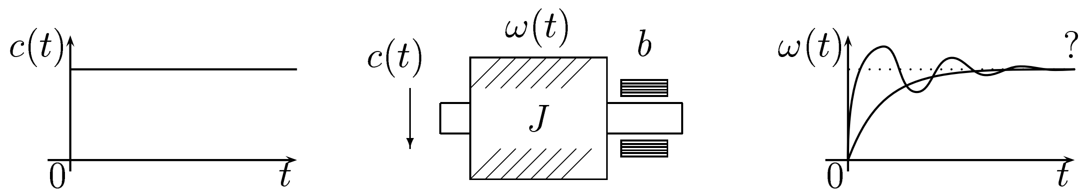
Esempio. Si consideri un elemento meccanico con inerzia J, coefficiente di attrito lineare b che ruota alla velocità angolare ω al quale venga applicata una coppia esterna $c(t)$.



Si richiede di determinare la risposta del sistema al gradino unitario.
Per rispondere esattamente a questa domanda occorre determinare il modello dinamico del sistema. L'equazione differenziale che caratterizza il sistema è la seguente:

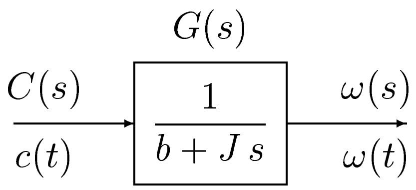
$$\frac{d[J\omega(t)]}{dt} = c(t) - b\,\omega(t) \qquad \leftrightarrow \qquad J\dot{\omega}(t) + b\,\omega(t) = c(t)$$

Partendo da condizioni iniziali nulle e trasformando secondo Laplace si ottiene:

$$J\,s\,\omega(s) + b\,\omega(s) = C(s) \qquad \leftrightarrow \qquad \omega(s) = \frac{1}{b + J\,s}\,C(s)$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ che caratterizza il sistema è quindi la seguente:

$$G(s) = \frac{1}{b + J\,s}$$



I coefficienti di questa funzione sono in corrispondenza biunivoca con i coefficienti dell'equazione differenziale. Posto $C(s) = \frac{1}{s}$, la risposta al gradino del sistema in ambito trasformato è la seguente:

$$\omega(s) = G(s)\,C(s) \qquad \rightarrow \qquad \omega(s) = \frac{1}{(b + J\,s)s}$$

Alcune informazioni sull'andamento di $\omega(t)$ si possono ricavare direttamente da $\omega(s)$ anche senza antitrasformare. Applicando il teorema del valore iniziale, per esempio, si ricava il valore di $\omega(t)$ per $t = 0^+$:

$$\omega(0^+) = \omega(t)|_{t\to 0} = \lim_{s\to\infty} s\,\omega(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{(b + J\,s)s} = 0$$

Applicando invece il teorema del valore finale si ricava il valore di $\omega(t)$ per $t \to \infty$:

$$\omega(\infty) = \omega(t)|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} s\,\omega(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{(b + J\,s)s} = \frac{1}{b}$$

Applicando il teorema del valore iniziale è anche possibile calcolare il valore dell'accelerazione $\dot{\omega}(t)$ per $t = 0^+$:

$$\dot{\omega}(0^+) = \dot{\omega}(t)|_{t\to 0} = \lim_{s\to\infty} s\,\underbrace{[s\,\omega(s)]}_{\dot{\omega}(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{(b + J\,s)s} = \frac{1}{J}$$

Infatti, in ambito trasformato, l'accelerazione $\dot{\omega}(s)$ si ottiene semplicemente moltiplicando la velocità $\omega(s)$ per la variabile s (che rappresenta l'operatore "derivata" di Laplace).
Per ottenere esattamente l'andamento temporale $\omega(t)$ occorre antitrasformare la funzione $\omega(s)$. Il modo più semplice per farlo è utilizzare la scomposizione in fratti semplici. Nel caso in esame, esistono sempre due coefficienti α e β che permettono di scomporre la funzione $\omega(s)$ nel modo seguente:

$$\omega(s) = \frac{1}{(b + J\,s)s} \qquad \leftrightarrow \qquad \omega(s) = \frac{\alpha}{b + J\,s} + \frac{\beta}{s}$$

I coefficienti α e β si determinano (per esempio) imponendo uguaglianza fra le due espressioni:

$$\omega(s) = \frac{\alpha}{b + J\,s} + \frac{\beta}{s} = \frac{\alpha s + \beta(b + J\,s)}{(b + J\,s)s} = \frac{(\alpha + \beta J)\,s + \beta b}{(b + J\,s)s} = \frac{1}{(b + J\,s)s}$$

Risolvendo si ricava:

$$\begin{cases} \alpha + \beta J &= 0 \\ \beta b &= 1 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha &= -\frac{J}{b} \\ \beta &= \frac{1}{b} \end{cases}$$

per cui si ha

$$\omega(s) = \frac{1}{(b + J\,s)s} = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{s} - \frac{J}{b + J\,s}\right] = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{b}{J}}\right]$$

Antitrasformando i singoli elementi si ricava la funzione $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \frac{1}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{J}\,t}\right)$$

L'andamento temporale è di tipo esponenziale: