

- **PROCESSO:**

Un insieme di operazioni o di trasformazioni che devono avvenire in sequenza opportuna in un impianto o in un sistema fisico

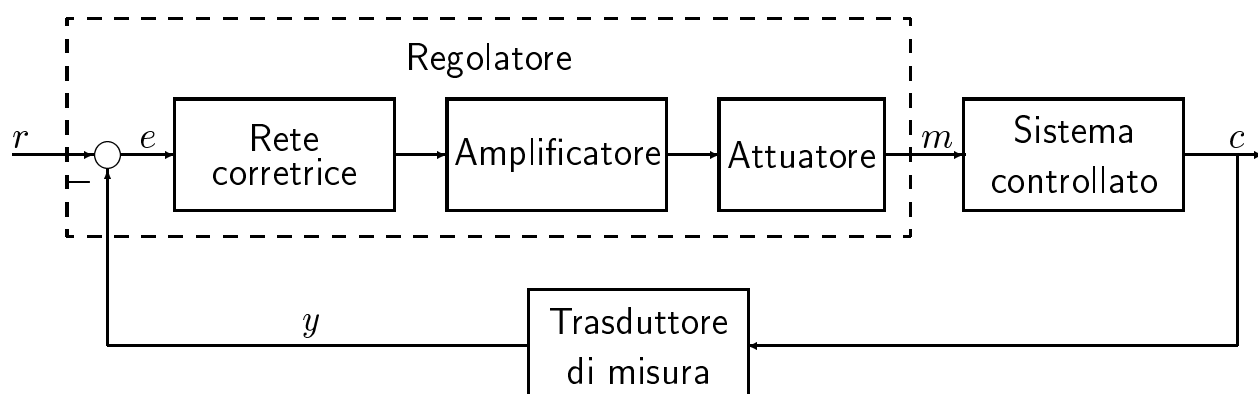
- **CONTROLLO DEI PROCESSI:**

Insieme di metodologie, tecniche e tecnologie orientate alla conduzione automatizzata di impianti industriali

- **SISTEMI DI CONTROLLO DIGITALE:**

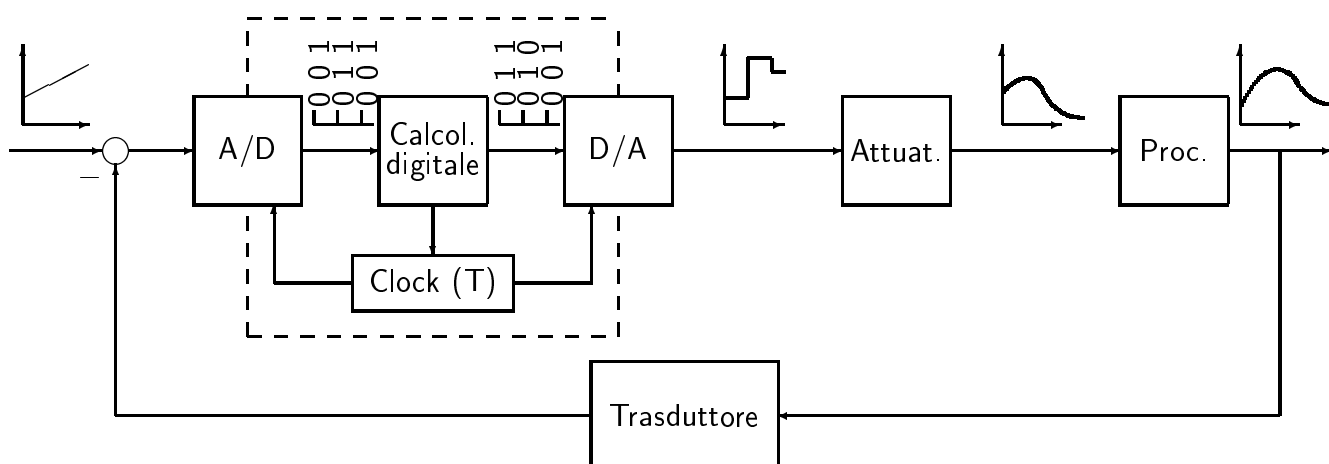
Sistemi di controllo in retroazione in cui è presente un calcolatore digitale e quindi una elaborazione a tempo discreto della legge di controllo

- **SISTEMA DI CONTROLLO ANALOGICO:**

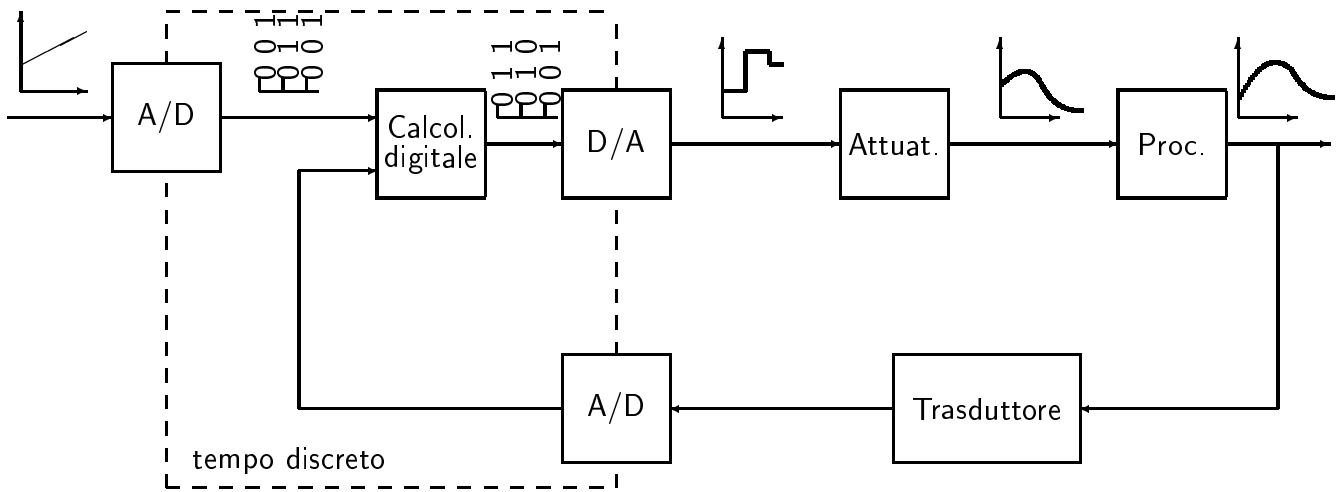


SCHEMI TIPICI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE

- **Campionamento del segnale errore:**



- Campionamento del segnale retroazionato:

