- PROCESSO:

  Un insieme di operazioni o di trasformazioni che devono avvenire in sequenza opportuna in un impianto o in un sistema fisico

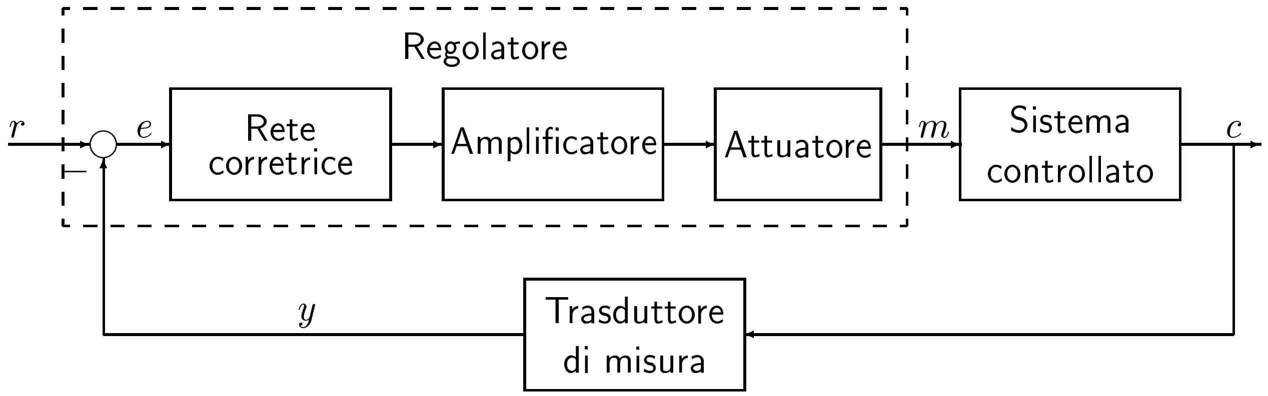
- CONTROLLO DEI PROCESSI:

  Insieme di metodologie, tecniche e tecnologie orientate alla conduzione automatizzata di impianti industriali

- SISTEMI DI CONTROLLO DIGITALE:

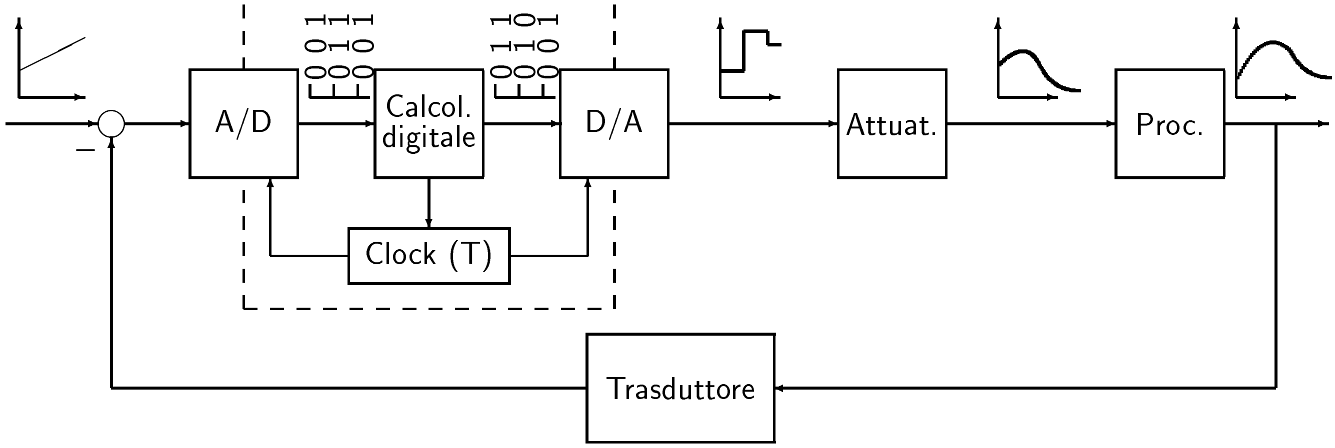
  Sistemi di controllo in retroazione in cui è presente un calcolatore digitale e quindi una elaborazione a tempo discreto della legge di controllo

- SISTEMA DI CONTROLLO ANALOGICO:

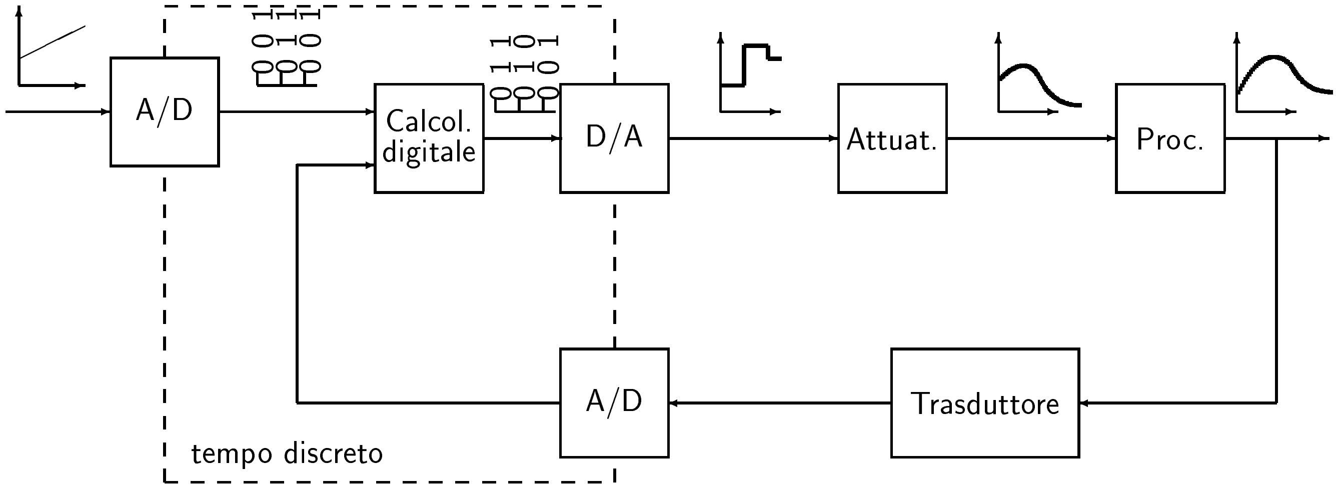


SCHEMI TIPICI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE

- Campionamento del segnale errore:



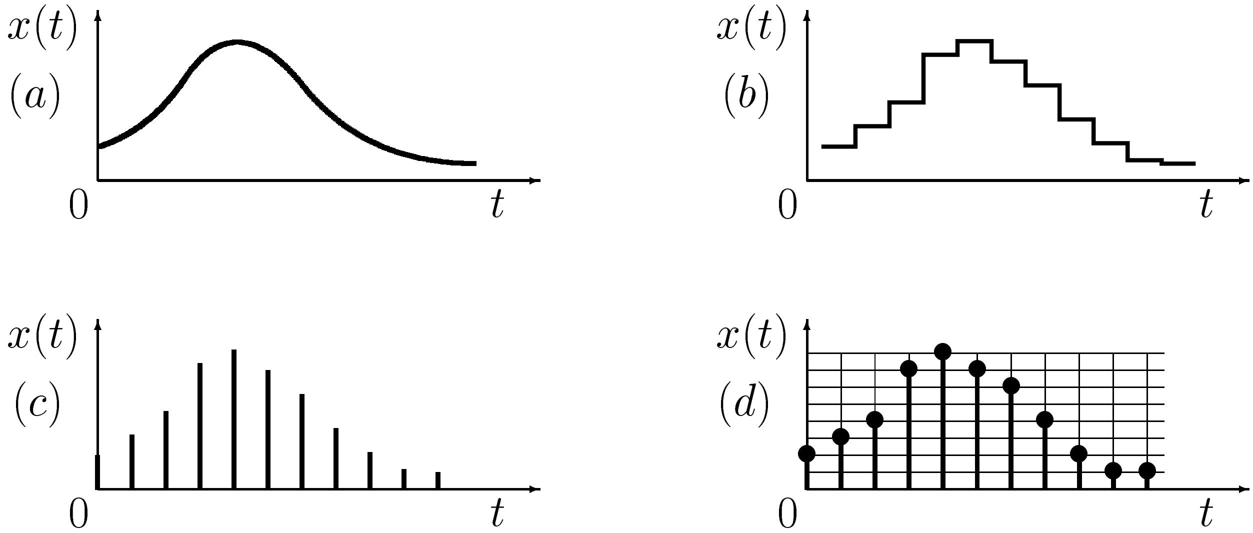
- Campionamento del segnale retroazionato:



- CONTROLLO DIGITALE / CONTROLLO ANALOGICO:
  - \+ Maggiore capacità e precisione di elaborazione
  - \+ Maggiore flessibilità
  - \+ Maggiore affidabilità e ripetibilità
  - \+ Maggiore trasmissibilità dei segnali
  - \- Progettazione più difficile e articolata
  - \- Stabilizzabilità più precaria
  - \- Possibilità di arresti non previsti
  - \- Necessità di utilizzare energia elettrica

SEGNALI DI INTERESSE

a) Analogico di tipo continuo; b) Tempo-continuo quantizzato; c) A dati campionati; d) Digitale

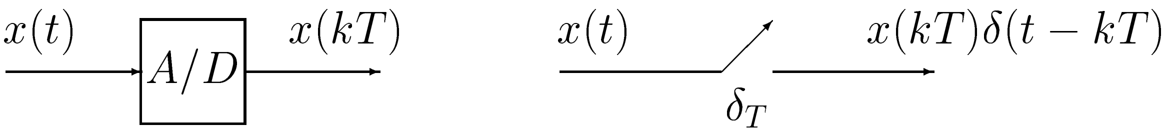


DISPOSITIVI DI INTERFACCIA

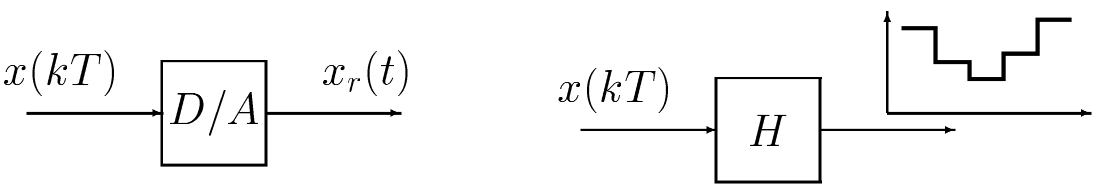
- A/D: convertitore Analogico/Digitale. Due possibili descrizioni:

  1) Generazione di una sequenza di valori numerici:

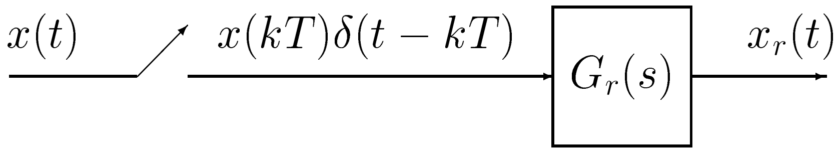
  2) Campionamento ad impulsi di Dirac:



- D/A, convertitore Digitale/Analogico



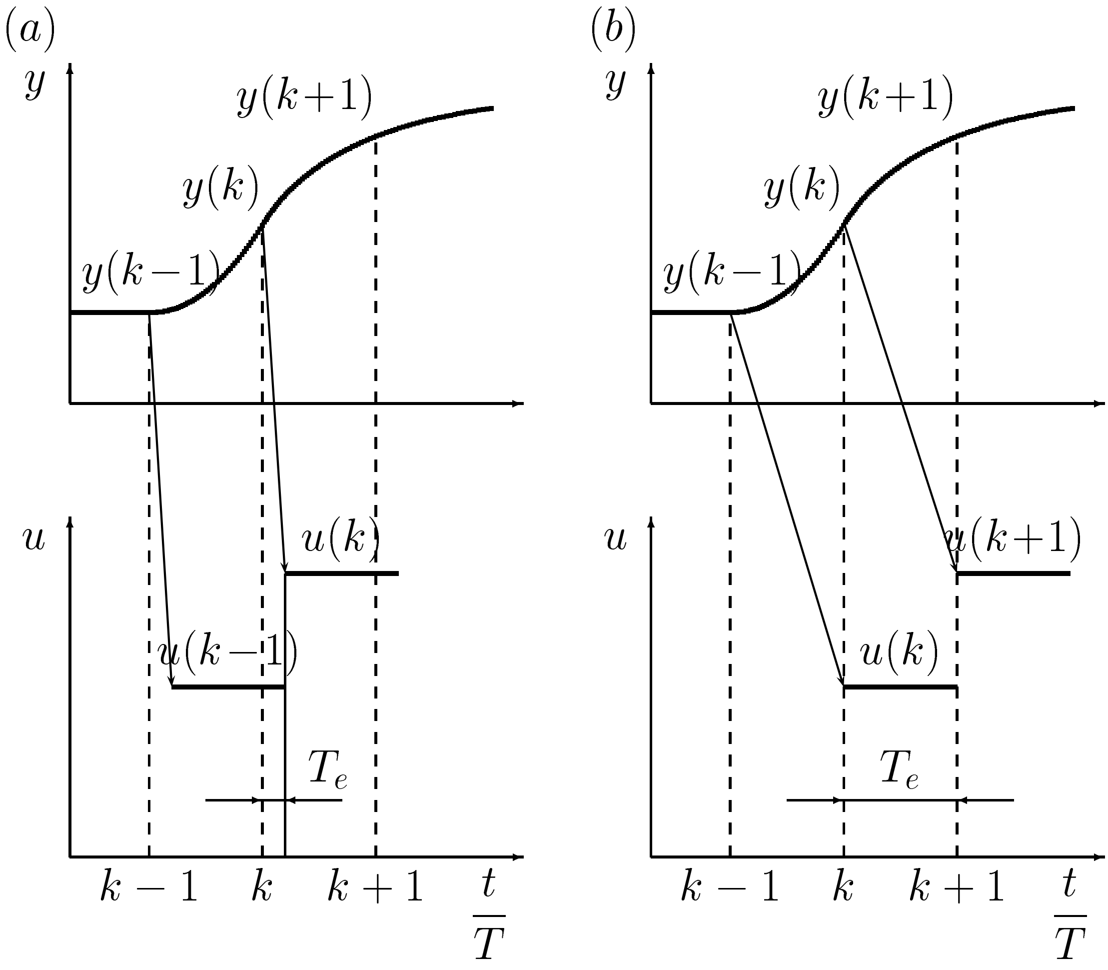
Se si usa il campionatore ad impulsi di Dirac, il ricostruttore (cioè il convertitore D/A) può essere rappresentato da una semplice funzione di trasferimento $G_r(s)$:



Ricostruttore di ordine zero:

$$\boxed{G_r(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}}$$

TEMPO DI ELABORAZIONE E SINCRONIZZAZIONE



- Equazioni alle differenze. Sono legami statici che legano i valori attuali (all'istante k) e passati (negli istanti $k-1$, $k-2$, ecc.) dell'ingresso e_k e dell'uscita u_k:

  $$u_k = f(e_0, e_1, \ldots, e_k; u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$$

  L'equazione alle differenze è lineare se $f(\cdot)$ è lineare:

  $$u_k = -a_1 u_{k-1} - \ldots - a_n u_{k-n} + b_0 e_k + \ldots + b_m e_{k-m}$$

  La soluzione di un'equazione alle differenze è data dalla somma della "risposta libera" (ingresso nullo e condizioni iniziali nulle) e della "risposta forzata" (condizioni iniziali nulle ed ingresso diverso da zero) del sistema:

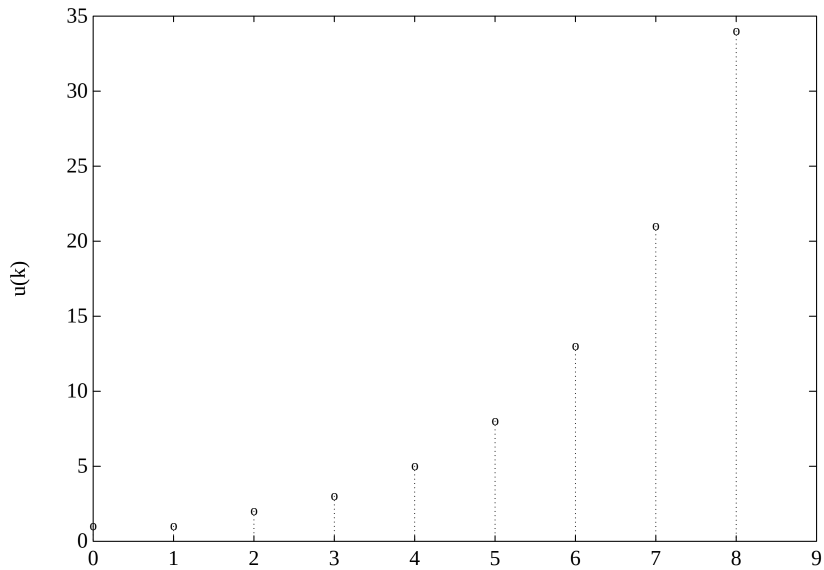
  $$u_k = u_k^l + u_k^f$$

  Per determinare la risposta libera occorrono tante condizioni iniziali quant'è l'ordine dell'equazione alle differenze.

- Soluzione di equazioni alle differenze a coefficienti costanti

  $$u_k = u_{k-1} + u_{k-2} \qquad\qquad k \geq 2$$

  $u_0 = u_1 = 1.$



Per risolvere le equazioni alle differenze si può utilizzare il metodo della $\mathcal{Z}$-trasformata.

$\mathcal{Z}$-trasformata

- Sia data una sequenza di valori $x_k \in \mathbb{R}$, definita per $k = 0, 1, 2, \ldots$ e nulla per $k < 0$. La $\mathcal{Z}$-trasformata (unilatera) della sequenza x_k è la funzione di variabile complessa z definita come

$$X(z) = \mathcal{Z}[x_k] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = x_0 + x_1\, z^{-1} + \cdots + x_k\, z^{-k} + \cdots$$

- Nel caso in cui la sequenza di valori x_k sia ottenuta campionando uniformemente con periodo T un segnale continuo descritto dalla funzione $x(t)$, $t \geq 0$, si avrà che $x_k = x(kT)$:

$$\boxed{X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}}$$

- Per indicare che una seguenza è stata ottenuta per campionamento di un segnale tempo continuo, spesso si usa la seguente notazione:

$$X(z) = \mathcal{Z}[X(s)]$$

intendendo:

$$X(z) = \mathcal{Z}\big[\big\{ \mathcal{L}^{-1}[X(s)]\big|_{t=kT} \big\}\big]$$

- Nelle applicazioni ingegneristiche la funzione $X(z)$ assume in generale una espressione razionale fratta del tipo

$$X(z) = \frac{b_0\, z^m + b_1\, z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

che si può esprimere anche in potenze di z^{-1}:

$$X(z) = \frac{b_0\, z^{-(n-m)} + b_1\, z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m\, z^{-n}}{1 + a_1\, z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

- Esempio:

$$X(z) = \frac{z(z+0.5)}{(z+1)(z+2)} = \frac{1 + 0.5\, z^{-1}}{(1+z^{-1})(1+2\, z^{-1})}$$

- Impulso discreto unitario, detta anche funzione di Kronecker $\delta_0(t)$:

$$\boxed{x(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad X(z) = 1}$$

Infatti:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + \cdots = 1$$

- Gradino unitario. Sia data la funzione gradino unitario

$$x(k) = h(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

La funzione $h(k)$, detta sequenza unitaria, è la seguente:

$$\boxed{h(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad X(z) = \frac{z}{z-1}}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}[h(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

La serie è convergente per $|z| > 1$.

