull'ingresso a rampa

$$|e_v| \leq 0.05 \quad (1)$$

e la condizione sull'errore a regime limitato per un disturbo "d" di tipo sinusoidale

$$|S(j\omega)| \leq \frac{1}{50} \text{ alla pulsazione } \omega_d = 0.2. \quad (2)$$

Dalla (1) si ottiene

$$|e_v| = \lim_{s \rightarrow 0} |sE(s)| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| s \frac{1}{1 + R_s(s)G(s)} \frac{1}{s^2} \right| = \frac{1}{\mu \lim_{s \rightarrow 0} |sG(s)|} \leq 0.05$$

da cui, essendo $\lim_{s \rightarrow 0} |sG(s)| = 5$,

$$\mu \geq 4.$$

Dalla (2), considerando l'espressione approssimata di $|S(j\omega)|$ per basse frequenze risulta

$$|S(j\omega_d)| \approx \frac{1}{|L(j\omega_d)|} \Rightarrow |L(j\omega_d)| \geq 50$$

con $L(s) = \mu G(s)$. Svolgendo i calcoli risulta

$$|\mu G(j0.2)| \geq 50 \Rightarrow \mu \geq \frac{50}{23.2108} = 2.1542.$$

Per soddisfare entrambe le specifiche si assume il valore $\mu = 4$.

- b) Disegnare (nello schema appositamente predisposto) i diagrammi di Bode asintotici di $G_e(s) = R_s(s)G(s)$.

SOLUZIONE:

Vedere diagramma in fondo

- c) Progettare una rete di ritardo-anticipo $R_d(s)$ che realizzi le seguenti specifiche:

- massimo sorpasso percentuale $S\% \leq 10\%$ (si richiede di considerare un margine additivo di 5° sul valore minimo del margine di fase per compensare il ritardo dovuto all'implementazione digitale);
 - tempo di assestamento $T_a \leq 2.5\text{s}$;
 - minimizzazione dell'azione di controllo.
-

SOLUZIONE:

La rete $R_d(s)$ deve essere progettata per imporre il margine di fase e la pulsazione di incrocio che derivano dalle specifiche

- (a) $S\% \leq 10\% \Rightarrow \delta^* \geq 0.6 \Rightarrow M_f^* \geq 65^\circ$ avendo considerato i 5° addizionali richiesti dal testo
- (b) $T_a \leq 0.85\text{s} \Rightarrow \omega_c \geq \frac{3}{\delta^* T_a} = 2 \text{ rad/s}$

In particolare si assumerà il valore minimo $\omega_c^* = 2 \text{ rad/s}$ per minimizzare l'azione di controllo. Confrontando le specifiche richieste con il diagramma di Bode di $G_e(s)$, tracciato al punto precedente, si evince come da un lato sia necessario spostare (di poco) la pulsazione di attraversamento verso sinistra e dall'altro aumentare la fase in corrispondenza di ω_c^* . Questo giustifica l'impiego di una rete a ritardo-anticipo. Si progetta inizialmente una rete anticipatrice in cancellazione con il polo dell'impianto collocato in -0.5 . Pertanto, assumendo la costante di tempo dello zero $\tau_z = 2$, il regolatore avrà la forma

$$R_a(s) = \frac{1 + 2s}{1 + \tau_p s}$$

dove τ_p rimane il solo parametro da determinare. Il valore di τ_p è scelto imponendo che la pulsazione di incrocio della nuova funzione di anello sia $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$ (si è assunto un valore di ω_c superiore a ω_c^* di quasi una decade per garantire un aumento consistente della fase in corrispondenza di ω_c^*), ovvero

$$\frac{|1 + 2j\omega_c|}{|1 + \tau_p j\omega_c|} |G_e(j\omega_c)| = 1$$

da cui si ottiene

$$\tau_p = \frac{1}{\omega_c} \sqrt{(M_z \cdot |G_e(j\omega_c)|)^2 - 1} = 0.1483$$

essendo $M_z = \sqrt{1 + (2\omega_c)^2} = 20.0250$ e $|G_e(j\omega_c)| = 0.0893$.