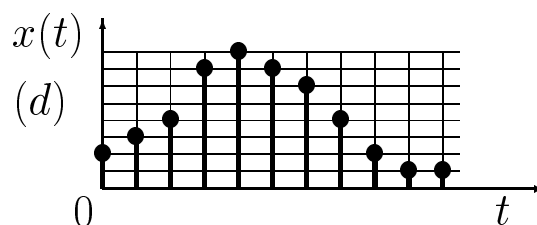
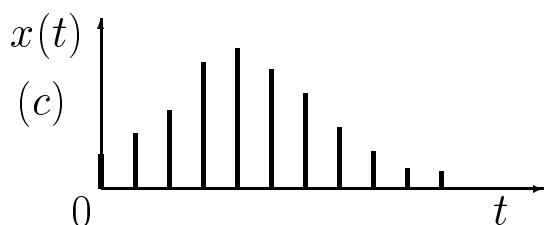
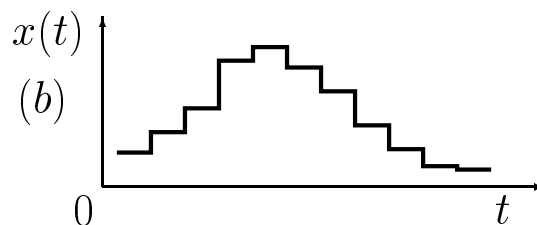
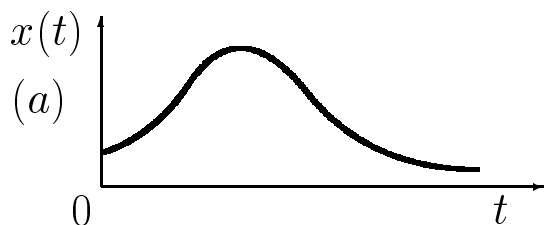


- CONTROLLO DIGITALE / CONTROLLO ANALOGICO:

- + Maggiore capacità e precisione di elaborazione
- + Maggiore flessibilità
- + Maggiore affidabilità e ripetibilità
- + Maggiore trasmissibilità dei segnali
- Progettazione più difficile e articolata
- Stabilizzabilità più precaria
- Possibilità di arresti non previsti
- Necessità di utilizzare energia elettrica

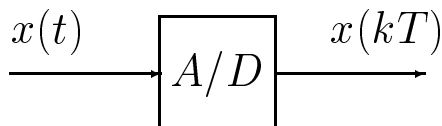
SEGNALI DI INTERESSE

a) Analogico di tipo continuo; b) Tempo-continuo quantizzato; c) A dati campionati; d) Digitale

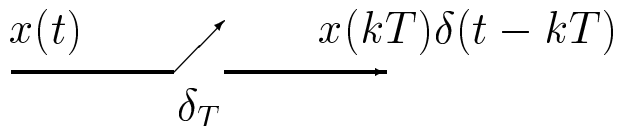
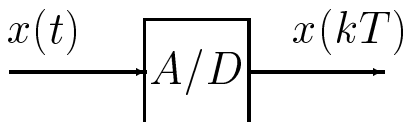


DISPOSITIVI DI INTERFACCIA

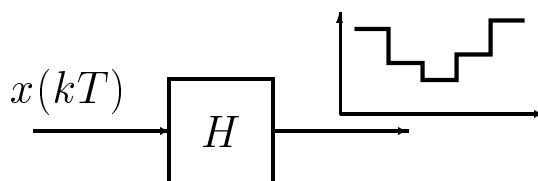
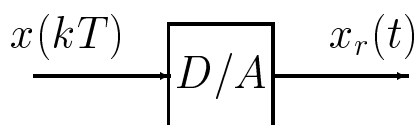
- A/D, convertitore Analogico/Digitale



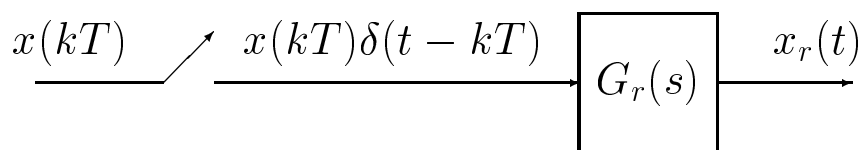
Campionamento ad impulsi di Dirac:



- D/A, convertitore Digitale/Analogico



Modello:



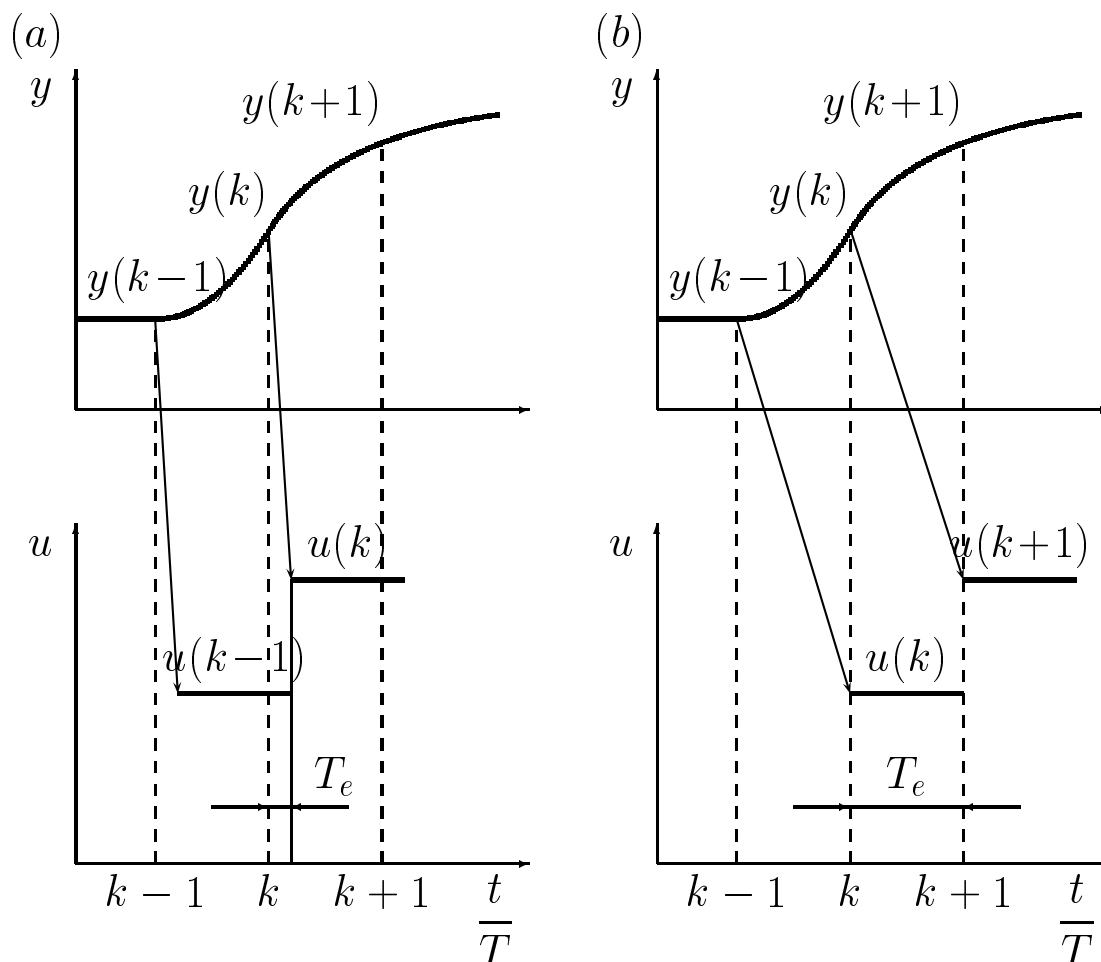
Caso dell'Hold:

$$G_r(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

ANELLO DI CONTROLLO DIGITALE

- Parte tempo continua: processo/impianto
- Parte tempo discreta: sistema di controllo
- Campionamento regolare di periodo T
- Trasformata Zeta

TEMPO DI ELABORAZIONE E SINCRONIZZAZIONE



- Equazione alle differenze:

$$u_k = f(e_0, e_1, \dots, e_k; u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$$

Se $f(\cdot)$ è lineare:

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - \dots - a_n u_{k-n} + b_0 e_k + \dots + b_m e_{k-m}$$

- Esempio:

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} + b_0 e_k$$

Ponendo

$$\begin{aligned} u_k &= u_k \\ u_{k-1} &= u_k - \nabla u_k \\ u_{k-2} &= u_k - 2\nabla u_k + \nabla^2 u_k \end{aligned}$$

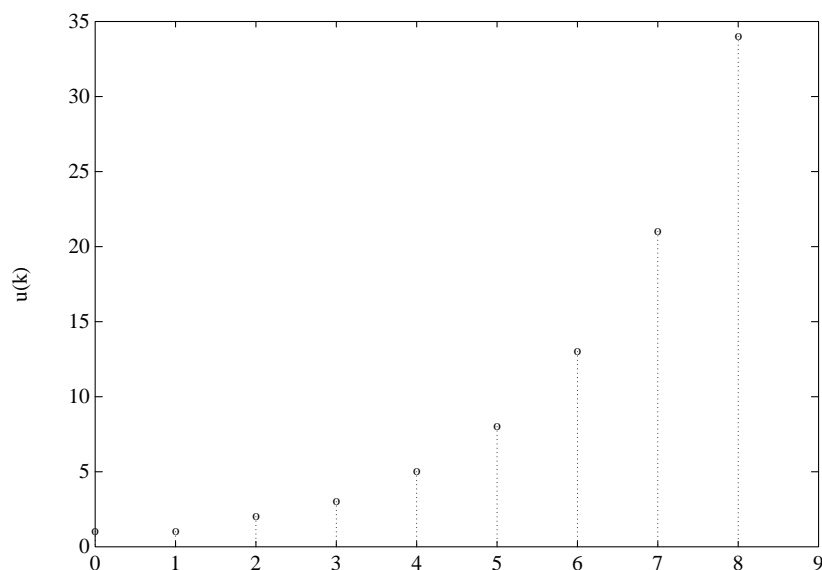
si ottiene

$$a_2 \nabla^2 u_k - (a_1 + 2a_2) \nabla u_k + (a_2 + a_1 + 1) u_k = b_0 e_k$$

- Soluzione di equazioni alle differenze a coefficienti costanti

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2} \quad k \geq 2$$

$$u_0 = u_1 = 1.$$



- Soluzione elementare tipo z^k :

$$cz^k = cz^{k-1} + cz^{k-2}$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$$

quindi in generale vale:

$$u_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$$

con c_1, c_2 determinate dalle condizioni iniziali per $k = 0, 1$. Infine si ha

$$u_k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

Andamento divergente, dunque sistema instabile.

- Se almeno una delle radici della equazione caratteristica ha modulo maggiore di uno, la corrispondente equazione alle differenze è instabile, cioè la sua soluzione divergerà al crescere del tempo per condizione iniziale finita
- Se tutte le radici dell'equazione caratteristica sono entro in cerchio unitario, allora la corrispondente equazione alle differenze è stabile, cioè la sua soluzione convergerà a zero al crescere del tempo per ogni condizione iniziale finita
- Sia data una sequenza di valori $x_k \in \mathbb{R}$, definita per $k = 0, 1, 2, \dots$ e nulla per $k < 0$. La \mathcal{Z} -trasformata (unilatera) della sequenza x_k è la funzione di variabile complessa z definita come

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[x_k] &= x_0 + x_1 z^{-1} + \dots + x_k z^{-k} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \end{aligned}$$

Nel caso in cui la sequenza di valori x_k sia ottenuta campionando uniformemente con periodo T un segnale continuo descritto dalla funzione $x(t)$, $t \geq 0$, si avrà che $x_k = x(kT)$:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

- L'espressione estesa

$$X(z) = x(0) + x(T) z^{-1} + x(2T) z^{-2} + \dots + x(kT) z^{-k} + \dots$$

implica la specificazione del parametro periodo di campionamento T , da cui dipendono i valori dei campioni della sequenza, cioè i coefficienti della serie.

- Si usa:

$$X(z) = \mathcal{Z}[X(s)]$$

intendendo:

$$X(z) = \mathcal{Z}[\{\mathcal{L}^{-1}[X(s)]|_{t=kT}\}]$$

- Nelle applicazioni ingegneristiche la funzione $X(z)$ assume in generale una espressione razionale fratta del tipo

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

che si può esprimere anche in potenze di z^{-1} :

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z^n (b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \dots + b_m z^{-n})}{z^n (1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})} \\ &= \frac{b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \dots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \end{aligned}$$

- Esempio:

$$X(z) = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{1 + 0.5 z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2 z^{-1})}$$

- Impulso discreto unitario, detta anche funzione di Kronecker $\delta_0(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \\ &= 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + \dots = 1 \end{aligned}$$

- Gradino unitario: Sia data la funzione gradino unitario

$$x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La funzione $h(k)$ definita come

$$h(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

è detta sequenza unitaria. Si ha che

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}[h(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

La serie è convergente per $|z| > 1$.

- Rampa unitaria. Si consideri la funzione rampa unitaria:

$$x(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Poichè $x(kT) = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$, la \mathcal{Z} -trasformata è

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[t] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} \\ &= T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots) \\ &= Tz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots) \\ &= T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = T \frac{z}{(z - 1)^2} \end{aligned}$$

convergente per $|z| > 1$.

- Funzione potenza a^k . Sia data la funzione

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

con a costante reale o complessa. Dalla definizione di \mathcal{Z} -trasformata si ha che

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[a^k] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\ &= 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

Questa serie geometrica converge per $|z| > |a|$.

- Funzione esponenziale. Sia data la funzione

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

dove a è una costante reale o complessa. Poichè $x(kT) = e^{-akT}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, si ha

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[e^{-at}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \\ &= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

che converge per $|z| > e^{-\text{Re}(a)T}$. Si noti che per $a = 0$ si ha il gradino unitario.

- Funzione sinusoidale. Sia data la sinusoide

$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Dalle formule di Eulero è noto che

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

convergente per $|z| > 1$.

- Funzione cosinusoidale. Sia data la funzione

$$x(t) = \begin{cases} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{1 - z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \\ &= \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

- Funzione cosinusoidale smorzata. Sia dato il segnale

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{1}{2} \mathcal{Z}[(e^{-at} e^{j\omega t} + e^{-at} e^{-j\omega t})] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{-(a-j\omega)T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-(a+j\omega)T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}) e^{-aT} z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}} \\ &= \frac{1 - e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}} \\ &= \frac{z(z - e^{-aT} \cos \omega T)}{z^2 - 2e^{-aT} z \cos \omega T + e^{-2aT}} \quad |z| > e^{-aT} \end{aligned}$$

- Funzione sinusoidale smorzata

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[e^{-at} \sin \omega t] \\ &= \frac{e^{-aT} z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}} \\ &= \frac{e^{-aT} z \sin \omega T}{z^2 - 2e^{-aT} z \cos \omega T + e^{-2aT}} \quad |z| > e^{-aT} \end{aligned}$$

- Le trasformate delle funzioni di maggior interesse sono solitamente riportate in tabelle

- Esempio: $X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

- Prima tecnica: $x(t) = 1 - e^{-t}$

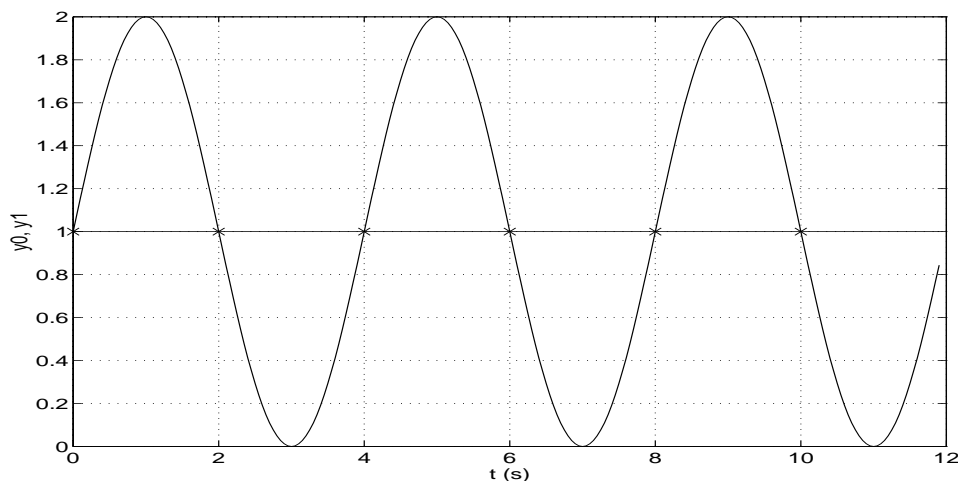
$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[1 - e^{-t}] = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})} = \frac{(1 - e^{-T})z}{(z - 1)(z - e^{-T})} \end{aligned}$$

- Seconda tecnica:

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{1+s}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}}$$

- La \mathcal{Z} -trasformata $X(z)$ e la sua sequenza corrispondente $x(k)$ sono legate da una corrispondenza biunivoca
- Questo non avviene in genere tra la \mathcal{Z} -trasformata $X(z)$ e la sua “inversa” $x(t)$
- Data una $X(z)$ si possono in genere avere molte $x(t)$
- Questa ambiguità non sussiste se sono verificate le condizioni restrittive su T dettate dal Teorema di Shannon
- Diverse funzioni tempo continuo possono avere gli stessi valori $x(k)$



- PROPRIETÀ E TEOREMI DELLA \mathcal{Z} -TRASFORMATA

- Linearità:

$$x(k) = af(k) + bg(k)$$

$$X(z) = aF(z) + bG(z)$$

- Moltiplicazione per a^k . Sia $X(z)$ la \mathcal{Z} -trasformata di $x(t)$, a una costante.

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X(a^{-1}z)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[a^k x(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) (a^{-1}z)^{-k} \\ &= X(a^{-1}z) \end{aligned}$$

- Teorema della traslazione nel tempo. Se $x(t) = 0, t < 0$, $X(z) = \mathcal{Z}[x(t)]$, e $n = 1, 2, \dots$, allora

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n} X(z) \quad (\text{ritardo})$$

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right] \quad (\text{anticipo})$$

Operativamente:

$$z^{-1}x(k) = x(k - 1)$$

$$z^{-2}x(k) = x(k - 2)$$

$$z x(k) = x(k + 1)$$

e così via.

- Caso di ritardo:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(t - nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT) z^{-k} \\ &= z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT) z^{-(k-n)}\end{aligned}$$

da cui, ponendo $m = k - n$,

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} x(mT) z^{-m}$$

Poichè $x(mT) = 0$ per $m < 0$, allora si può scrivere che

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) z^{-m} = z^{-n} X(z)$$

- Caso dell'anticipo:

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT) z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT) z^{-(k+n)}$$

$$= z^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT) z^{-(k+n)} + \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right]$$

$$= z^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right]$$

$$= z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right]$$

- Teorema del valore iniziale.

Se $X(z)$ è la \mathcal{Z} -trasformata di $x(t)$ e se esiste il $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$, allora il valore iniziale $x(0)$ di $x(t)$ è dato da:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Infatti, si noti che

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

- Teorema del valore finale. Siano tutti i poli di $X(z)$ all'interno del cerchio unitario, con al più un polo semplice per $z = 1$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})X(z)]$$

Infatti

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} = X(z) - z^{-1}X(z)$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} \right] &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [x(k) - x(k-1)] \\ &= [x(0) - x(-1)] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + \dots \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \end{aligned}$$

- Esempio: Si consideri il segnale descritto da

$$X(z) = \frac{Tz(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)}$$

Il valore finale della sequenza $x(kT)$ è quindi dato da

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{Tz(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T(z+1)}{2(z-0.5)} \\ &= 2T \end{aligned}$$

- Differenziazione complessa:

$$\mathcal{Z}[k x(k)] = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

$$\mathcal{Z}[k^m x(k)] = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z)$$

- Esempio: È noto che la \mathcal{Z} -trasformata del gradino unitario è

$$\mathcal{Z}[h(k)] = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Per ottenere la trasformata del segnale rampa unitaria

$$x(k) = kT, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{Z}[kT h(k)] = -Tz \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right) = T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

- Integrazione complessa. Si consideri la sequenza

$$g(k) = \frac{x(k)}{k}$$

dove $x(k)/k$ è finito per $k = 0$, e sia $\mathcal{Z}[x(k)] = X(z)$. La \mathcal{Z} -trasformata di $x(k)/k$ è data da

$$\mathcal{Z}\left[\frac{x(k)}{k}\right] = \int_z^\infty \frac{X(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{x(k)}{k}$$

- Teorema della convoluzione reale. Siano date due funzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$, con $x_1(t) = x_2(t) = 0$, $t < 0$ e \mathcal{Z} -trasformate $X_1(z)$, $X_2(z)$. Allora

$$X_1(z)X_2(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^k x_1(hT)x_2(kT - hT)\right]$$

Per la dimostrazione, si noti che

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^k x_1(h)x_2(k-h)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k x_1(h)x_2(k-h)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} x_1(h)x_2(k-h)z^{-k} \end{aligned}$$

poichè $x_2(k-h) = 0$, $h > k$. Definendo $m = k - h$ si ha

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^k x_1(h)x_2(k-h)\right] = \sum_{h=0}^{\infty} x_1(h)z^{-h} \sum_{m=0}^{\infty} x_2(m)z^{-m}$$

- Teorema della convoluzione complessa.

Siano date due successioni $x_1(k)$, $x_2(k)$ nulle per $k < 0$. Inoltre siano $X_1(z)$ e $X_2(z)$ le trasformate delle due successioni e siano R_1 , R_2 i rispettivi raggi di convergenza. Allora la \mathcal{Z} -trasformata del prodotto $x_1(k)x_2(k)$ è data da:

$$\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta) X_1(\zeta^{-1}z) d\zeta$$

- Teorema di Parseval. Siano date due sequenze $x_1(k), x_2(k)$ nulle per $k < 0$. Inoltre siano $X_1(z)$ e $X_2(z)$ le trasformate delle due successioni.

$$\begin{aligned} [\mathcal{Z}[x_1(k)x_2(k)]]_{|z|=1} &= \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)x_2(k) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta) X_1(\zeta^{-1}z) d\zeta \end{aligned}$$

Per $x_1(k) = x_2(k) = x(k)$, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x^2(k) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \zeta^{-1} X(\zeta) X(\zeta^{-1}) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{-1} X(z) X(z^{-1}) dz \end{aligned}$$

- Trasformazione di funzioni periodiche.

Sia data una successione $x_p(k)$ periodica di periodo pT e $x(k)$ la successione dei campioni del primo periodo e nulla per $k > p$

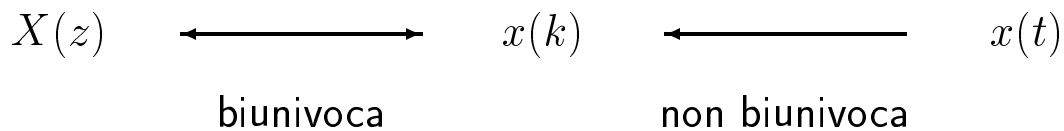
$$x(k) = \begin{cases} x_p(k) & k = 0, \dots, p \\ 0 & k > p \end{cases}$$

Se $X(z)$ è la \mathcal{Z} -trasformata di $x(k)$ allora vale

$$\mathcal{Z}[x_p(k)] = \frac{z^p}{z^p - 1} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-p}} X(z)$$

- LA ANTITRASFORMATA \mathcal{Z}

- Permette di passare da una \mathcal{Z} -trasformata $X(z)$ alla corrispondente sequenza x_k e possibilmente alla funzione continua $x(t)$ cui corrisponde per campionamento la sequenza x_k .



- Se è soddisfatto il Teorema di Shannon sul campionamento, la funzione continua $x(t)$ può essere univocamente determinata a partire dalla sequenza x_k .
- Diversi metodi per antitrasformare una funzione $X(z)$:
 - 1) Metodo della lunga divisione;
 - 2) Metodo computazionale;
 - 3) Metodo della scomposizione in fratti semplici;
 - 4) Metodo dell'integrale di inversione.

- Metodo della lunga divisione

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots$$

Si divide il polinomio a numeratore per il polinomio a denominatore con la nota regola di Eulero

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m}{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n} = c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots$$

da cui si ricava che

$$x(0) = c_0, \quad x(T) = c_1, \quad x(2T) = c_2, \quad \dots$$

- Esempio: Lunga divisione di:

$$X(z) = \frac{3}{(1 - z^{-1})^2(1 - 0.5z^{-1})} = \frac{6}{2 - 5z^{-1} + 4z^{-2} - z^{-3}}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \quad -15z^{-1} \quad +12z^{-2} \quad -3z^{-3} \\ \quad +15z^{-1} \quad -12z^{-2} \quad +3z^{-3} \\ \quad \quad +15z^{-1} \quad -37.5z^{-2} \quad +30z^{-3} \quad -7.5z^{-4} \\ \quad \quad \quad +25.5z^{-2} \quad -27z^{-3} \quad +7.5z^{-4} \\ \quad \quad \quad \quad +25.5z^{-2} \quad -63.75z^{-3} \quad +51z^{-4} \quad -12.75z^{-5} \\ \quad \quad \quad \quad \quad +36.75z^{-3} \quad -43.5z^{-4} \quad +12.75z^{-5} \end{array} \left| \begin{array}{l} D(z) \\ \hline Q(z) \end{array} \right.$$

Da cui

$$X(z) = 3 + 7.5z^{-1} + 12.75z^{-2} + 18.375z^{-3} + \dots$$

$$x(0) = 3, \quad x(1) = 7.5, \quad x(2) = 12.75, \quad x(3) = 18.375, \quad \dots$$

- Metodo computazionale. Esempio:

$$X(z) = \frac{3}{-0.5z^{-3} + 2z^{-2} - 2.5z^{-1} + 1}$$

$$X(z) = \frac{3}{-0.5z^{-3} + 2z^{-2} - 2.5z^{-1} + 1} U(z)$$

$$X(z) (1 - 2.5z^{-1} + 2z^{-2} - 0.5z^{-3}) = 3U(z)$$

$$x(k) = 2.5x(k-1) - 2x(k-2) + 0.5x(k-3) + 3u(k)$$

Per $k = 0$, $u(0) = 1$, $x(-1) = x(-2) = x(-3) = 0$:

$$x(0) = 3$$

$$x(1) = 2.5x(0) = 7.5$$

$$x(2) = 2.5x(1) - 2x(0) = 12.75$$

$$x(3) = 2.5x(2) - 2x(1) + 0.5x(0) = 18.375$$

...

- Metodo della scomposizione in fratti semplici

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

- Caso 1. Se tutti i poli sono semplici, si pone

$$X(z) = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n}{z - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - p_i}$$

dove i coefficienti c_i , detti “residui”, sono parametri che vengono calcolati come:

$$c_i = [(z - p_i)X(z)]_{z=p_i}$$

- Se nella espressione di $X(z)$ compare almeno uno zero nell'origine, si utilizza la funzione $X(z)/z$ e quindi

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z - p_1} + \dots + \frac{c_n}{z - p_n} \quad c_i = \left[(z - p_i) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_i}$$

Quando sono presenti poli complessi coniugati, i coefficienti c_i sono anch'essi complessi. In questo caso si ricorre alle formule di Eulero per ottenere funzioni trigonometriche. L'espressione finale cercata è quindi

$$x(k) = \sum_{i=1}^n c_i p_i^k$$

- Caso 2. Se $X(z)$, o $X(z)/z$, ha poli multipli

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)^{r_1} (z - p_2)^{r_2} \dots (z - p_h)^{r_h}}$$

allora si può porre

$$X(z) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(z - p_i)^{r_i - k + 1}}$$

dove i residui si calcolano come

$$c_{ik} = \left[\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - p_i)^{r_i} X(z) \right]_{z=p_i}$$

$$i = 1, \dots, h; \quad k = 1, \dots, r_i$$

- Esempio. Antitrasformare la funzione

$$X(z) = \frac{1}{z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 12z + 4} = \frac{1}{(z+2)^2(z+1)^2}$$

Si ha che

$$X(z) = \frac{c_{11}}{(z+2)^2} + \frac{c_{12}}{(z+2)} + \frac{c_{21}}{(z+1)^2} + \frac{c_{22}}{(z+1)}$$

$$c_{11} = [(z+2)^2 X(z)]|_{z=-2} = 1$$

$$c_{12} = \left[\frac{d}{dz} (z+2)^2 X(z) \right]_{z=-2} = 2$$

$$c_{21} = [(z+1)^2 X(z)]_{z=-1} = 1$$

$$c_{22} = \left[\frac{d}{dz} (z+1)^2 X(z) \right]_{z=-1} = -2$$

- Metodo dell'integrale di inversione

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Si può applicare il teorema dei residui

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \sum_{i=1}^m k_i$$

Per poli semplici

$$k_i = \lim_{z \rightarrow z_i} [(z - z_i) X(z) z^{k-1}]$$

Per poli di molteplicità r_i

$$k_i = \frac{1}{(r_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{r_i-1}}{dz^{r_i-1}} [(z - z_i)^{r_i} X(z) z^{k-1}]$$

- Esempio. Calcolare $x(kT)$ da

$$X(z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$$

$$X(z)z^{k-1} = \frac{(1 - e^{-aT})z^k}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$$

$$x(kT) = \sum_{i=1}^2 \left[\text{residuo di } \frac{(1 - e^{-aT})z^k}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \text{ in } z = z_i \right]$$

dove i residui sono

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1) \frac{(1 - e^{-aT})z^k}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \right] = 1$$

$$k_2 = \lim_{z \rightarrow e^{-aT}} \left[(z - e^{-aT}) \frac{(1 - e^{-aT})z^k}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \right] = -e^{-akT}$$

- Esempio: $X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$

$$X(z)z^{k-1} = \frac{z^{k+1}}{(z - 1)^2(z - e^{-aT})}$$

$$x(kT) = \sum_{i=1}^2 \left[\text{residuo di } \frac{z^{k+1}}{(z - 1)^2(z - e^{-aT})} \text{ in } z = z_i \right]$$

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow e^{-aT}} \left[\frac{(z - e^{-aT})z^{k+1}}{(z - 1)^2(z - e^{-aT})} \right] = \frac{e^{-a(k+1)T}}{(1 - e^{-aT})^2}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z - 1)^2 \frac{z^{k+1}}{(z - 1)^2(z - e^{-aT})} \right] \\ &= \frac{k + 1}{1 - e^{-aT}} - \frac{1}{(1 - e^{-aT})^2} \end{aligned}$$

- Esempio. Antitrasformare la funzione

$$X(z) = \frac{10}{(z-1)(z-2)}$$

Si noti che ora

$$X(z)z^{k-1} = \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}$$

Per $k = 0$

$$X(z)z^{k-1} \Big|_{k=0} = \frac{10}{z(z-1)(z-2)}$$

la funzione ha quindi 3 poli semplici, $z = 0, z = 1, z = 2$, mentre per $k > 0$ $X(z)z^{k-1}$ ha solo i due poli $z = 1, z = 2$. Questi due casi sono quindi da considerarsi separatamente.

- Caso $k = 0$. Si ottiene

$$x(0) = \sum_{i=1}^3 \left[\text{residuo di } \frac{10}{z(z-1)(z-2)} \text{ nel polo } z = z_i \right]$$

ove i residui valgono

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left[z \frac{10}{z(z-1)(z-2)} \right] = 5$$

$$k_2 = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{10}{z(z-1)(z-2)} \right] = -10$$

$$k_3 = \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2) \frac{10}{z(z-1)(z-2)} \right] = 5$$

e quindi

$$x(0) = k_1 + k_2 + k_3 = 5 - 10 + 5 = 0$$

- Caso $k > 0$. Si ottiene ora

$$x(k) = \sum_{i=1}^2 \left[\text{residuo di } \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \text{ nel polo } z = z_i \right]$$

ove i residui valgono

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \right] = -10$$

$$k_2 = \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2) \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \right] = 10(2^{k-1})$$

e quindi

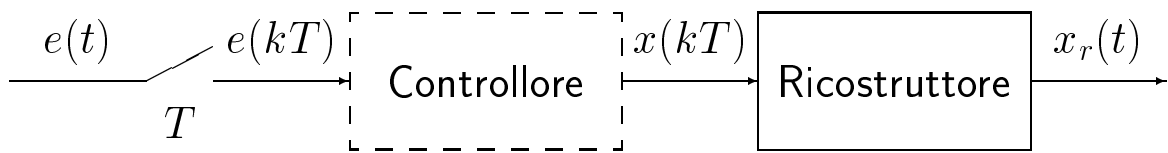
$$x(k) = k_1 + k_2 = -10 + 10(2^{k-1}) = 10(2^{k-1} - 1)$$

In definitiva si ottiene

$$x(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 10(2^{k-1} - 1) & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

● CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE

- I sistemi in retroazione con controllo digitale sono caratterizzati da una parte continua (il processo da controllare) e una parte discreta (il controllore digitale)
- Sono quindi presenti sia variabili a tempo discreto sia variabili a tempo continuo
- I dispositivi di interfaccia sono il campionatore e il ricostruttore



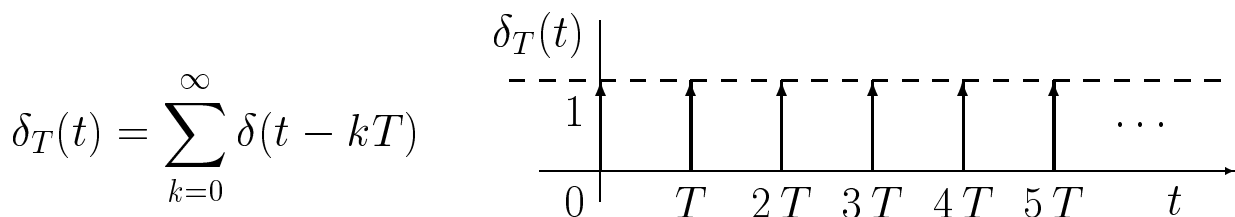
- Ricostruttore di ordine zero:

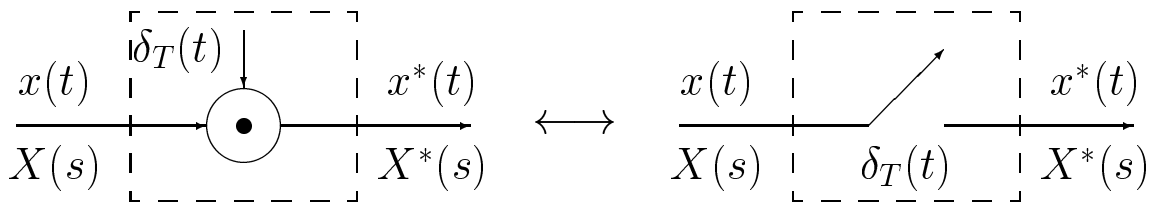
$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [h(t - kT) - h(t - (k + 1)T)]$$

$$X_r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} \right] = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$x^*(t) = \mathcal{L}^{-1}[X^*(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$

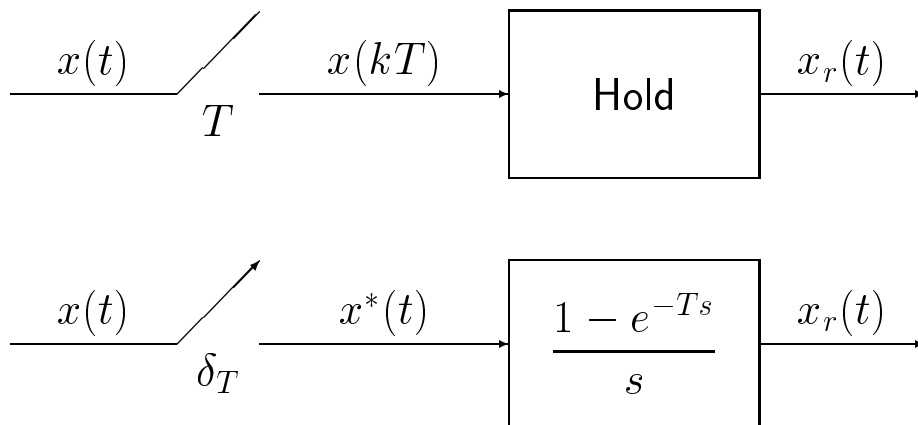




- Il campionatore impulsivo è un modello ideale del campionatore reale (convertitore A/D) considerato adeguato alle esigenze di analisi e progetto dei controlli digitali

- L'uscita del ricostruttore di ordine zero vale:

$$X_r(s) = H_0(s) X^*(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} X^*(s)$$



$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$z = e^{sT} \quad \longleftrightarrow \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

$$X^*(s) \Big|_{s = \frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

- La trasformata zeta della sequenza $x(kT)$ anzichè la trasformata di Laplace del segnale $x^*(t)$ permette di operare con funzioni razionali fratte.