- Rampa unitaria. Si consideri la funzione rampa unitaria:

$$\boxed{x(t) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}}$$

Infatti, la $\mathcal{Z}$-trasformata di $x(k) = k$ è

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[k] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = (z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots) \\ &= z^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \cdots) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

convergente per $|z| > 1$.

- Funzione potenza a^k. Sia data la funzione

$$\boxed{x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad X(z) = \frac{z}{z-a}}$$

con a costante reale o complessa. Dalla definizione di $\mathcal{Z}$-trasformata si ha che

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[a^k] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\ &= 1 + a\, z^{-1} + a^2\, z^{-2} + a^3\, z^{-3} + \cdots = \frac{1}{1 - a\, z^{-1}} = \frac{z}{z-a} \end{aligned}$$

Questa serie geometrica converge per $|z| > |a|$.

Discretizzazione di segnali tempo continui

- Gradino unitario:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s}\right] = \mathcal{Z}[h(t)|_{t=kT}] = \frac{z}{z-1}$$

- Rampa unitaria:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \mathcal{Z}[t|_{t=kT}] = \mathcal{Z}[k\,T] = T\frac{z}{(z-1)^2}$$

- Funzione esponenziale:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+b}\right] = \mathcal{Z}\left[e^{-b\,t}\big|_{t=kT}\right] = \mathcal{Z}\left[e^{-b\,k\,T}\right] = \mathcal{Z}\left[(e^{-b\,T})^k\right] = \frac{z}{z - e^{-bT}}$$

- Funzione sinusoidale. Sia data la sinusoide

$$\boxed{x(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad X(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}}$$

Dalle formule di Eulero è noto che

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

convergente per $|z| > 1$.

- Funzione cosinusoidale. Sia data la funzione

$$\boxed{x(t) = \begin{cases} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad X(z) = \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\cos \omega t] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{1 - z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \\ &= \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \qquad\qquad |z| > 1 \end{aligned}$$

- Esempio: $X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$
- Prima tecnica: $x(t) = 1 - e^{-t}$

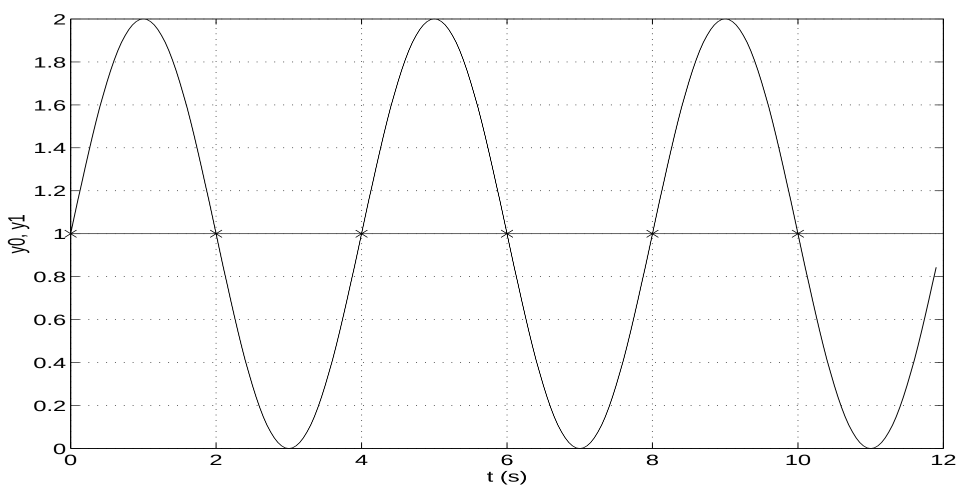
$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\left[1 - e^{-t}\right] = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})} = \frac{(1 - e^{-T})z}{(z - 1)(z - e^{-T})} \end{aligned}$$

- Seconda tecnica:

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{1+s}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}}$$

- La $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ e la sua sequenza corrispondente $x(k)$ sono legate da una corrispondenza biunivoca
- Questo non avviene in genere tra la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ e la sua "inversa" $x(t)$
- Data una $X(z)$ si possono in genere avere molte $x(t)$
- Questa ambiguità non sussiste se sono verificate le condizioni restrittive su T dettate dal Teorema di Shannon
- Diverse funzioni tempo continuo possono avere gli stessi valori $x(k)$



- PROPRIETÀ E TEOREMI DELLA $\mathcal{Z}$-TRASFORMATA

- Linearità:

$$x(k) = af(k) + bg(k)$$

$$\boxed{X(z) = aF(z) + bG(z)}$$

- Moltiplicazione per a^k. Sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata di $x(t)$, a una costante.

$$\boxed{\mathcal{Z}\left[a^k x(k)\right] = X(a^{-1}z)}$$

$$\mathcal{Z}\left[a^k x(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)(a^{-1}z)^{-k} = X(a^{-1}z)$$

- Teorema della traslazione nel tempo. Se $x(t) = 0, t < 0$, $X(z) = \mathcal{Z}[x(t)]$, e $n = 1, 2, \ldots$, allora

$$\boxed{\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n} X(z)} \qquad \text{(ritardo)}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k}\right]} \qquad \text{(anticipo)}$$

- Teorema del valore iniziale.
Se $X(z)$ è la $\mathcal{Z}$-trasformata di $x(t)$ e se esiste il $\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$, allora il valore iniziale $x(0)$ di $x(t)$ è dato da:

$$\boxed{x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)}$$

- Teorema del valore finale. Siano tutti i poli di $X(z)$ all'interno del cerchio unitario, con al più un polo semplice per $z = 1$.

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} \left[(1 - z^{-1}) X(z)\right]}$$

- Esempio: Si consideri il segnale descritto da

$$X(z) = \frac{Tz(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)}$$

Il valore finale della sequenza $x(kT)$ è quindi dato da

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} x(kT) &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{Tz(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)}\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{T(z+1)}{2(z-0.5)}\\ &= 2T\end{aligned}$$

- <ins>Trasformazione di funzioni periodiche</ins>.

Sia data una successione $x_p(k)$ periodica di periodo pT e $x(k)$ la successione dei campioni del primo periodo e nulla per $k > p$

$$\boxed{x(k) = \begin{cases} x_p(k) & k = 0, \dots, p \\ 0 & k > p \end{cases}}$$

Se $X(z)$ è la $\mathcal{Z}$-trasformata di $x(k)$ allora vale

$$\mathcal{Z}[x_p(k)] = \frac{z^p}{z^p - 1}X(z) = \frac{1}{1-z^{-p}}X(z)$$

- LA ANTITRASFORMATA $\mathcal{Z}$
- Permette di passare da una $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ alla corrispondente sequenza x_k e possibilmente alla funzione continua $x(t)$ cui corrisponde per campionamento la sequenza x_k.

$$X(z) \underset{\text{biunivoca}}{\longleftrightarrow} x(k) \underset{\text{non biunivoca}}{\longleftarrow} x(t)$$

- Se è soddisfatto il Teorema di Shannon sul campionamento, la funzione continua $x(t)$ può essere univocamente determinata a partire dalla sequenza x_k.
- Esistono diversi metodi per antitrasformare una funzione $X(z)$. Noi prenderemo in considerazione solo il Metodo della scomposizione in fratti semplici.
- Metodo della scomposizione in fratti semplici

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}$$

- Caso 1. Se tutti i poli sono semplici, si pone

$$X(z) = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z - p_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{z - p_i}$$

dove i coefficienti c_i, detti "residui", sono parametri che vengono calcolati come:

$$c_i = [(z - p_i) X(z)]_{z=p_i}$$

- Se nella espressione di $X(z)$ compare almeno uno zero nell'origine, si utilizza la funzione $X(z)/z$ e quindi

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z - p_1} + \cdots + \frac{c_n}{z - p_n} \qquad c_i = \left[(z - p_i)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_i}$$

Quando sono presenti poli complessi coniugati, i coefficienti c_i sono anch'essi complessi. In questo caso si ricorre alle formule di Eulero per ottenere funzioni trigonometriche. L'espressione finale cercata è quindi

$$x(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i^k$$

- Caso 2. Se $X(z)$, o $X(z)/z$, ha poli multipli

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z-p_1)^{r_1}(z-p_2)^{r_2}\cdots(z-p_h)^{r_h}}$$

allora si può porre

$$X(z) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(z-p_i)^{r_i-k+1}}$$

dove i residui si calcolano come

$$c_{ik} = \left[\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-p_i)^{r_i} X(z)\right]_{z=p_i}$$

$$i = 1, \ldots, h;\;\; k = 1, \ldots, r_i$$

- Esempio. Antitrasformare la funzione

$$X(z) = \frac{1}{z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 12z + 4} = \frac{1}{(z+2)^2(z+1)^2}$$

Si ha che

$$X(z) = \frac{c_{11}}{(z+2)^2} + \frac{c_{12}}{(z+2)} + \frac{c_{21}}{(z+1)^2} + \frac{c_{22}}{(z+1)}$$

$$\begin{aligned}
c_{11} &= [(z+2)^2 X(z)]|_{z=-2} = 1 \\
c_{12} &= \left[\frac{d}{dz}(z+2)^2 X(z)\right]_{z=-2} = 2 \\
c_{21} &= \left[(z+1)^2 X(z)\right]_{z=-1} = 1 \\
c_{22} &= \left[\frac{d}{dz}(z+1)^2 X(z)\right]_{z=-1} = -2
\end{aligned}$$

Esempio. Si calcoli la soluzione $c(n)$ della seguente equazione alle differenze:

$$c(n+1) = c(n) + i\,c(n)$$

partendo dalla condizione iniziale $c(0) = c_0$. Tale equazione può essere interpretata come legge di capitalizzazione di un capitale iniziale c_0 al tasso di interesse i.

[Soluzione.] Applicando la Z-trasformata all'equazione precedente si ottiene

$$z\,C(z) - z\,c_0 = (i+1)C(z) \qquad \rightarrow \qquad [z-(1+i)]C(z) = z\,c_0$$

da cui

$$C(z) = \frac{z\,c_0}{z-(1+i)} = \frac{c_0}{1-(1+i)z^{-1}} \qquad \rightarrow \qquad c(n) = c_0(1+i)^n$$

Esempio. Determinare l'espressione analitica della sequenza di Fibonucci descritta dalla seguente equazione alle differenze

$$y(n+2) = y(n+1) + y(n)$$

a partire dalle condizioni iniziali $y(0) = y(1) = 1$.

[Soluzione.] Applicando il metodo della Z-trasformata

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - z\,y(1) = z\,Y(z) - z\,y(0) + Y(z)$$

si ottiene

$$Y(z) = \frac{z[zy(0) + y(1) - y(0)]}{z^2 - z - 1}$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y(1) = 1$ si ottiene

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2-z-1} = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\frac{a\,z}{(z-a)} - \frac{b\,z}{(z-b)}\right]$$

dove a e b sono le radici della funzione $Y(z)$

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad\qquad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Antitrasformando si ottiene

$$y(n) = \frac{1}{a-b}\,[a\,a^n - b\,b^n] = \frac{1}{a-b}\left[a^{n+1} - b^{n+1}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Esempio. Calcolare la risposta all'impulso $g(n)$ del seguente sistema dinamico discreto

$$G(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0.8)(z+0.5)}$$

[Soluzione.] Per calcolare la risposta all'impulso $g(n)$ del sistema $G(z)$ si procede utilizzando il metodo della scomposizione in fratti semplici

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{(z+1)}{(z-0.8)(z+0.5)} = \frac{1.8}{1.3}\frac{1}{(z-0.8)} - \frac{0.5}{1.3}\frac{1}{(z+0.5)}$$

da cui

$$G(z) = 1.3846\frac{z}{(z-0.8)} - 0.3846\frac{z}{(z+0.5)}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$g(n) = 1.3846(0.8)^n - 0.3846(-0.5)^n$$

Il sistema discreto $G(z)$ è stabile.

Esempio. Determinare la risposta $y(n)$ al gradino unitario $u(n) = 1$ del seguente sistema dinamico discreto

$$y(n) = 0.5\, y(n-1) + u(n)$$

partendo da condizione iniziale nulla $y(0) = 0$.

[Soluzione.] La funzione di trasferimento discreta $G(z)$ associata all'equazione alle differenze assegnata è la seguente:

$$G(z) = \frac{1}{1-0.5\, z^{-1}}$$

La Z-trasformata del segnale di ingresso $u(n) = 1$ è:

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Quindi, la Z-trasformata del segnale di uscita $y(n)$ è

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{1}{(1-0.5\, z^{-1})}\,\frac{1}{(1-z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)}$$

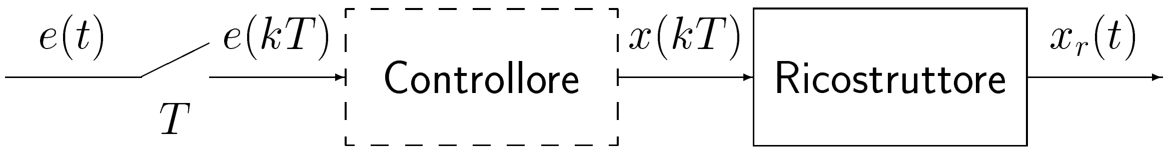
Operando la scomposizione in fratti semplici della funzione $Y(z)/z$ si ottiene

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-0.5}$$

da cui si ricava $y(n)$

$$Y(z) = \frac{2\,z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} \qquad \rightarrow \qquad y(n) = 2 - 0.5^n$$

- CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE
- I sistemi in retroazione con controllo digitale sono caratterizzati da una parte continua (il processo da controllare) e una parte discreta (il controllore digitale)
- Sono quindi presenti sia variabili a tempo discreto sia variabili a tempo continuo
- I dispositivi di interfaccia sono il campionatore e il ricostruttore



- Ricostruttore di ordine zero:

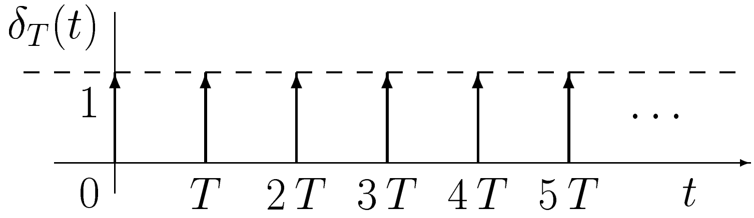
$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[h(t-kT) - h(t-(k+1)T)]$$

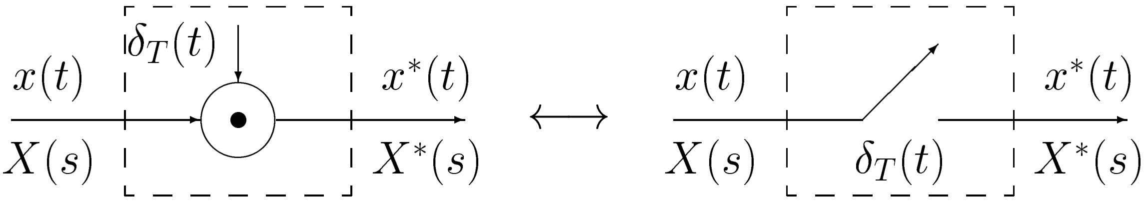
$$X_r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\left[\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s}\right] = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

$$H_0(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \qquad\qquad X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

$$x^*(t) = \mathcal{L}^{-1}[X^*(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$$

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$$

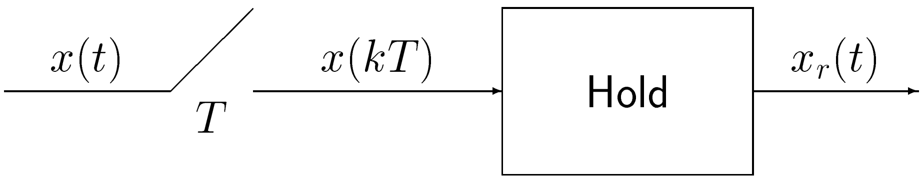


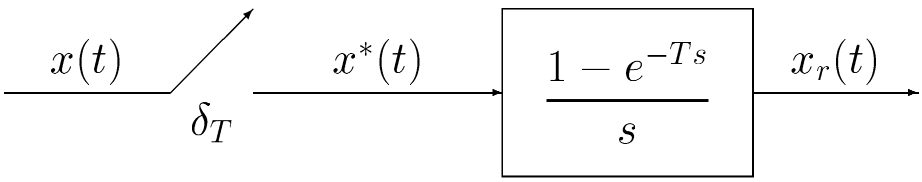


- Il campionatore impulsivo è un modello ideale del campionatore reale (convertitore A/D) considerato adeguato alle esigenze di analisi e progetto dei controlli digitali

- L'uscita del ricostruttore di ordine zero vale:

$$X_r(s) = H_0(s)\, X^*(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\, X^*(s)$$





$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$z = e^{sT} \qquad \longleftrightarrow \qquad s = \frac{1}{T}\ln z$$

$$X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k}$$

- La trasformata zeta della sequenza $x(kT)$ anzichè la trasformata di Laplace del segnale $x^*(t)$ permette di operare con funzioni razionali fratte.

$$
\begin{aligned}
x^*(t) &= x(t)\,\delta_T(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\\
\delta_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{j\,n\omega_s t}\\
c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T \delta_T(t)\, e^{-j\,n\omega_s t}dt = \frac{1}{T}
\end{aligned}
$$

ne segue

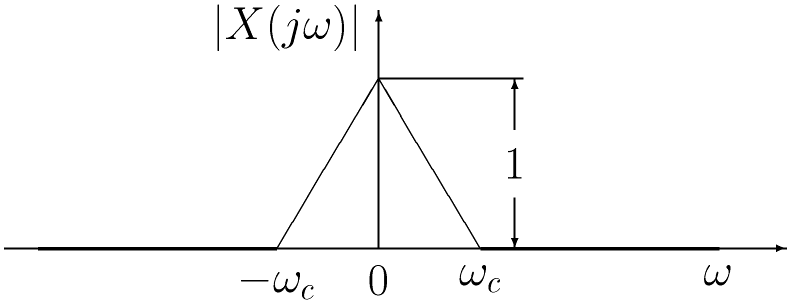
$$
\begin{aligned}
x^*(t) &= x(t)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\,n\omega_s t}\\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\,n\omega_s t}
\end{aligned}
$$

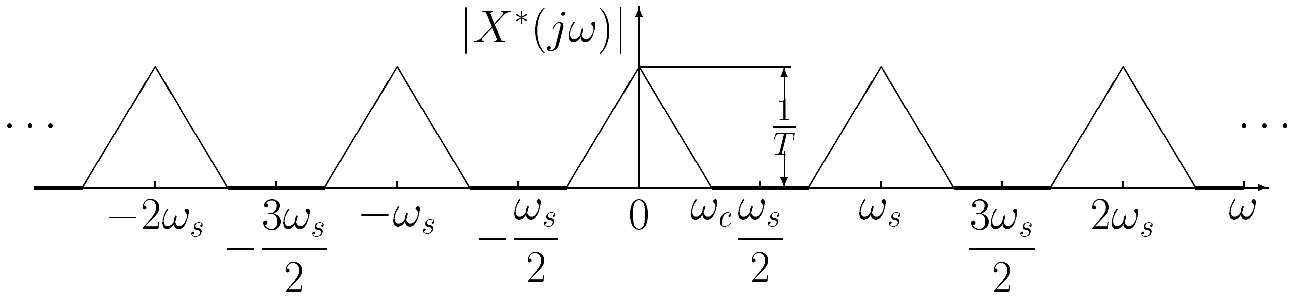
$$
X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{L}\left[x(t)\, e^{j\,n\omega_s t}\right] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s-j\,n\omega_s)
$$

- A meno della costante moltiplicativa $1/T$, la trasformata di Laplace $X^*(s)$ del segnale campionato si ottiene dalla somma degli infiniti termini, $X(s-j\,n\omega_s)$, ciascuno dei quali si ottiene dalla $X(s)$ mediante traslazione di $j\,n\omega_s$ nel campo complesso.