La rete di anticipo risulta pertanto

$$R_a(s) = \frac{2s + 1}{0.1483s + 1}$$

e il sistema esteso su cui progettare la rete di ritardo è

$$G_{e1}(s) = R_a(s)G_e(s) = \frac{20}{s(0.1483s + 1)(0.05s + 1)}.$$

Notare come al termine del progetto della rete per cancellazione non sia stata fatta alcuna verifica sul margine di fase.

A questo punto si progetta una rete di ritardo per imporre la pulsazione di incrocio desiderata $\omega_c^* = 2 \text{ rad/s}$ e il margine di fase $M_f^* = 65^\circ$. Occorre pertanto calcolare modulo e argomento di $G_{e1}(s)$ per $\omega = \omega_c^* = 2$:

$$|G_{e1}(j2)| = 9.5395, \quad \arg\{G_{e1}(j2)\} = -112.2335^\circ.$$

I parametri della rete ritardatrice si trovano imponendo nelle formule di inversione un' amplificazione

$$M^* = \frac{1}{|G_{e1}(j2)|} = 0.1048 \leq 1$$

e uno sfasamento

$$\varphi^* = -180^\circ + M_f^* - \arg(G_{e1}(j2)) = -2.7665^\circ \geq -90^\circ$$

Dopo avere verificato analiticamente le condizioni di applicabilità della rete anticipatrice, e in particolare che

$$\cos(\varphi^*) \geq M^* \Rightarrow 0.9988 > 0.1048,$$

dalle formule di inversione si ricava che $\tau = 88.4744$ e $\alpha = 0.1047$. La rete di ritardo è perciò

$$R_r(s) = \frac{9.261s + 1}{88.47s + 1}.$$

Complessivamente, il regolatore dinamico risulterà

$$R_d(s) = \frac{(2s+1)}{(0.1483s+1)} \frac{(9.261s+1)}{(88.47s+1)}.$$

- d) Volendo discretizzare il regolatore $R(s) = R_s(s)R_d(s)$ scegliere il tempo di campionamento più idoneo tenendo in considerazione
- la banda del sistema in anello chiuso
 - una specifica sul ricostruttore di ordine zero che deve introdurre uno sfasamento sul margine di fase inferiore a 5°

Discretizzare $R(s)$ con il metodo di Tustin.

SOLUZIONE:

Il tempo di campionamento può essere scelto considerando la più restrittiva delle condizioni suddette:

$$(a) \omega_c = 2 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_s = 10\omega_c = 20 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.3142 \text{ s}$$

$$(b) \Delta M_f = \frac{T}{2} \omega_c \frac{180}{\pi} \leq 5^\circ \Rightarrow T \leq \frac{5 \cdot 2\pi}{\omega_c \cdot 180} = 0.0873 \text{ s} \text{ essendo } \omega_c = 2 \text{ rad/s.}$$

Il valore $T = 0.05$ soddisfa tutti i vincoli richiesti.

Sostituendo $s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$ la funzione di trasferimento del regolatore discretizzata risulta

$$R(s) = 4 \frac{(2s+1)}{(0.1483s+1)} \frac{(9.261s+1)}{(88.47s+1)} \Rightarrow R(z) = \frac{4.904 - 9.66z^{-1} + 4.757z^{-2}}{1 - 1.711z^{-1} + 0.7111z^{-2}} = \frac{4.904z^2 - 9.66z + 4.757}{z^2 - 1.711z + 0.7111}$$

- e) Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente al regolatore $R(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$ discretizzato al punto precedente.

SOLUZIONE:

Interpretando z^{-1} come l'operatore ritardo unitario segue immediatamente che l'equazioni alle differenze corrispondente a $R(z)$ è

$$R(z) = \frac{4.904 - 9.66z^{-1} + 4.757z^{-2}}{1 - 1.711z^{-1} + 0.7111z^{-2}} = \frac{U(z)}{E(z)} \Rightarrow u_k = 1.711u_{k-1} - 0.7111u_{k-2} + 4.904e_k - 9.66e_{k-1} + 4.757e_{k-2}$$

- f) Per migliorare le capacità del sistema controllato di inseguire il riferimento $y_{sp}(t)$ (di cui è nota l'espressione analitica insieme a quella delle sue derivate) progettare l'azione di feed-forward $u_{ff}(t)$ (compensazione in avanti del riferimento) necessaria.