- L'andamento spettrale del segnale campionato vale:

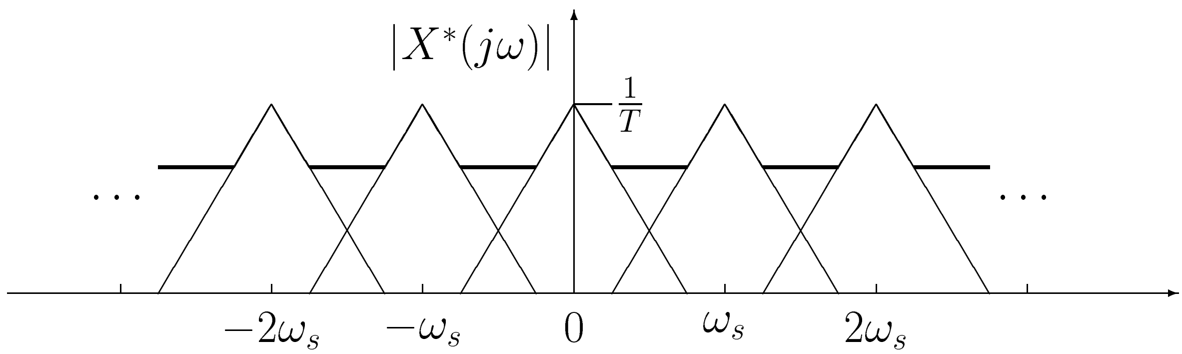
$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - j\, n\omega_s)$$





- La condizione $\omega_s > 2\omega_c$ mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale $x(t)$

- Nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ non è rispettata:



- Lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui mediante filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato

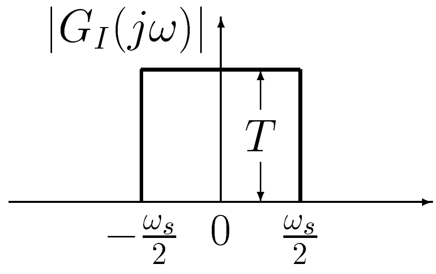
- TEOREMA DI SHANNON

- Sia $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione di campionamento (T è il periodo di campionamento), e sia ω_c la più alta componente spettrale del segnale tempo-continuo $x(t)$. Il segnale $x(t)$ è completamente ricostruibile a partire dal segnale campionato $x^*(t)$ se e solo se la pulsazione ω_s è maggiore del doppio della pulsazione ω_c:

$$\omega_s > 2\omega_c$$

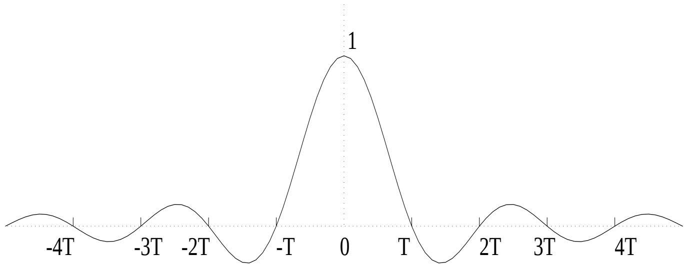
- Ricostruzione mediante filtro ideale

$$G_I(j\omega) = \begin{cases} T & -\dfrac{\omega_s}{2} \le \omega \le \dfrac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



- Il filtro ideale $G_I(j\omega)$ non è fisicamente realizzabile. La sua risposta all'impulso vale:

$$g_I(t) = \frac{\sin(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2}$$



- Formula di ricostruzione di Shannon

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)\, g_I(t-\tau)\, d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) \frac{sin(\omega_s(t-\tau)/2)}{\omega_s(t-\tau)/2}\, d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{sin(\omega_s(t-kT)/2)}{\omega_s(t-kT)/2} \end{aligned}$$

- Occorrono tutti i campioni $x(kT)$ passati e futuri

- Si usano ricostruttori causali e facilmente realizzabili

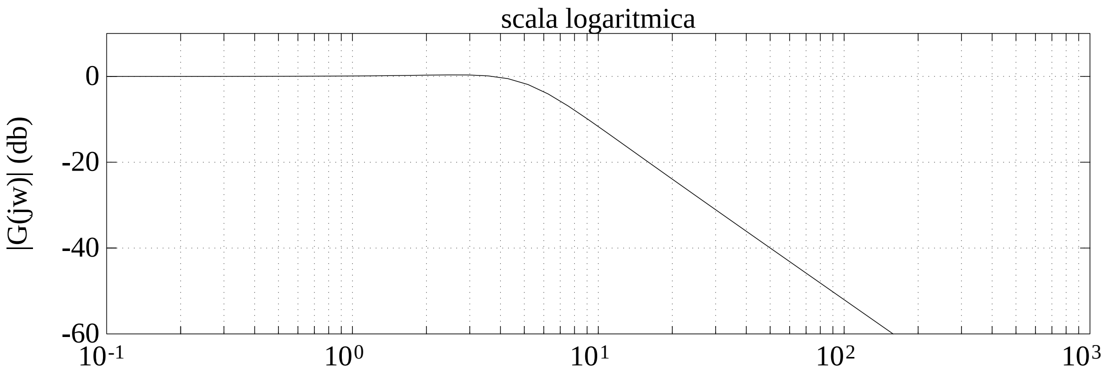
- Campionamento della risposta all'impulso di un sistema del secondo ordine

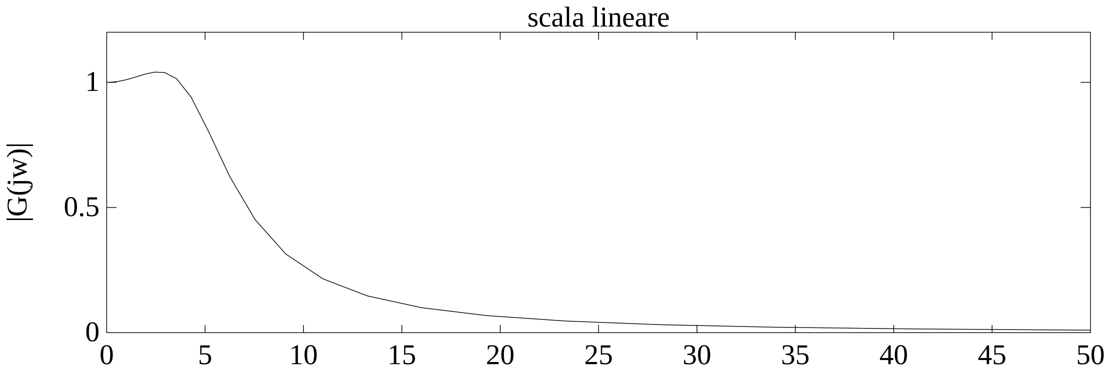
$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 6\,s + 25}$$

- Il sistema $G(s)$ ha un guadagno statico unitario, ha due poli complessi coniugati $p_{1,2} = -3 \pm j4$, pulsazione naturale $\omega_n = 5\ rad/s$ e coefficiente di smorzamento $\delta = 3/5$

$$G(s) = \frac{25}{(s+3)^2 + 4^2}$$

- Diagramma delle ampiezze di $G(j\omega)$:





- Per $\omega > 10\omega_n = 50\ rad/s = \bar{\omega}$, l'ampiezza di $G(j\omega)$ è inferiore ad un centesimo (-40 db) del guadagno statico

- Lo spettro, pur essendo a banda teoricamente illimitata, risulta essere praticamente trascurabile per pulsazioni maggiori di $\bar{\omega} = 50\ rad/s$

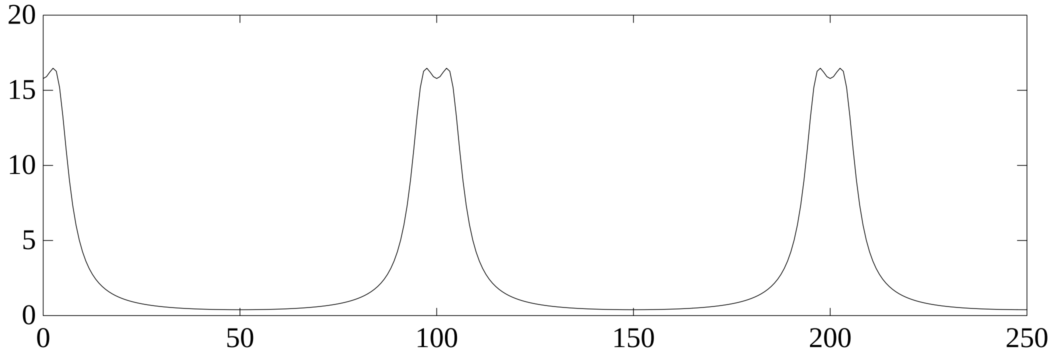
- Applicando la $\mathcal{Z}$-trasformata si ha

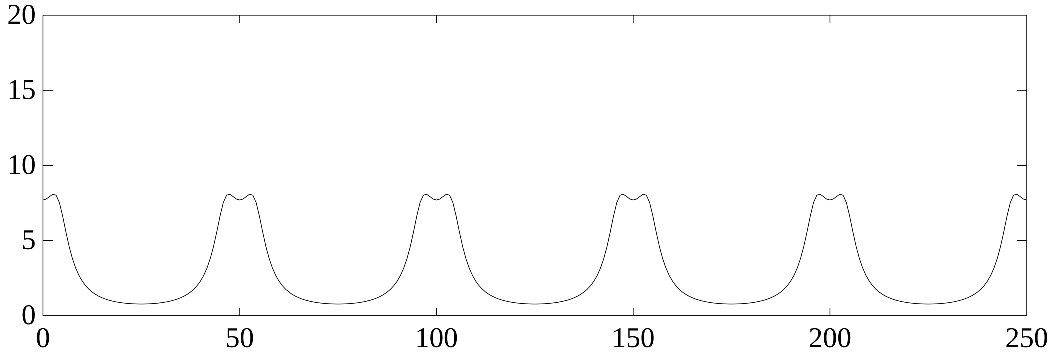
$$G(z) = \frac{25}{4} \frac{e^{-3T} \sin(4T)\ z}{z^2 - 2e^{-3T} \cos(4T)\ z + e^{-6T}}$$

- La risposta spettrale è data da

$$G^*(j\omega) = G(z)|_{z=e^{j\omega T}} \qquad\qquad 0 \le \omega \le \frac{\pi}{T}$$

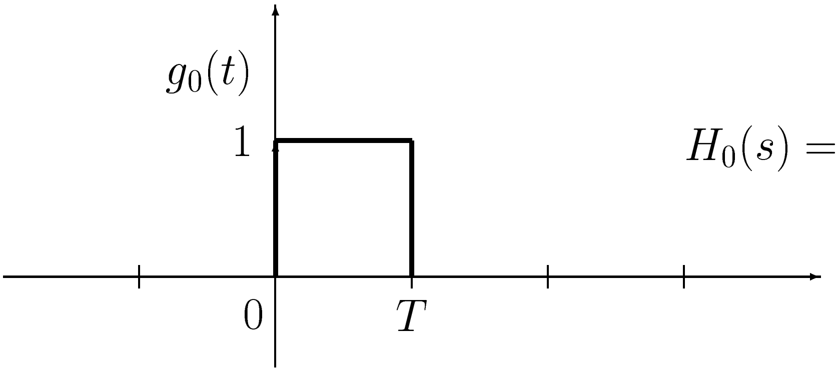
- Andamento spettrale di $G^*(j\omega)$ quando $T = \frac{\pi}{50}$ e $T = \frac{\pi}{25}$





- Ricostruttore di ordine zero

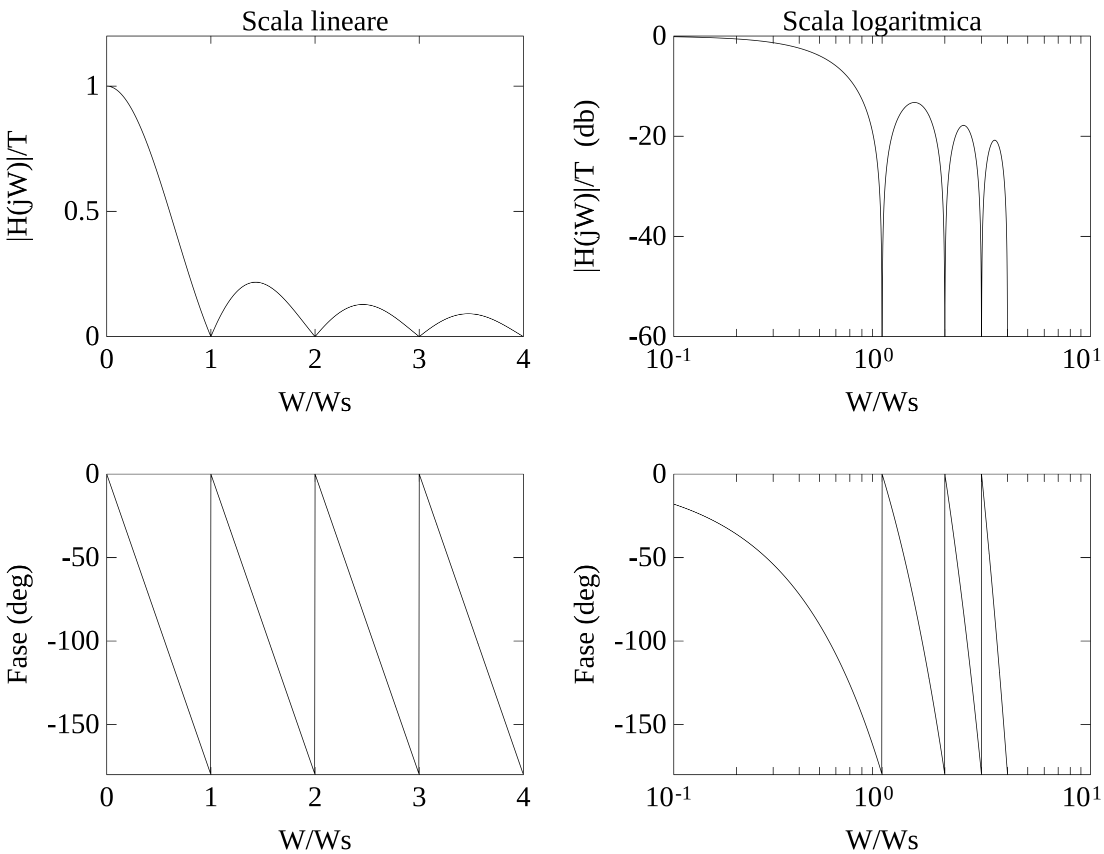
$$x_0(t) = x(k\,T) \qquad\qquad k\,T \leq t < (k+1)T$$



$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-s\,T}}{s}$$

- La risposta frequenziale del ricostruttore di ordine zero:

$$H_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\, e^{-j\omega T/2} \simeq T\, e^{-j\omega T/2}$$



- Corrispondenza tra piano s e piano z

$$X^*(s) = X(z)|_{z=e^{sT}}$$

- Le variabili complesse s e z sono legate dalla relazione

$$\boxed{z = e^{sT}}$$

- Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha

$$z = e^{T(\sigma+j\omega)} = e^{T\sigma}e^{jT\omega} = e^{T\sigma}e^{jT(\omega+\frac{2k\pi}{T})}$$

- Ogni punto del piano z è in corrispondenza con infiniti punti del piano s

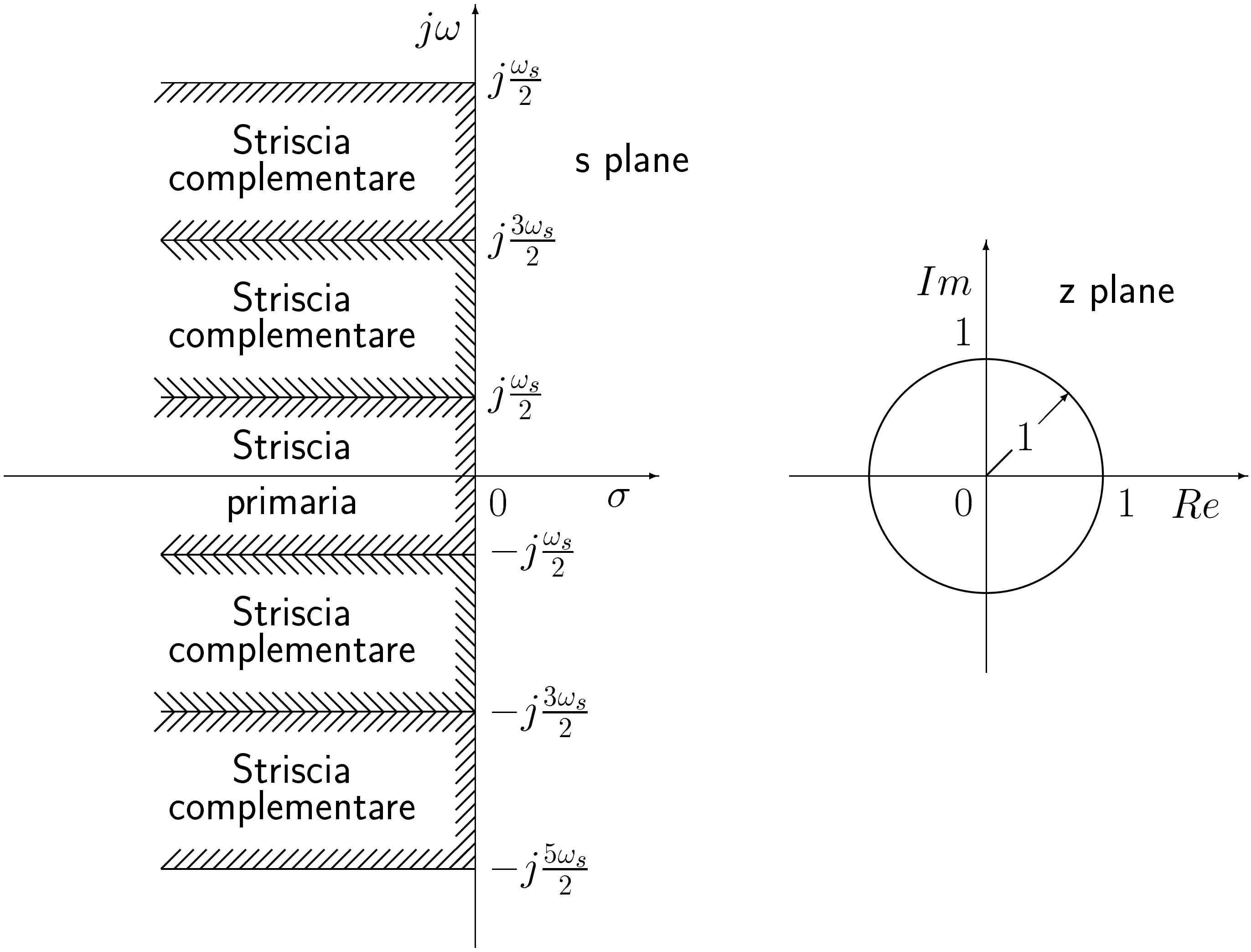
- I punti del piano s a parte reale negativa ($\sigma < 0$) sono in corrispondenza con i punti del piano z all'interno del cerchio unitario:

$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

- I punti sull'asse immaginario ($\sigma = 0$) vengono mappati sul cerchio unitario ($|z| = 1$), mentre quelli a parte reale positiva ($\sigma > 0$) vengono mappati all'esterno del cerchio unitario ($|z| > 1$).

- La striscia di piano s delimitata dalle rette orizzontali $s = j\omega_s/2$ e $s = -j\omega_s/2$ prende il nome di striscia primaria

- Striscia primaria e Strisce complementari



- Le variabili complesse s e z sono legate dalla relazione

$$z = e^{sT}$$

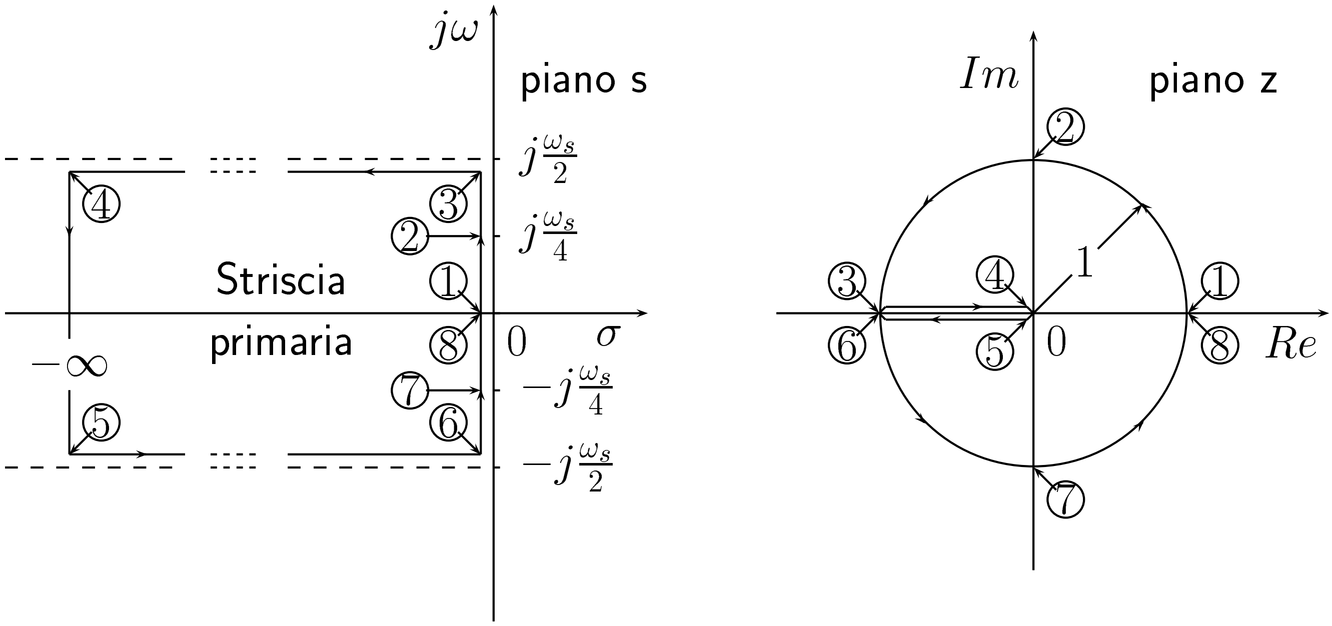
- Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha

$$z = e^{T(\sigma+j\omega)} = e^{T\sigma}e^{jT\omega}$$

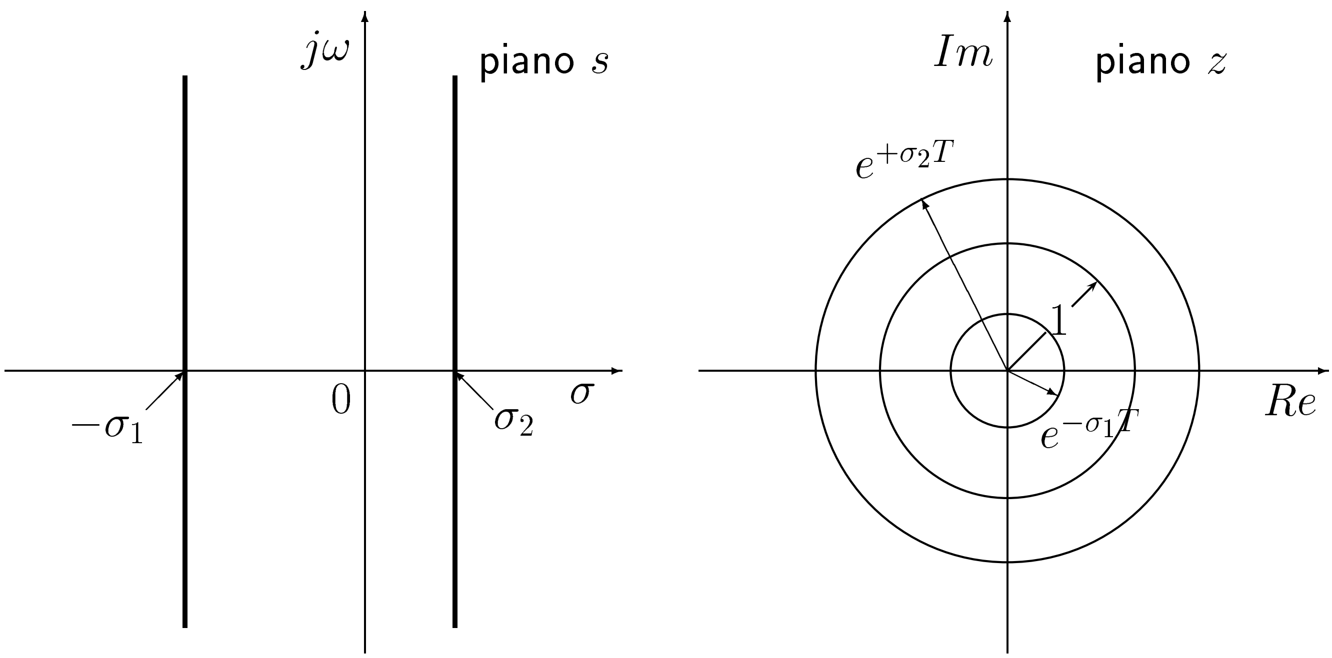
dove

$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

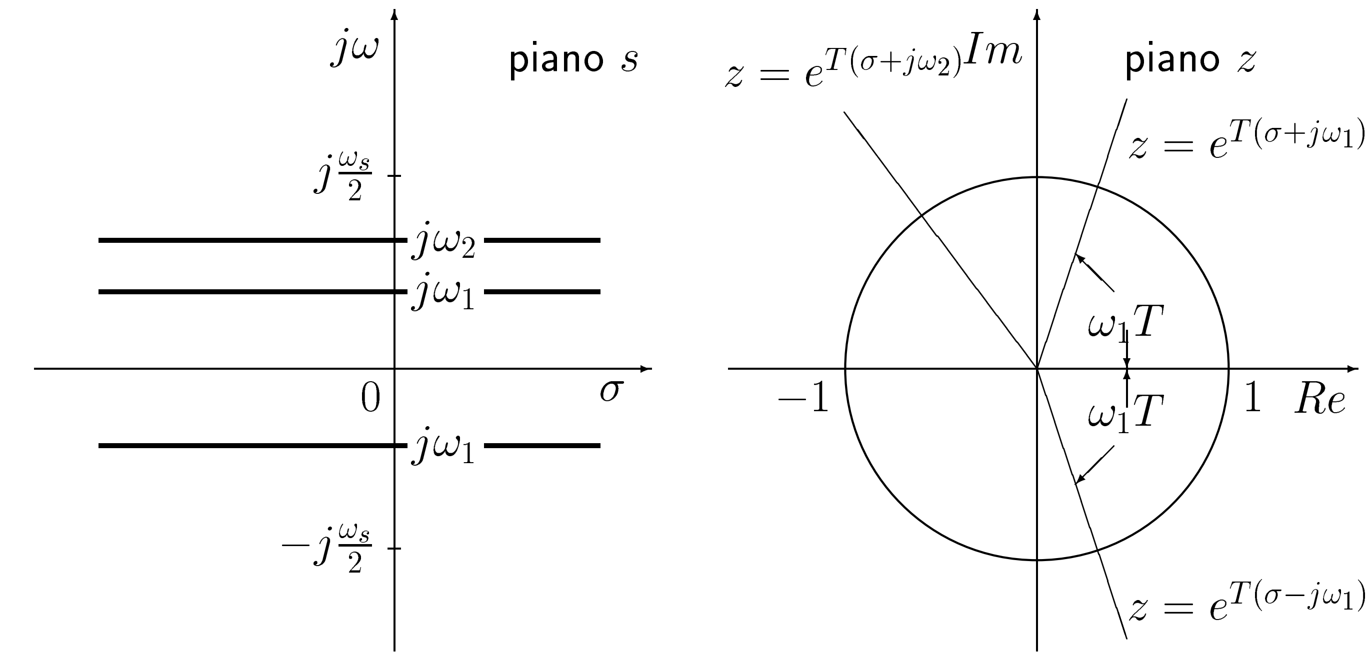
- Mapping tra striscia primaria e piano z



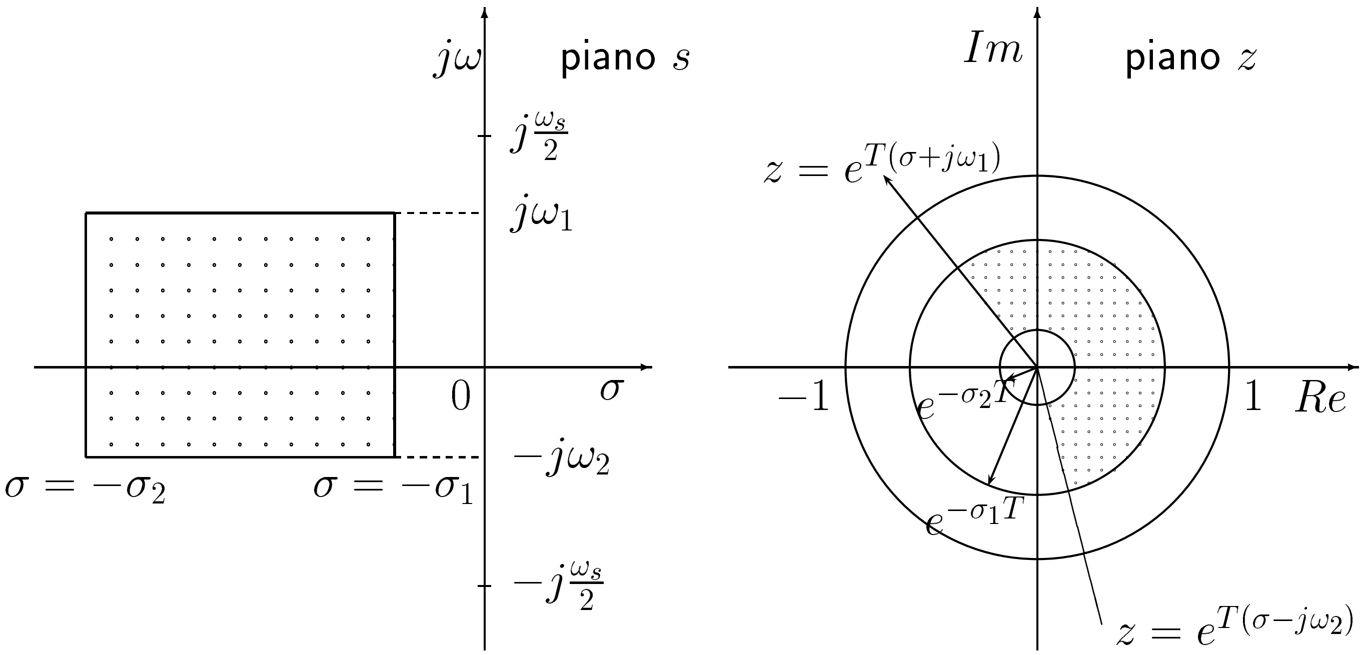
- Luoghi a decadimento esponenziale costante



- Luoghi a pulsazione costante



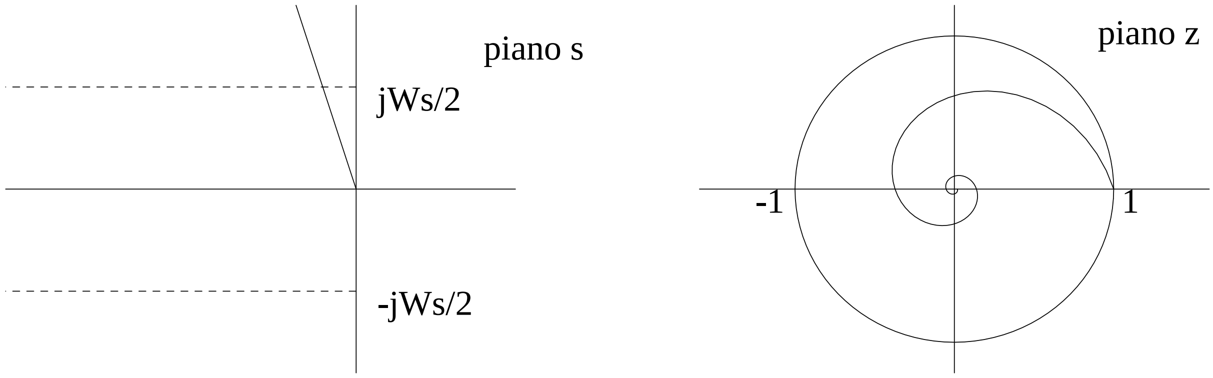
- Un esempio di corrispondenza fra due regioni del piano s e del piano z



- Luogo dei punti a coefficiente di smorzamento costante $\delta = \delta_1$

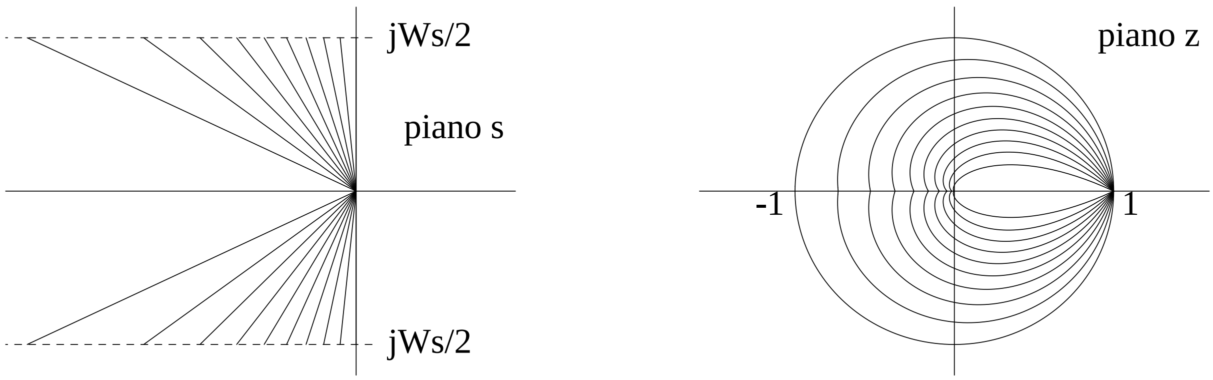
$$s = -\omega \tan\beta + j\omega = -\omega \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} + j\omega$$

$\beta = \arcsin \delta_1$

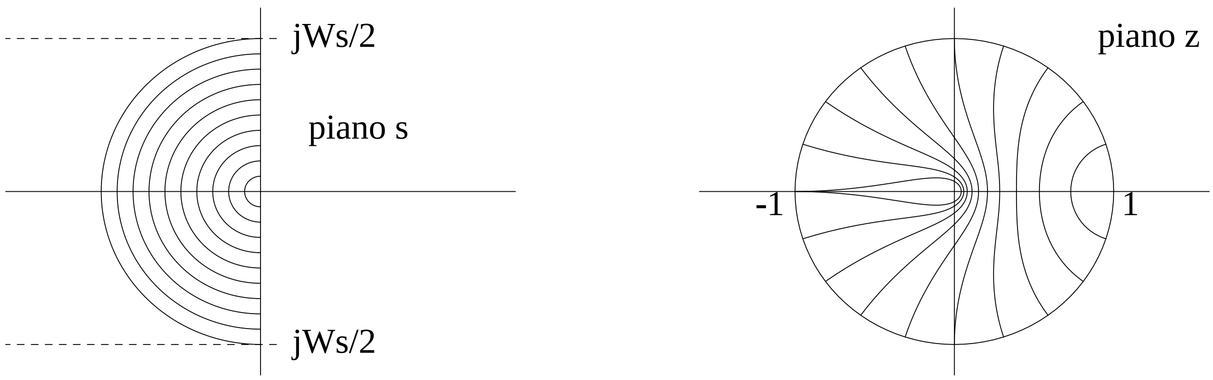


$$z = e^{sT} = e^{(-\omega \tan\beta + j\omega)T} = e^{-\varphi \tan\beta} e^{j\varphi} \qquad \varphi = \omega T$$

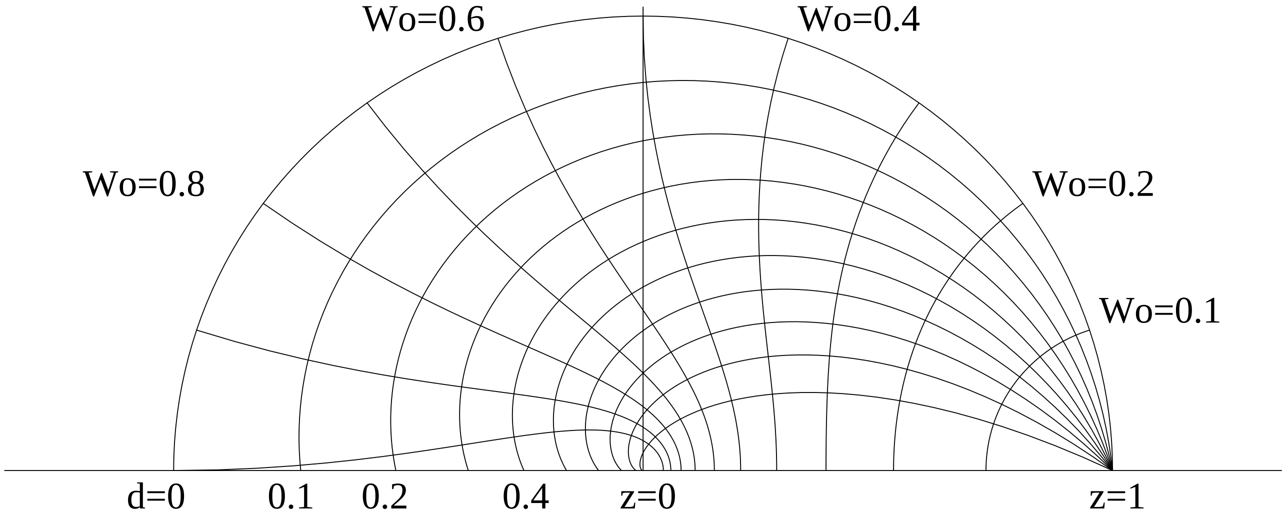
- Luoghi a coefficiente di smorzamento δ costante