SOLUZIONE:

Per trovare l'espressione analitica dell'azione in avanti occorre invertire la funzione di trasferimento dell'impianto

$$R_{ff}(s) = G^{-1}(s) = \frac{s(2s+1)(0.05s+1)}{5} = \frac{0.1s^3 + 2.05s^2 + s}{5}.$$

Poichè $G(s)$ non ha zeri, $R_{ff}(s)$ è semplicemente data da una combinazione lineare di potenze di s

$$R_{ff}(s) = 0.02s^3 + 0.41s^2 + 0.2s$$

pertanto

$$U_{ff}(s) = R_{ff}(s)Y_{sp}(s) = 0.02s^3Y_{sp}(s) + 0.41s^2Y_{sp}(s) + 0.2sY_{sp}(s)$$

⇓

$$u_{ff}(t) = 0.02y_{sp}^{(3)}(t) + 0.41y_{sp}^{(2)}(t) + 0.2y_{sp}^{(1)}(t)$$

- g) Scegliere tra quelle viste a lezione una traiettoria di ordine minimo (cioè con il minimo ordine di continuità) che consenta di mantenere limitata l'azione di feed-forward $u_{ff}(t)$. Determinare la durata minima di tale traiettoria al fine di portare l'uscita del sistema da $q_0 = 0$ e $q_1 = 30$ ($t_0 = 0$), con vincoli su velocità massima e accelerazione massima $v_{max} = 15$ e $a_{max} = 30$, rispettivamente. Scrivere l'espressione analitica della traiettoria di andata e di quella di ritorno.
-

SOLUZIONE:

Per garantire la limitatezza dell'azione di controllo in avanti $u_{ff}(t)$ la derivata terza del riferimento $y_{sp}^{(3)}(t)$ dovrà essere limitata e quindi la derivata seconda $y_{sp}^{(2)}(t)$ continua. Tra le traiettorie con accelerazione continua è possibile scegliere la polinomiale di grado 5, la doppia-S in velocità o la traiettoria cicloidale. Si decide di impiegare la traiettoria polinomiale, che è possibile scrivere come

$$q(t) = h q_N(\tau) \Big|_{\tau=\frac{t-t_0}{T}} + q_0$$

dove $q_N(\tau)$ è la corrispondente espressione normalizzata

$$q_N(\tau) = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5.$$

La durata T della traiettoria dovrà essere scelta imponendo i limiti su velocità e accelerazione:

$$q_{max}^{(1)} = \frac{|h|}{T} q_{N max}^{(1)} \leq v_{max} \quad \Rightarrow \quad T \geq 30 \frac{15/8}{15} = 3.75 \text{ s}$$

$$q_{max}^{(2)} = \frac{|h|}{T^2} q_{N max}^{(2)} \leq a_{max} \quad \Rightarrow \quad T \geq \sqrt{30 \frac{10\sqrt{3}/3}{30}} = 2.4028 \text{ s}$$

essendo $|h| = q_1 - q_0 = 20$, e $q_N^{(1)} = 15/8$, $q_N^{(2)} = 10\sqrt{3}/3$. Si assume la condizione più restrittiva, ovvero quella che comporta la durata più grande, $T = 3.75$ s.

Sostituendo nell'espressione della traiettoria si ottiene

$$q(t) = 30 \left[10 \left(\frac{t}{3.75} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{3.75} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{3.75} \right)^5 \right]$$

mentre il ritorno risulta

$$q(t) = 30 - 30 \left[10 \left(\frac{t-3.75}{3.75} \right)^3 - 15 \left(\frac{t-3.75}{3.75} \right)^4 + 6 \left(\frac{t-3.75}{3.75} \right)^5 \right].$$

Diagrammi asintotici di Bode di $G_e(s) = R_s(s)G(s)$ 