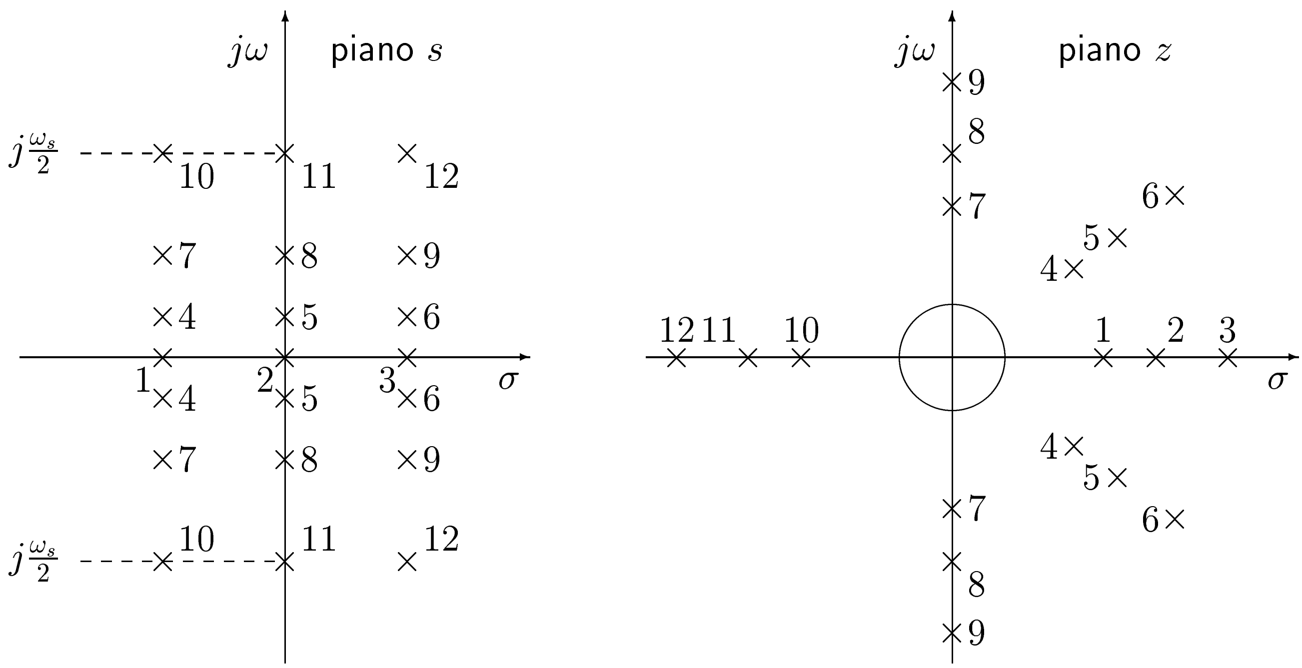
- Luoghi a pulsazione naturale ω_n costante



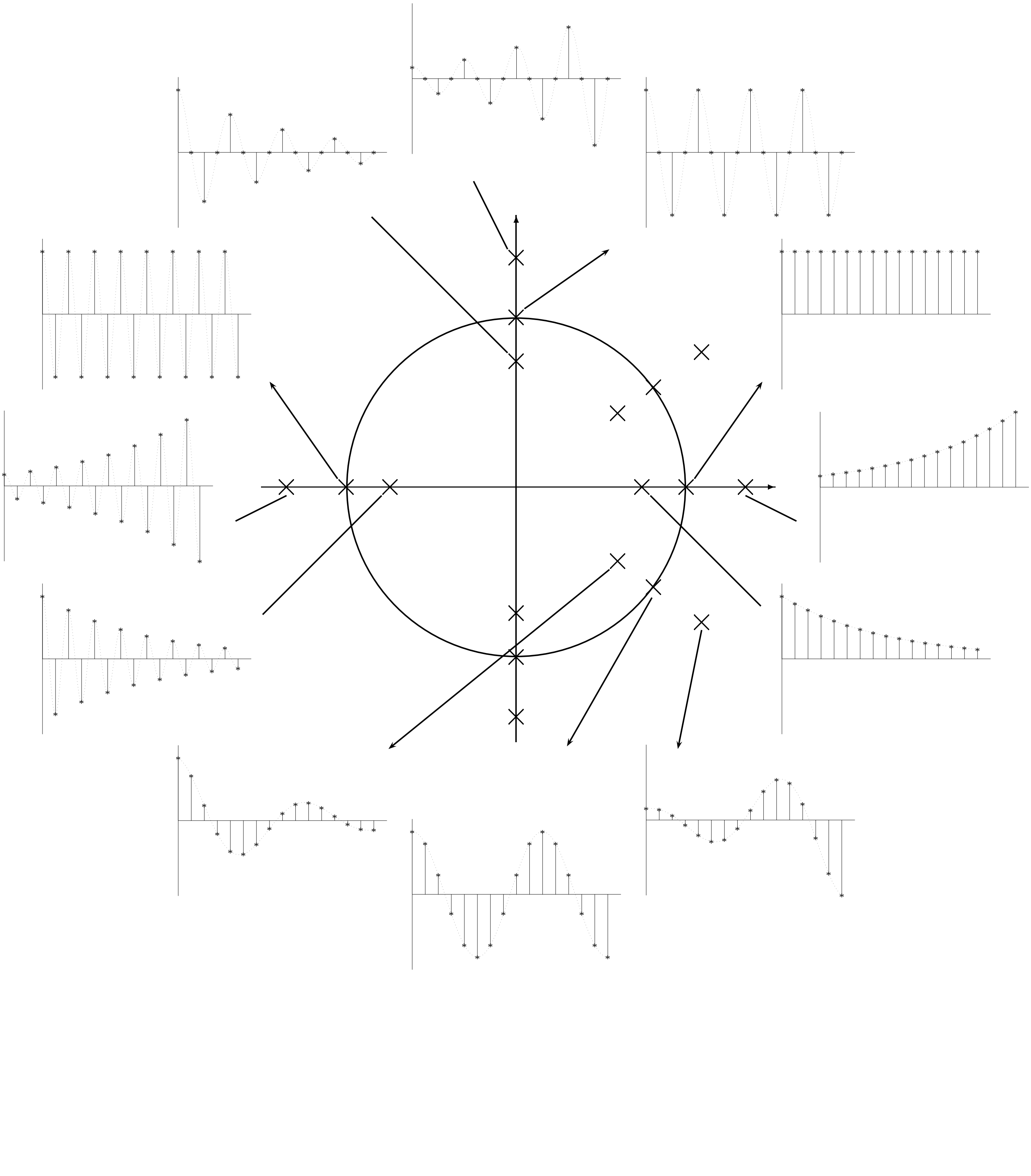
- Luoghi del piano z a δ e ω_n costanti



- I punti del piano s e del piano z, posti in corrispondenza per mezzo della relazione $z = e^{sT}$, possono essere considerati come poli corrispondenti di trasformate $F(s)$ ed $F(z)$, con $F(z)$ calcolata campionando $F(s)$

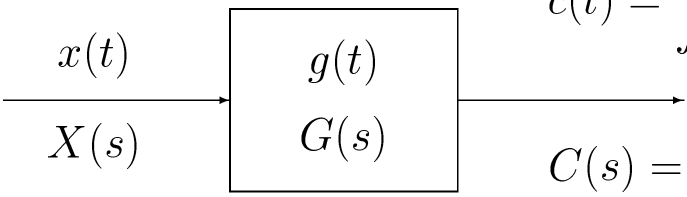


POSIZIONE DEI POLI E RISPOSTE TRANSITORIE



SISTEMI A TEMPO DISCRETO

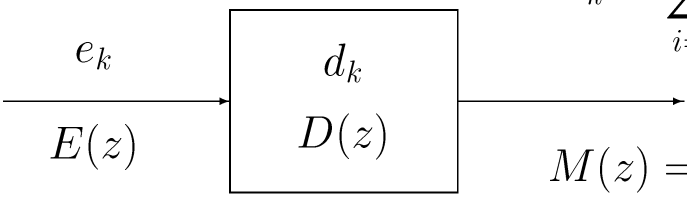
- Sistemi a tempo continuo



$$c(t) = \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

$$C(s) = G(s)\,X(s)$$

- Sistemi a tempo discreto

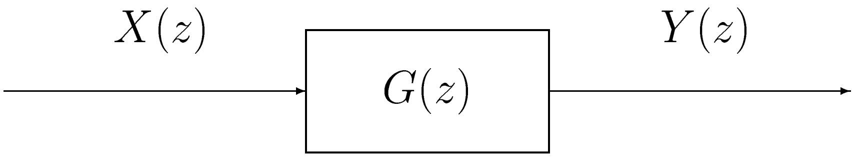


$$m_k = \sum_{i=0}^{k} d_i\, e_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} e_i\, d_{k-i}$$

$$M(z) = D(z)\,E(z)$$

- Funzione di trasferimento discreta

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT-hT)x(hT)$$



$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = 1 \qquad \rightarrow \qquad Y(z) = G(z)$$

- Funzione di risposta armonica discreta

$$G(e^{j\omega T}), \qquad\qquad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

$$G(e^{j(\omega+k\omega_s)T}) = G(e^{j\omega T}), \qquad\qquad G(e^{j(-\omega)T}) = G^*(e^{j\omega T})$$

- La risposta di un sistema $G(z)$ asintoticamente stabile ad un ingresso sinusoidale $\sin(\omega kT)$ di ampiezza unitaria è, a regime, una sinusoide $A\sin(\omega kT+\varphi)$ la cui ampiezza A è data dal modulo del vettore $G(e^{j\omega T})$, e la cui fase φ è data dalla fase del vettore $G(e^{j\omega T})$:

$$A = |G(e^{j\omega T})| \qquad\qquad \varphi = Arg[G(e^{j\omega T})]$$

STABILITÀ DEI SISTEMI DISCRETI

- Stabilità dei sistemi discreti

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Stabilità semplice
- Stabilità asintotica
- Il comportamento dinamico di un sistema

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

dipende dai poli di $G(z)$, cioè dalle radici del polinomio $A(z)$.

- Esempio

$$G(z) = \frac{4z^{-1}}{1 + az^{-1}} = \frac{4}{z + a}$$

in risposta a

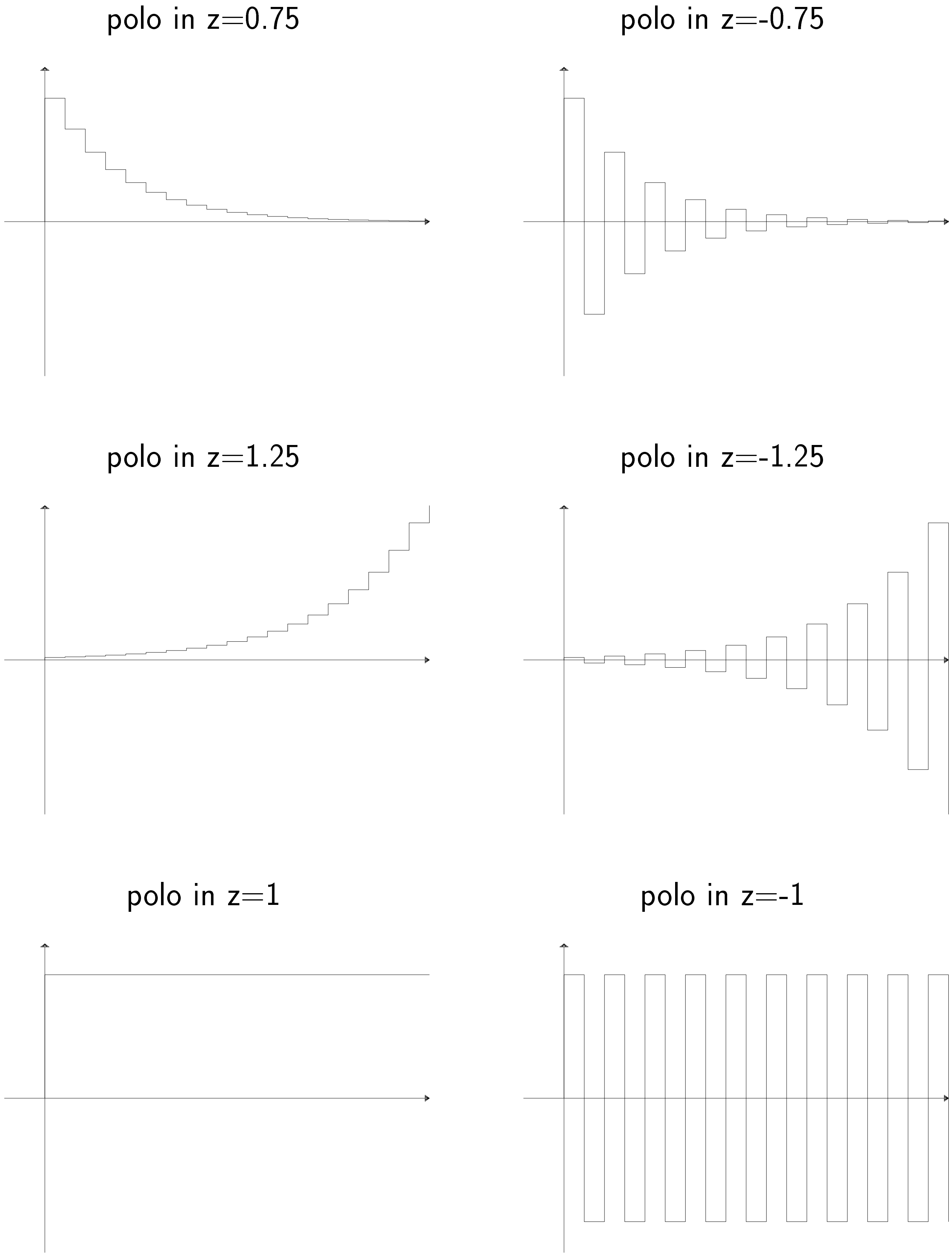
$$u(0) = 1, \qquad u(k) = 0, \quad k > 0;$$

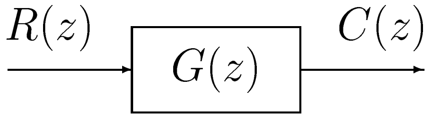
in corrispondenza ai valori $a = 0.75$, $a = -0.75$, $a = 1.25$, $a = -1.25$, $a = 1$, $a = -1$.

$$Y(z)(1 + az^{-1}) = 4z^{-1}U(z)$$

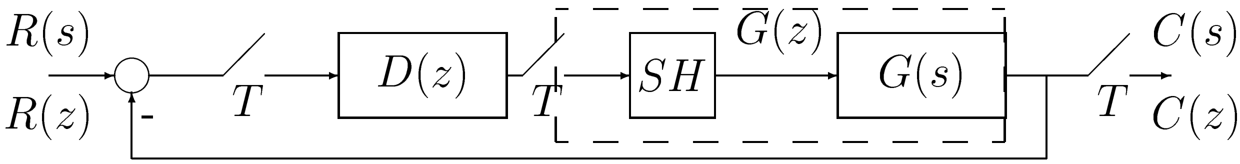
$$y(k) = -ay(k-1) + 4u(k-1)$$

$$y(k) \;=\; -ay(k-1) + 4u(k-1) = 4(-a)^{k-1}$$


polo in z=0.75
polo in z=-0.75
polo in z=1.25
polo in z=-1.25
polo in z=1
polo in z=-1



(a)



(b)

$$G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

- Sia dato un sistema descritto da

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad \text{oppure} \quad G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

- Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutte le radici del polinomio $A(z)$ (o del polinomio $1 + D(z)G(z)$), cioè i poli del sistema, sono entro il cerchio di raggio unitario con centro nell'origine del piano z ossia $|p_i| < 1, \forall i$.

- Il sistema è stabile se tutti i poli a modulo unitario $|p_i| = 1$ sono poli semplici (la loro molteplicità è 1), mentre tutti i rimanenti poli sono entro il cerchio unitario.

- Si deve risolvere una equazione polinomiale:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

la cui soluzione è agevole solo per piccoli valori di n

- Tre metodi per studiare la stabilità:
  1. utilizzare una trasformazione bilineare ed applicare il criterio di Routh-Hurwitz;
  2. utilizzare il criterio di Jury che elabora direttamente i coefficienti di $A(z)$, cioè del denominatore di $G(z)$
  3. criterio di Nyquist
- Trasformazione bilineare e criterio di Routh-Hurwitz

$$z = \frac{1+w}{1-w} \qquad \leftrightarrow \qquad w = \frac{z-1}{z+1}$$

- Il cerchio unitario in z corrisponde al semipiano sinistro del piano w
- $|z| = \left|\dfrac{1+w}{1-w}\right| = \left|\dfrac{1+\sigma+j\omega}{1-\sigma-j\omega}\right| < 1$

$$\frac{(1+\sigma)^2+\omega^2}{(1-\sigma)^2+\omega^2} < 1$$

$$(1+\sigma)^2+\omega^2 < (1-\sigma)^2+\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma < 0$$

- $|z| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad (1+\sigma)^2+\omega^2 = (1-\sigma)^2+\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = 0$
- Per l'analisi della stabilità di $G(z)$ ($G_0(z)$) si procede come segue:
  1. si considera l'equazione caratteristica

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

  2. si effettua la trasformazione

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^n + a_1 \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-1} + \ldots a_{n-1}\frac{1+w}{1-w} + a_n = 0$$

  da cui si ottiene

$$Q(w) = q_0 w^n + q_1 w^{n-1} + \cdots + q_{n-1} w + q_n = 0$$

  3. applicando il criterio di Routh-Hurwitz, si studiano quindi i segni delle radici di $Q(w)$

- Esempio:

$$G(z) = \frac{z+1}{z^3+2z^2+z+1}$$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + 2\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \frac{1+w}{1-w} + 1 = 0$$

$$-w^3 + 3w^2 + w + 5 = 0$$

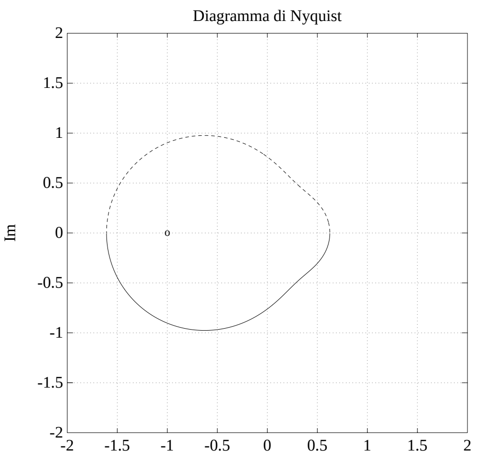
$$\begin{array}{c|cc} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 8/3 & \\ 0 & 5 & \end{array}$$

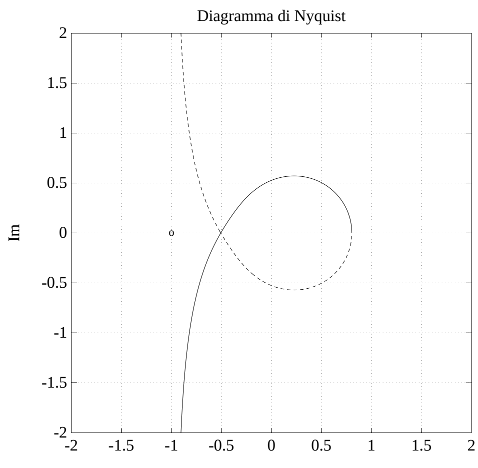
- Il sistema ha un polo instabile

- Il criterio di Nyquist permette di decidere circa la stabilità di sistemi in retroazione analizzando il comportamento frequenziale della risposta armonica di anello in rapporto al punto critico $(-1+j0)$

$$G(e^{j\omega T}), \qquad -\frac{\pi}{T} \le \omega \le \frac{\pi}{T}$$

- Se la $G(z)$ è di tipo 0, allora il diagramma relativo è una curva chiusa; se è di tipo 1 o 2, allora si ha una curva aperta, che viene chiusa con una circonferenza o semicirconferenza all'infinito percorsa in senso orario



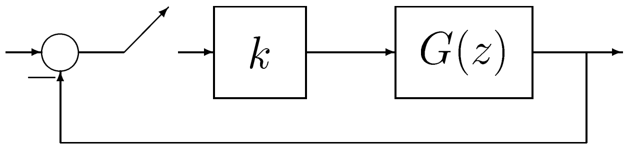


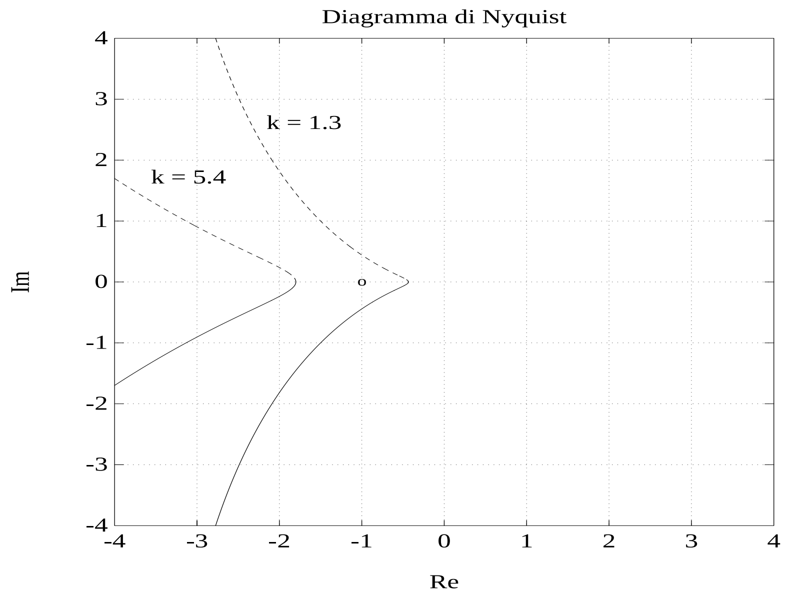
- Criterio di Nyquist I
  Sia data una funzione di guadagno d'anello $G(z)$ con tutti i poli stabili (a modulo minore di uno), con l'eventuale eccezione di un polo semplice o doppio in $z = 1$. Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(e^{j\omega T})$ tracciato per $-\pi/T \le \omega \le \pi/T$ non circondi nè tocchi il punto critico $-1 + j0$

- Criterio di Nyquist II
  Sia data una funzione di guadagno d'anello $G(z)$ senza poli a modulo unitario, con l'eventuale eccezione di un polo semplice o doppio in $z = 1$. Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(e^{j\omega T})$ tracciato per $-\pi/T \le \omega \le \pi/T$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $G(z)$ con modulo maggiore di uno. Ogni giro in meno in senso antiorario, oppure ogni giro in più in senso orario, corrisponde alla presenza di un polo a modulo maggiore di uno nel sistema in retroazione

- Esempio:

$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$$

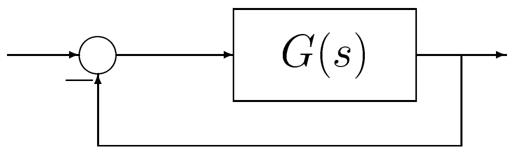


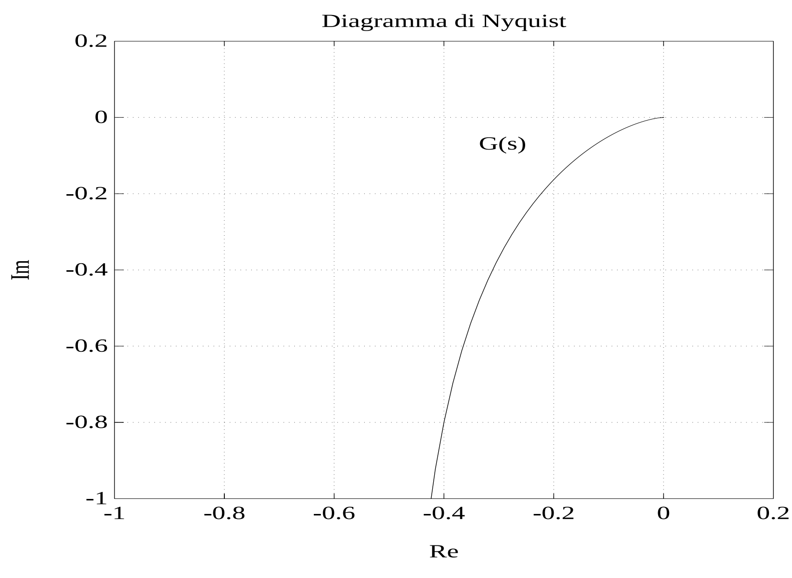


Il sistema in retroazione è stabile per $k = 1.3$ ed instabile per $k = 5.4$

- Esempio:

$$G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$





Il sistema è stabile

- Luogo delle radici

  È il luogo descritto dagli zeri di una funzione

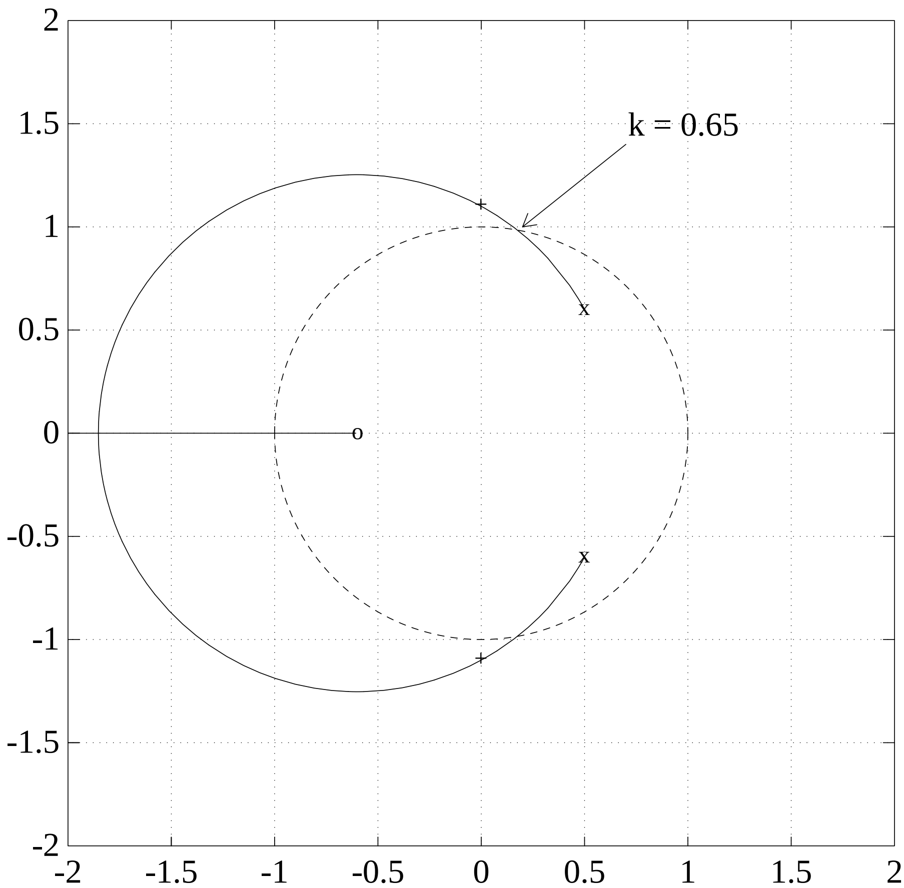
$$F(s) = 1 + k\ G(s) = 1 + k\ \frac{B(s)}{A(s)}$$

  al variare del parametro k nell'intervallo $[0, +\infty]$

- Per il tracciamento del luogo valgono le stesse regole del caso continuo
- Cambia l'interpretazione dei risultati che si ottengono
- Esempio. Dato il seguente sistema in catena aperta con due poli in $z_{1,2} = 0.5 \pm j0.6$:

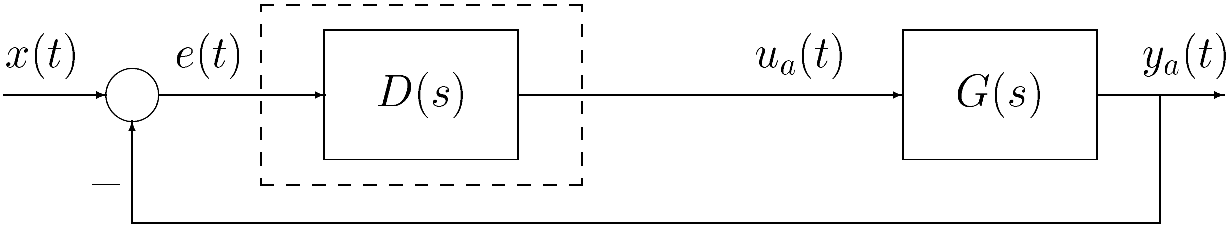
$$G(z) = k\frac{z + 0.6}{z^2 - z + 0.61}$$

  Per il sistema in retroazione unitaria

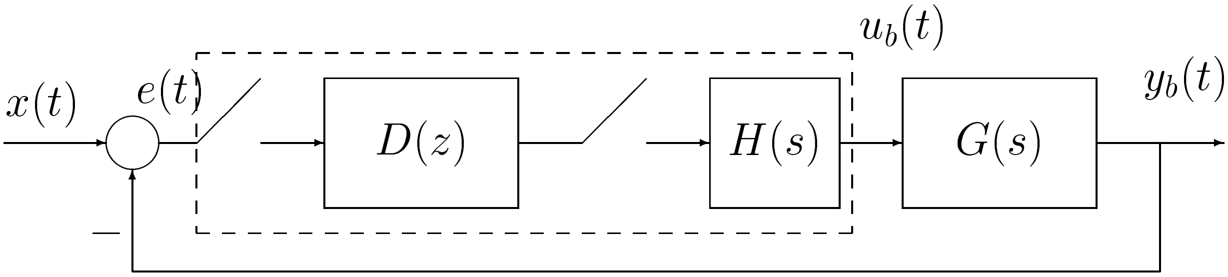


PROGETTO PER DISCRETIZZAZIONE

- Il regolatore $D(s)$ progettato in ambito "tempo continuo" (caso a) viene "discretizzato" ottenendo una funzione $D(z)$ che verrà inserita all'interno dell'anello di controllo discreto (caso b):



(a)



(b)

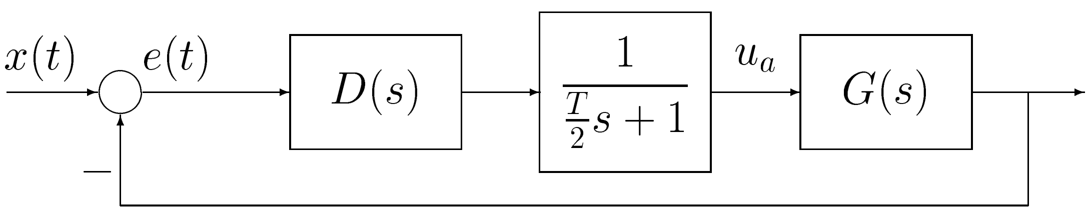
- Tutti i metodi di discretizzazione che verranno presentati sono "approssimati", cioè forniscono un sistema discreto $D(z)$ che riproduce bene, ma non esattamente, il comportamento dinamico del sistema $D(s)$.

- Più piccolo è il periodo di campionamento T, più il sistema $D(z)$ ha un comportamento dinamico simile a $D(s)$

- Il progetto per discretizzazione procede seguendo tre passi concettuali:

  1) Scelta del periodo di campionamento T e verifica dei margini di stabilità del sistema:

$$H_0(s) \approx \frac{1}{\frac{T}{2}s+1} \approx e^{-sT/2}$$



2) Discretizzazione della $D(s)$;

3) Verifica a posteriori (simulativa e/o sperimentale) del comportamento dinamico del sistema retroazionato.

- TECNICHE DI DISCRETIZZAZIONE:

1. Metodo delle differenze all'indietro
2. Metodo delle differenze in avanti
3. Trasformazione bilineare
4. Trasformazione bilineare con precompensazione
5. Metodo della $\mathcal{Z}$-trasformata
6. Metodo della $\mathcal{Z}$-trasformata con ricostruttore di ordine 0
7. Metodo della corrispondenza poli/zeri

1. METODO DELLE DIFFERENZE ALL'INDIETRO

- Il metodo consiste nella seguente sostituzione:

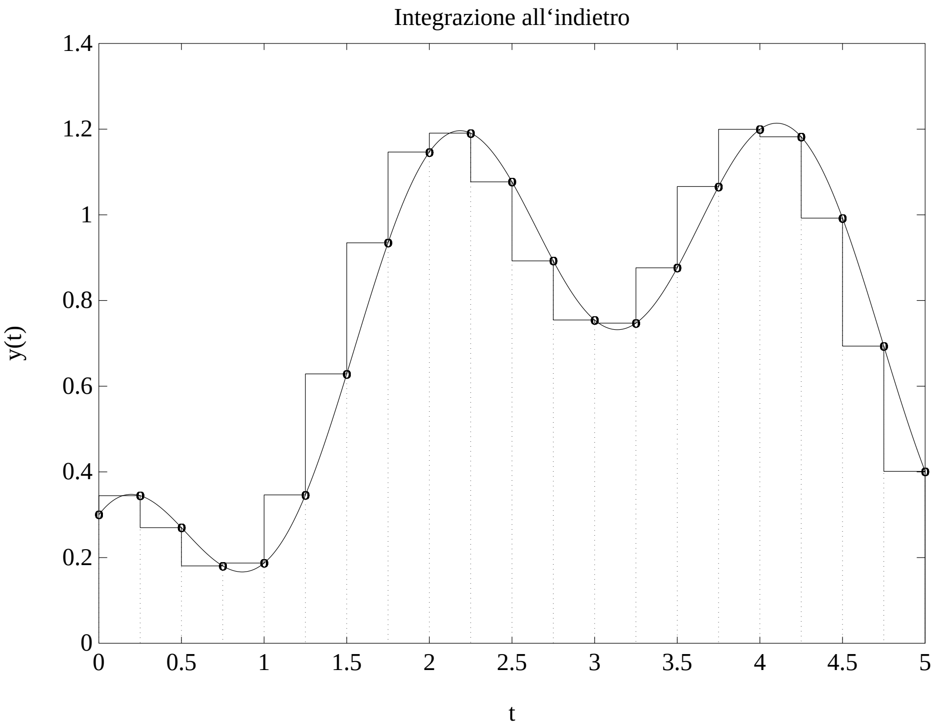
$$\boxed{D(z) = D(s)\Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}}$$

- L'equazione alle differenze che descrive l'operazione di integrazione rettangolare all'indietro è la seguente:

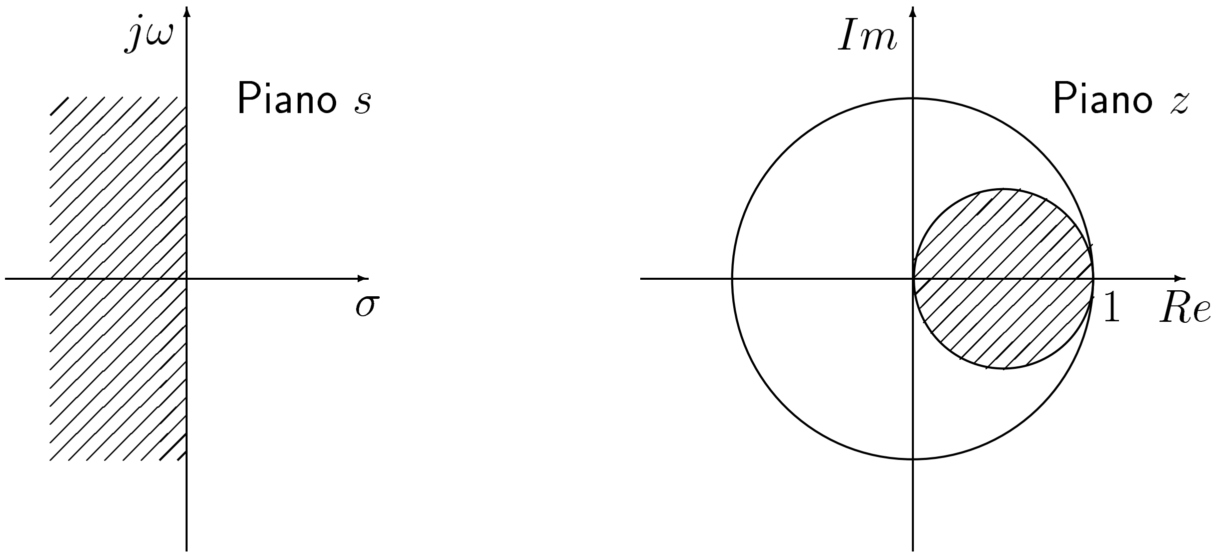
$$y(n) = y(n-1) + T\,x(n) \qquad \leftrightarrow \qquad Y(z) = \underbrace{\frac{T}{1-z^{-1}}}_{G(z)} X(z)$$

dove con $x(n)$ si è indicata la successione di ingresso e con $y(n)$ la corrispondete successione integrale di uscita.

Il legame $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$ nasce dal porre in corrispondenza l'integratore di un segnale tempo continuo, $\frac{1}{s}$, con il corrispondente integratore discreto $G(z)$ ottenuto per integrazione rettangolare all'indietro.



- Legame fra il piano s e il piano z:



- Per $z = \sigma + j\omega$

$$Re\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega}\right) = Re\left(\frac{(\sigma + j\omega - 1)(\sigma - j\omega)}{\sigma^2 + \omega^2}\right) = \frac{\sigma^2 - \sigma + \omega}{\sigma^2 + \omega^2} < 0$$

$$(\sigma - \frac{1}{2})^2 + \omega^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

- Regolatori stabili tempo continui $D(s)$ vengono trasformati in regolatori stabili tempo discreti $D(z)$.

Esempio. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete anticipatrice:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1+s}{1+0.2s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene

$$D(s) = \frac{1+s}{1+0.2s} = 5\frac{s+1}{s+5} \quad \rightarrow \quad D(z) = D(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{5(1+T-z^{-1})}{1+5T-z^{-1}} = \frac{1.1-z^{-1}}{0.3-0.2z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{5(1+T-z^{-1})}{1+5T-z^{-1}}$$

ottenendo

$$M(z)(1+5T-z^{-1}) = 5E(z)(1+T-z^{-1}) \quad \leftrightarrow \quad M(z)(1.5-z^{-1}) = E(z)(5.5-5z^{-1})$$

cioè

$$m(k) = \frac{1}{1.5}[m(k-1) + 5.5e(k) - 5e(k-1)]$$

da cui

$$m(k) = 0.666m(k-1) + 3.666e(k) - 3.333e(k-1)]$$

Esempio. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente funzione:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 2\frac{s+2}{s+5}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene

$$D(z) = D(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = 2\frac{1+2T-z^{-1}}{1+5T-z^{-1}} = 2\frac{1.2-z^{-1}}{1.5-z^{-1}}$$

Il calcolo della corrispondente equazione alle differenze è immediato

$$m(n) = \frac{1}{1.5}\left[m(n-1) + 2.4e(n) - 2e(n-1)\right]$$

2. METODO DELLE DIFFERENZE IN AVANTI

$$\boxed{D(z) = D(s)\Big|_{s = \dfrac{z-1}{T}}}$$

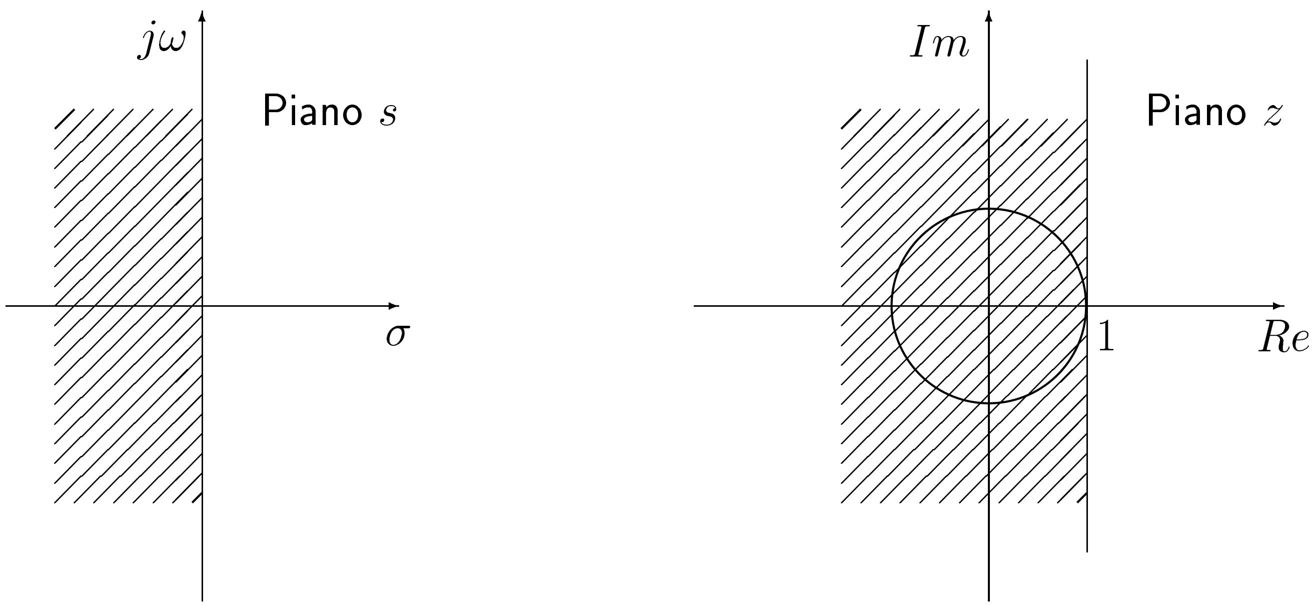
- Esempio

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt \;\approx\; Ty((k-1)T), \qquad \int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt \;\approx\; Tx((k-1)T)$$

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT\,[y((k-1)T) - x((k-1)T)]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{aTz^{-1}}{1-(1-aT)z^{-1}} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} + a}$$

$$Re(s) = Re\left(\frac{z-1}{T}\right) < 0 \qquad \rightarrow \qquad Re(z) < 1$$



- Un regolatore stabile $D(s)$ può trasformarsi in un regolatore instabile $D(z)$.

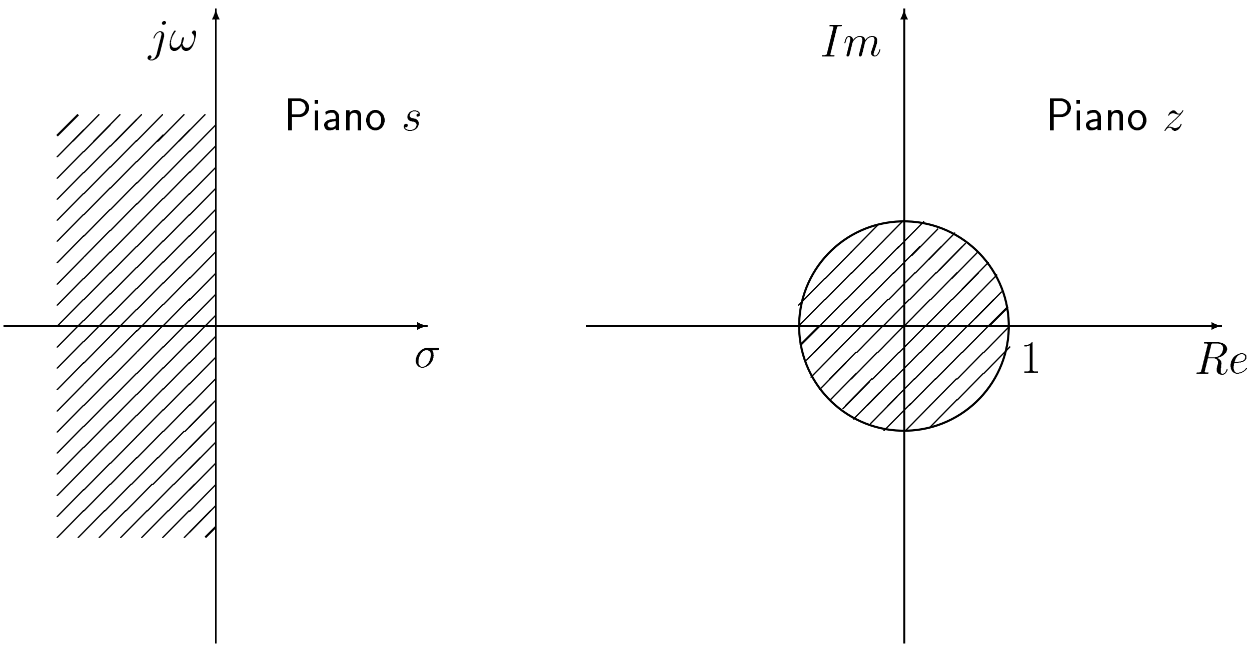
3. TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$\boxed{D(z) = D(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}}$$

- detta anche integrazione trapezoidale (o di di Tustin)

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt \quad \approx \quad \frac{[y(kT) + y((k-1)T)]T}{2}$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt \quad \approx \quad \frac{[x(kT) + x((k-1)T)]T}{2}$$

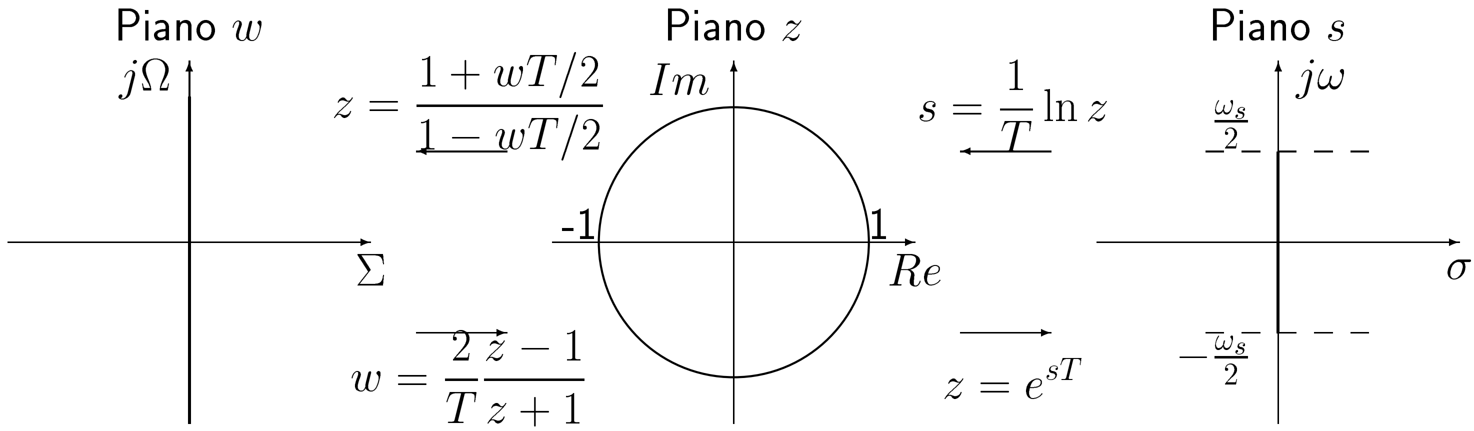


$$Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < 0$$

$$Re\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1}\right) = Re\left[\frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + j2\omega}{(\sigma+1)^2 + \omega^2}\right] < 0$$

$$\sigma^2 + \omega^2 < 1$$

- Relazione frequenziale tra il piano w, il piano z ed il piano s



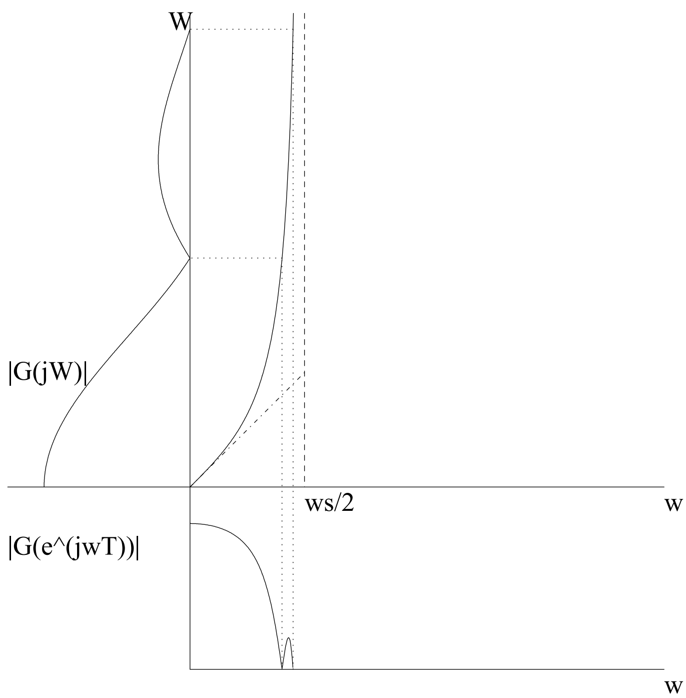
- La trasformazione non genera sovrapposizione frequenziale, ma introduce distorsioni

$$
\begin{aligned}
j\Omega &= \frac{2}{T}\frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}} \\
&= \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} = \frac{2}{T}\frac{2j\sin\omega T/2}{2\cos\omega T/2} \\
&= j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}
\end{aligned}
$$

$$D_c(j\Omega) = D_d(e^{j\omega T})$$

per

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}$$



Esempio. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare il seguente regolatore PI:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene

$$D(z) = D(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{10(1-z^{-1}) + (1+z^{-1})}{10(1-z^{-1})} = \frac{11 - 9\,z^{-1}}{10(1-z^{-1})}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(1-z^{-1}) = \frac{E(z)}{10}(11 - 9\,z^{-1})$$

da cui si ottiene

$$m(k) = m(k-1) + 1.1e(k) - 0.9e(k-1)$$

Esempio. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare la seguente funzione di trasferimento:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 2\frac{(1+0.25s)}{(1+0.1s)}$$

Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.05$.

[Soluzione.] La funzione di trasferimento da discretizzare è la seguente:

$$D(s) = 2\frac{(1+0.25s)}{(1+0.1s)} = 5\frac{(s+4)}{(s+10)}$$

Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene $(T = 0.005)$

$$D(z) = 5\frac{(s+4)}{(s+10)}\bigg|_{s\,=\,\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = 4.4\frac{z-\frac{9}{11}}{z-\frac{3}{5}} = 4.4\frac{1-0.8182z^{-1}}{1-0.6z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$(1-0.6z^{-1})M(z) = 4.4(1-0.8182z^{-1})E(z)$$

da cui si ottiene

$$m(k) = 0.6m(k-1) + 4.4e(k) - 3.6e(k-1)$$

4. TRASFORMAZIONE BILINEARE CON PRECOMPENSAZIONE

$$\boxed{s = \frac{\omega_1}{\tan\frac{\omega_1 T}{2}}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{\omega_1}{\tan\frac{\omega_1 T}{2}}\,\frac{z-1}{z+1}}$$

- Per $\Omega = \omega_1$ si ha $\omega = \omega_1$
- Esempio

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

- Precompensazione alla frequenza $\omega = a$

$$s = \frac{a}{\tan\frac{aT}{2}}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$G_d(z) = \frac{\tan\frac{aT}{2}(1+z^{-1})}{(\tan\frac{aT}{2}-1)z^{-1} + (\tan\frac{aT}{2}+1)}$$

- Esempio. Progettare un filtro passa basso discreto che approssimi il comportamento frequenziale nella banda $[0,\ 10] rad/s$ del filtro analogico

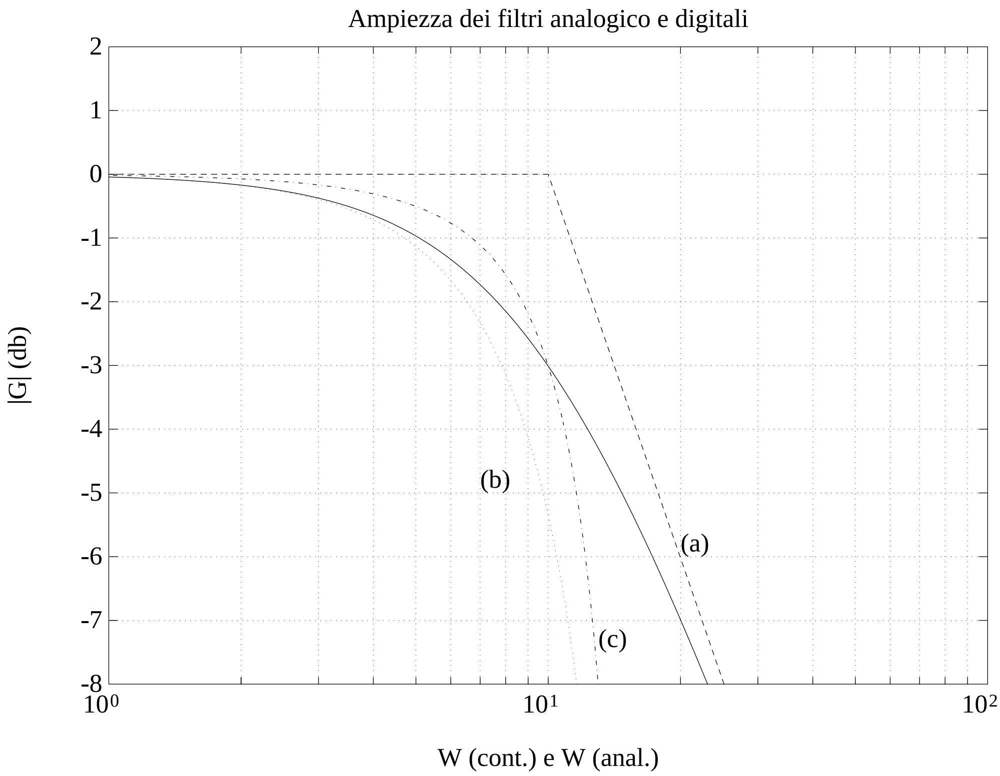
$$G(s) = \frac{10}{s+10} \qquad \text{con} \qquad T = 0.2\ s$$

$$G_d(z) = \frac{10}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 10} = \frac{1+z^{-1}}{2}$$

$$G_d(e^{j\omega T}) = \frac{10}{j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} + 10} = \frac{1}{j\tan 0.1\omega + 1}$$

- Utilizzando la precompensazione di frequenza per $\omega = 10\ rad/s$, si ottiene

$$G_d(z) = \frac{10}{\frac{10}{\tan\frac{10T}{2}}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 10} = \frac{0.609(1+z^{-1})}{1+0.218z^{-1}}$$



5. METODO DELLA $\mathcal{Z}$-TRASFORMATA

$$\boxed{D(z) = \mathcal{Z}\big[\mathcal{L}^{-1}[D(s)]\big]}$$

- Invarianza della risposta all'impulso
- Possibilità di aliasing
- Da $D(s)$ stabili a $D(z)$ stabili

6. METODO DELLA $\mathcal{Z}$-TRASFORMATA CON RICOSTRUTTORE DI ORDINE 0 o dell'invarianza alla risposta al gradino

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[D(z)\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[D(s)\frac{1}{s}\right]\bigg|_{t=kT}$$

$$D(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{D(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}D(s)\right]$$

- Possibilità di aliasing
- Da $D(s)$ stabili a $D(z)$ stabili

Esempio. Utilizzando il metodo della $\mathcal{Z}$ trasformata con ricostruttore di ordine zero, discretizzare la funzione:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s+2}{s+5}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della $\mathcal{Z}$ trasformata con ricostruttore di ordine zero, la discretizzare del regolatore $D(s)$ procede nel seguente modo:

$$D(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{s+2}{s+5}\right] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{s+2}{s(s+5)}\right] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{2}{5\,s} + \frac{3}{5(s+5)}\right]$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned}
D(z) &= (1-z^{-1})\left[\frac{2}{5(1-z^{-1})} + \frac{3}{5(1-e^{-5T}z^{-1})}\right] \\
&= \frac{2(1-e^{-5T}z^{-1}) + 3(1-z^{-1})}{5(1-e^{-5T}z^{-1})} \\
&= \frac{5-(3+2e^{-5T})z^{-1}}{5(1-e^{-5T}z^{-1})} = \frac{5-4.213\,z^{-1}}{5(1-0.6065\,z^{-1})}
\end{aligned}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(5-3.0325\,z^{-1}) = E(z)(5-4.213\,z^{-1})$$

da cui

$$m(k) = \frac{1}{5}[3.0325\,m(k-1) + 5e(k) - 4.213e(k-1)]$$

cioè

$$m(k) = 0.6065\,m(k-1) + e(k) - 0.8426e(k-1)$$

7. METODO DELLA CORRISPONDENZA POLI/ZERI

- Si fattorizza numeratore e denominatore di $D(s)$
- Trasformazione dei poli e zeri

$$(s+a) \;\rightarrow\; (1-e^{-aT}z^{-1})$$

$$(s+a\pm jb) \;\rightarrow\; (1-2e^{-aT}\cos bTz^{-1}+e^{-2aT}z^{-2})$$

- Si introducono zeri in $z=-1$ in numero pari al grado relativo
- Si aggiusta il guadagno alle basse ($z=1$) o alle alte ($z=-1$) frequenze
- Esempio

$$D(s)=\frac{s+b}{s+a} \qquad \rightarrow \qquad D(z)=k\frac{z-e^{-bT}}{z-e^{-aT}}$$

$$D(z=1)=k\frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}}=D(s=0)=\frac{b}{a}$$

$$k=\frac{b}{a}\frac{1-e^{-aT}}{1-e^{-bT}}$$

- Esempio. Filtro passa alto

$$D(s)=\frac{s}{s+a}$$

$$D(z)=k\frac{z-1}{z-e^{-aT}} \qquad k=\frac{1+e^{-aT}}{2}$$

- Esempio

$$D(s)=\frac{1}{(s+a)^2+b^2}=\frac{1}{(s+a+jb)(s+a-jb)}$$

- Eccesso poli-zeri uguale a 2

$$D(z)=k\frac{(z+1)^2}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$$

$$k=\frac{1-2e^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}{4(a^2+b^2)}$$

Esempio. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri, discretizzare il seguente regolatore PI:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$ e si imponga l'uguaglianza dei guadagni alle alte frequenze.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri si ottiene

$$D(s) = \frac{s+1}{s} \qquad \rightarrow \qquad D(z) = k\frac{1-e^{-T}z^{-1}}{1-z^{-1}}\bigg|_{T=0.2} = k\frac{1-0.8187z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Il valore di k si calcola imponendo l'uguaglianza dei guadagni alle elevate frequenze

$$D(s)|_{s\to\infty} = D(z)|_{z=-1} \qquad \leftrightarrow \qquad 1 = k\frac{1+e^{-T}}{2} \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{2}{1.8187} = 1.1$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(1-z^{-1}) = kE(z)(1-0.8187z^{-1})$$

ottenendo

$$m(k) = m(k-1) + ke(k) - k0.8187e(k-1)$$

da cui

$$m(k) = m(k-1) + 1.1e(k) - 0.9e(k-1)$$

Esempio. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri, discretizzare la seguente funzione di trasferimento:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s+3}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri si ottiene

$$D(s) = \frac{s+1}{s+3} \qquad \rightarrow \qquad D(z) = k\frac{1-e^{-T}z^{-1}}{1-e^{-3T}z^{-1}}\bigg|_{T=0.1} = k\frac{1-0.905z^{-1}}{1-0.741z^{-1}}$$

Il valore di k si calcola imponendo l'uguaglianza dei guadagni statici

$$D(s)|_{s=0} = D(z)|_{z=1} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{1}{3} = k\frac{1-e^{-T}}{1-e^{-3T}} \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{1-e^{-3T}}{3(1-e^{-T})} = 0.908$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(1 - 0.741z^{-1}) = kE(z)(1 - 0.905z^{-1})$$

ottenendo

$$m(k) = 0.741m(k-1) + ke(k) - k0.905e(k-1)$$

da cui

$$m(k) = 0.741m(k-1) + 0.908e(k) - 0.821e(k-1)$$

Esempio. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri discretizzare la rete anticipatrice

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzino i seguenti parametri: $\tau = 1$, $\alpha = 0.2$ e $T = 0.1$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri si ottiene

$$D(s) = \frac{1+s}{1+0.2s} = 5\frac{s+1}{s+5} \qquad \rightarrow \qquad D(z) = k\frac{1-e^{-T}z^{-1}}{1-e^{-5T}z^{-1}}\bigg]_{T=0.1} = k\frac{1-0.905z^{-1}}{1-0.606z^{-1}}$$

Il valore di k si calcola imponendo l'ugualianza dei guadagni statici

$$D(s)|_{s=0} = D(z)|_{z=1} \qquad \leftrightarrow \qquad 1 = k\frac{1-e^{-T}}{1-e^{-5T}} \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{1-e^{-5T}}{1-e^{-T}} = 4.135$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = k\frac{1-0.905z^{-1}}{1-0.606z^{-1}}$$

ottenendo

$$M(z)(1 - 0.606z^{-1}) = kE(z)(1 - 0.905z^{-1})$$

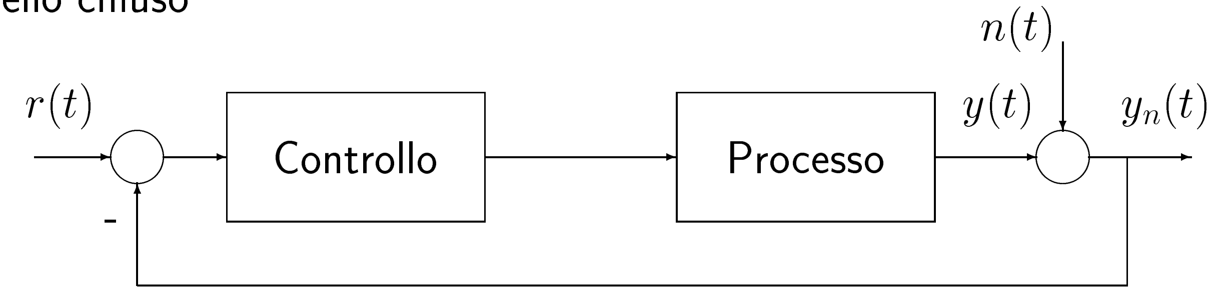
cioè

$$m(k) = 0.606m(k-1) + ke(k) - k0.905e(k-1)$$

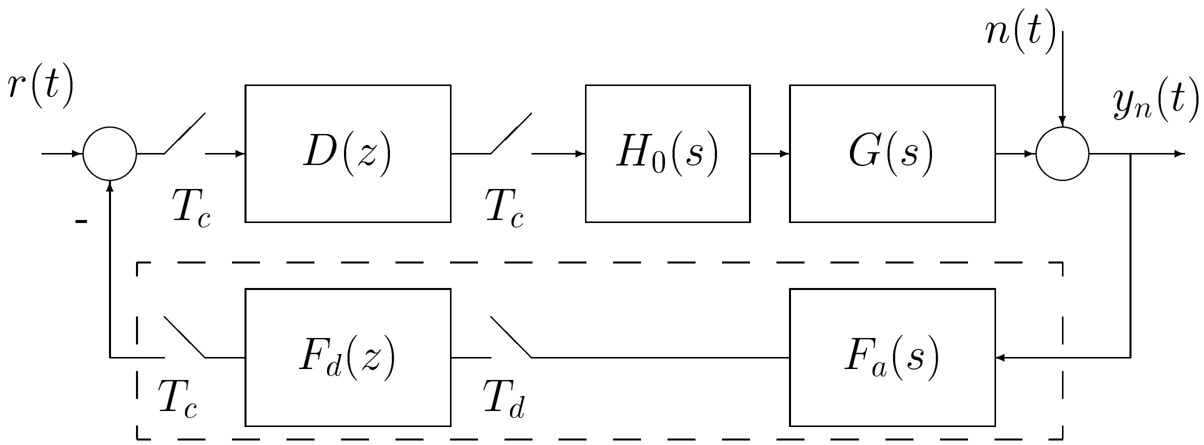
da cui

$$m(k) = 0.606m(k-1) + 4.135e(k) - 3.742e(k-1)$$

- Filtraggio antialiasing
- L'aliasing prodotto dal campionamento introduce componenti di segnale non desiderate a basse frequenze, ossia nella banda del segnale utile in anello chiuso

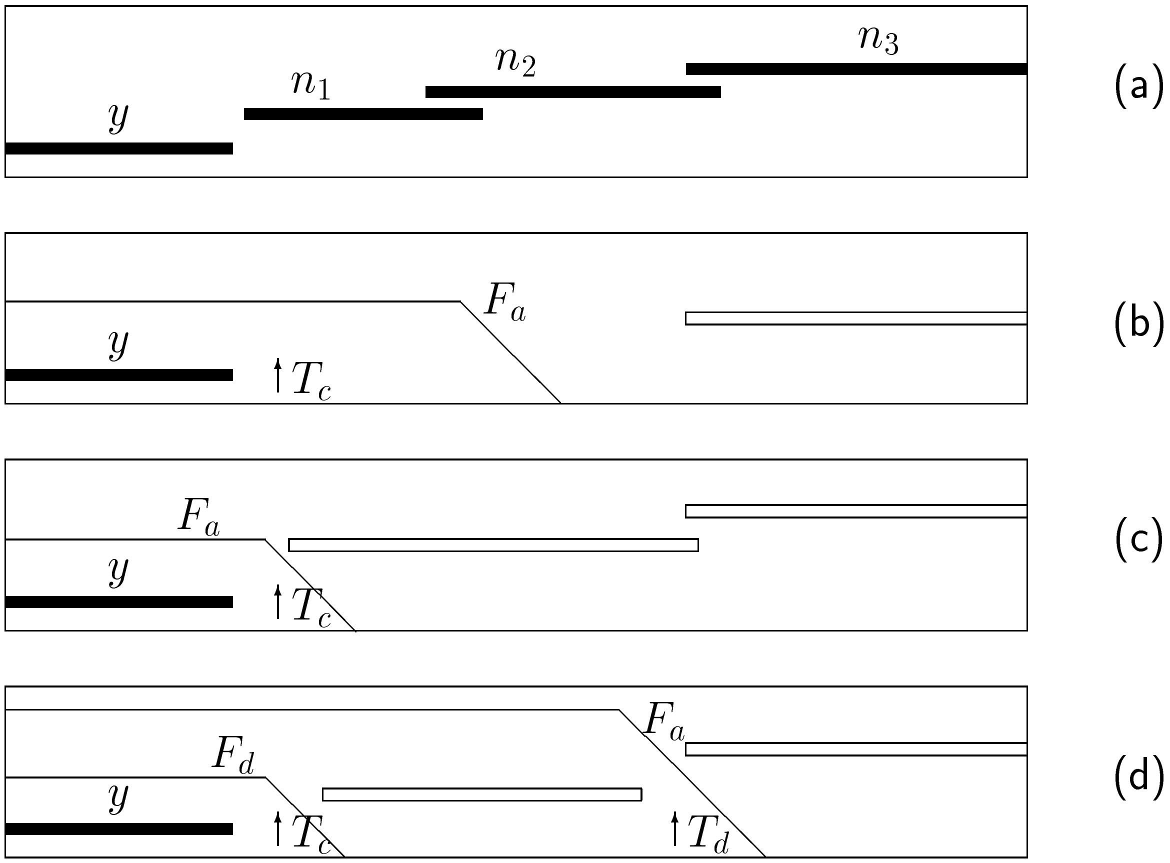


- È necessario introdurre opportuni filtri che eliminano il più possibile, prima del campionamento, il segnale di rumore
- Natura e banda di frequenza del rumore
- Complessità realizzativa
- Potenza di calcolo a disposizione



- Filtri di tipo analogico: passivi o attivi

- Diversi casi di filtraggio e di rumori presenti nel sistema



- Filtraggio analogico
- Filtri RC (del primo ordine)
- Pendenza di $20\ db$ per decade
- È bene che l'azione filtrante non interessi la zona di segnale utile, per mantenere la prontezza del sistema

- Filtraggio digitale
- Periodo di campionamento minore di quello di controllo
- Filtro di media oppure filtro per discretizzazione
- Filtro di media:

$$y(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u(k-i)$$

con periodo di acquisizione

$$T_d = \frac{T_c}{N}$$

- Discretizzazione di un filtro analogico
- Esempio. Filtro del primo ordine:

$$F(s) = \frac{1}{1+\tau s}$$

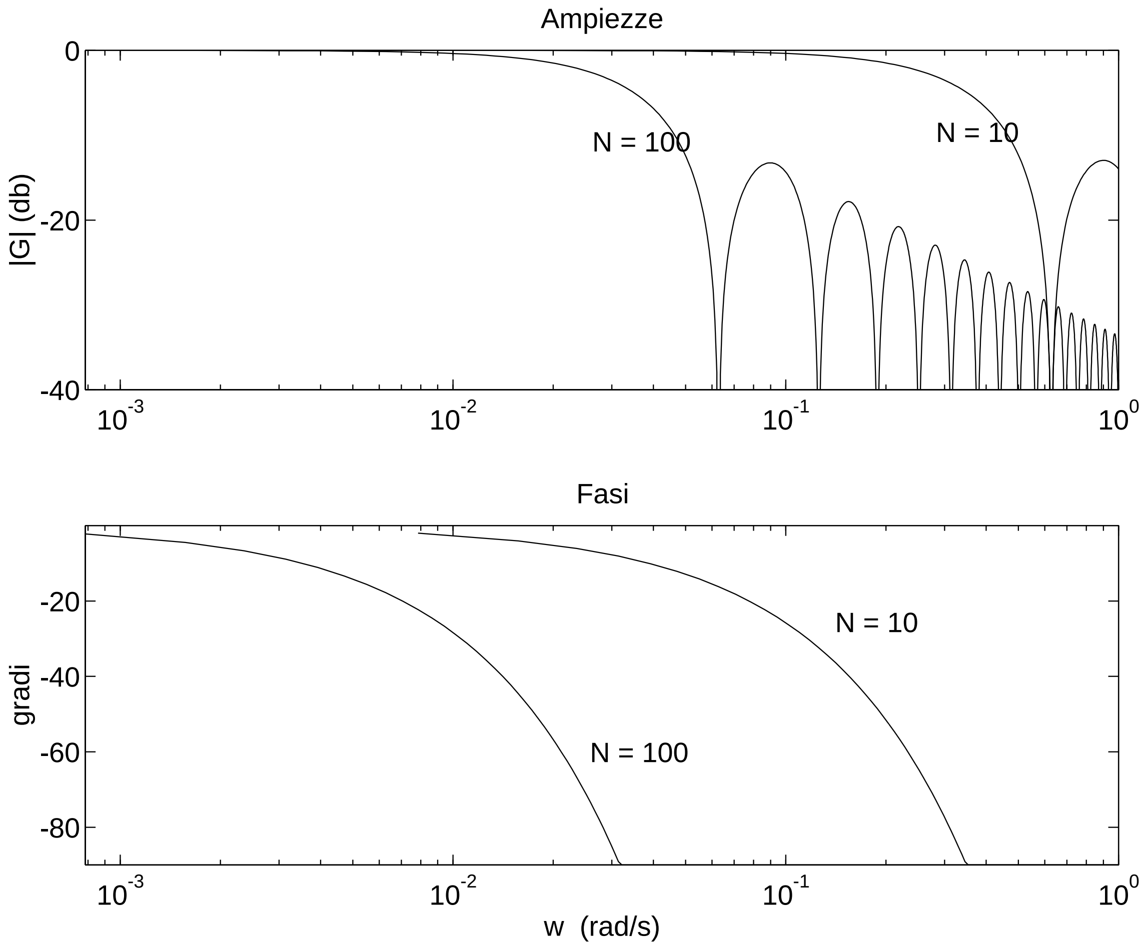
- Con il metodo delle differenze all'indietro:

$$F(z) = \frac{T_d/\tau}{(T_d/\tau) - z^{-1}}$$

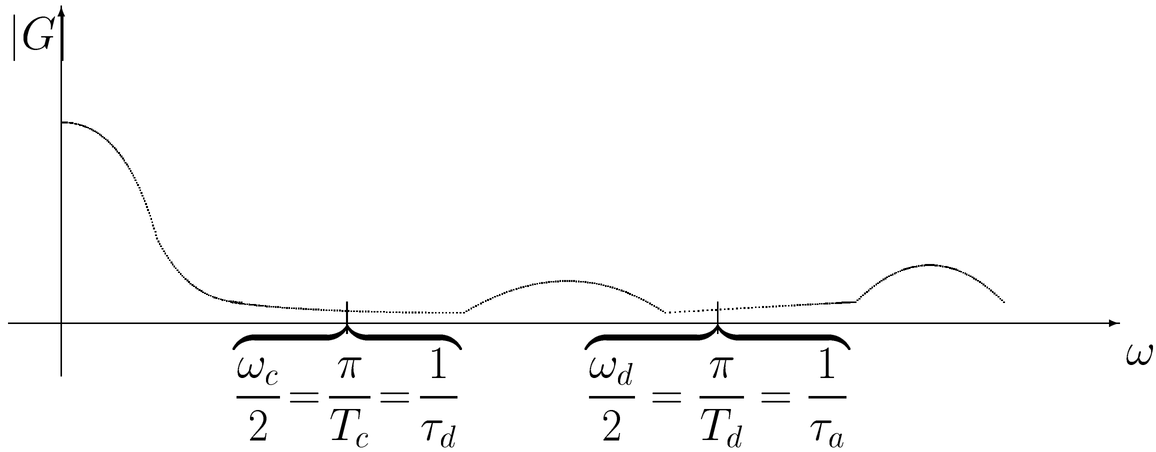
- Con il metodo della corripondenza poli/zeri:

$$F(z) = \frac{1-e^{-T_d/\tau}}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-e^{-T_d/\tau} z^{-1}}$$

- Diagrammi di Bode di due filtri di media



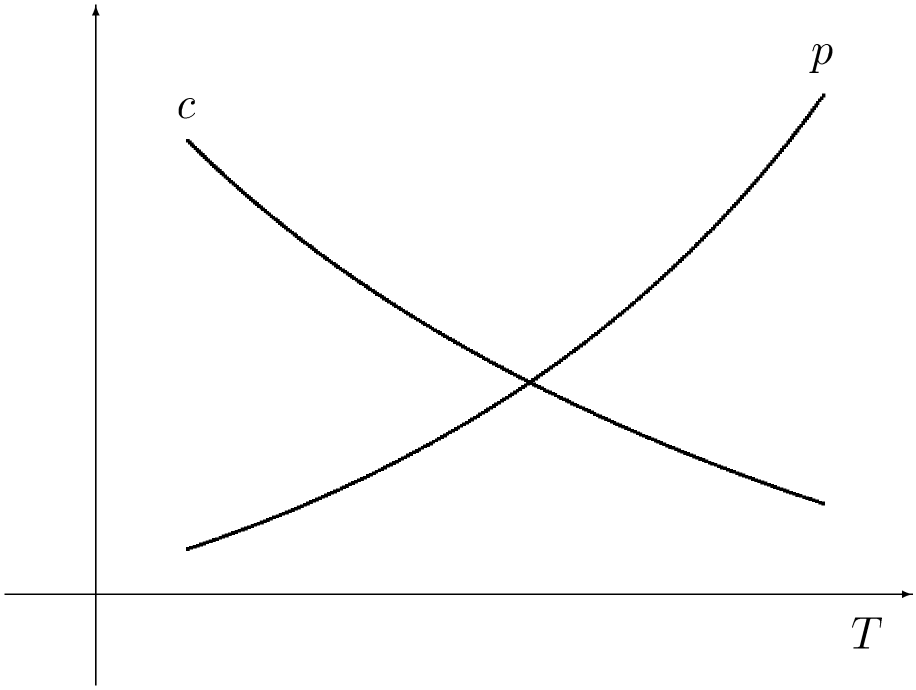
- Scelta delle costanti di tempo del filtro analogico, e dell'eventuale filtro digitale



$$\omega_a = \frac{\omega_c}{2} = \frac{\pi}{T_c}, \qquad \omega_a \approx 2/T_c, \qquad \tau_a = 1/\omega_a \approx T_c/2$$

- $\tau_d \approx T_c/2$, mentre la costante di tempo del filtro analogico τ_a deve essere rapportata al periodo di campionamento del filtro, come $\tau_a \approx T_d/2$

- Considerazioni riassuntive sulla scelta del periodo di campionamento



- Prestazioni
  - reiezione dei disturbi
  - inseguimento del set-point
  - energia di controllo
  - ritardi e stabilità
  - robustezza alle variazioni parametriche
- Costo
  - sfruttamento della capacità elaborativa
  - velocità di conversione
  - velocità di elaborazione
  - precisione nella memorizzazione dei parametri e delle variabili