$$x^*(t) = x(t) \delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

ne segue

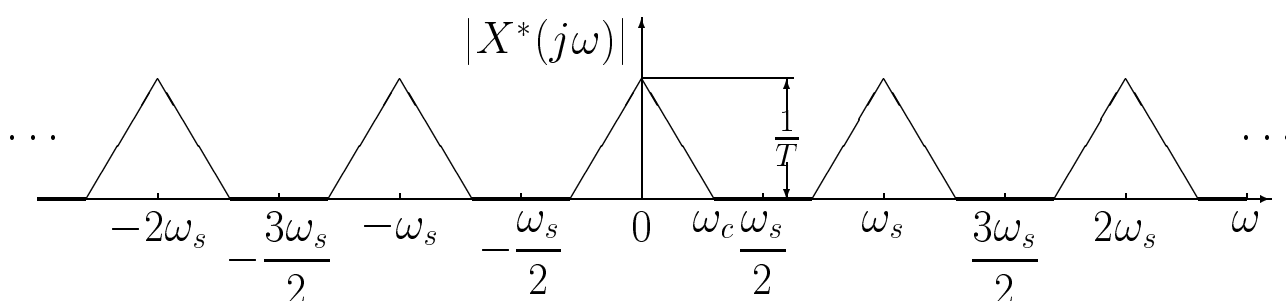
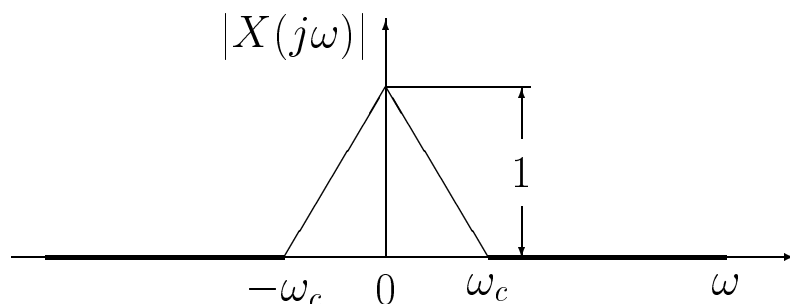
$$\begin{aligned} x^*(t) &= x(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jn\omega_s t} \end{aligned}$$

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[x(t) e^{jn\omega_s t}] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s - jn\omega_s)$$

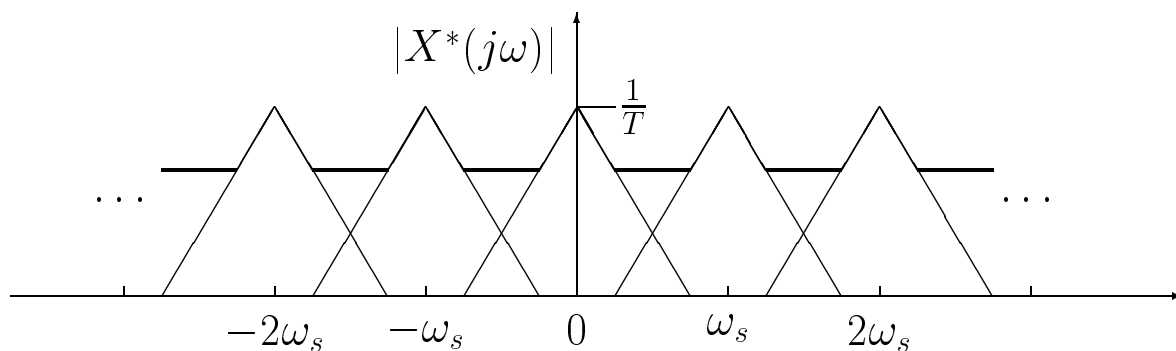
- A meno della costante moltiplicativa $1/T$, la trasformata di Laplace $X^*(s)$ del segnale campionato si ottiene dalla somma degli infiniti termini, $X(s - jn\omega_s)$, ciascuno dei quali si ottiene dalla $X(s)$ mediante traslazione di $jn\omega_s$ nel campo complesso.

- L'andamento spettrale del segnale campionato vale:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - j n\omega_s)$$



- La condizione $\omega_s > 2\omega_c$ mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale $x(t)$
- Nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ non è rispettata:



- Lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui mediante filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato

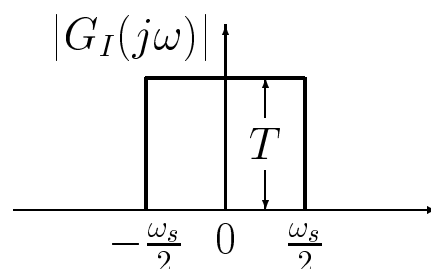
● TEOREMA DI SHANNON

- Sia $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione di campionamento (T è il periodo di campionamento), e sia ω_c la più alta componente spettrale del segnale tempo-continuo $x(t)$. Il segnale $x(t)$ è completamente ricostruibile a partire dal segnale campionato $x^*(t)$ se e solo se la pulsazione ω_s è maggiore del doppio della pulsazione ω_c :

$$\omega_s > 2\omega_c$$

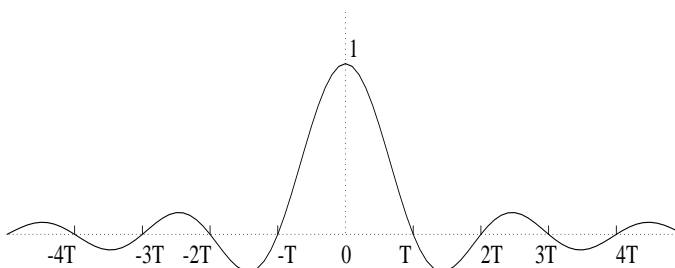
- Ricostruzione mediante filtro ideale

$$G_I(j\omega) = \begin{cases} T & -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



- Il filtro ideale $G_I(j\omega)$ non è fisicamente realizzabile. La sua risposta all'impulso vale:

$$g_I(t) = \frac{\sin(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2}$$



- Formula di ricostruzione di Shannon

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) g_I(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) \frac{\sin(\omega_s(t - \tau)/2)}{\omega_s(t - \tau)/2} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin(\omega_s(t - kT)/2)}{\omega_s(t - kT)/2} \end{aligned}$$

- Occorrono tutti i campioni $x(kT)$ passati e futuri
- Si usano ricostruttori causali e facilmente realizzabili

- ALIASING

- Con il termine aliasing si indica quel fenomeno per il quale, mediante campionamento, si generano delle nuove componenti spettrali (armoniche) alla stessa frequenza della componente spettrale di partenza che impediscono la corretta ricostruzione del segnale di partenza.
- Si può avere aliasing solo nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ del teorema di Shannon non sia verificata

- Esempio:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(\omega_2 t + \theta) \\ y(t) = \sin((\omega_2 + n\omega_s)t + \theta) \end{cases}$$

aventi stessa fase θ e pulsazione che differisce di un multiplo intero di ω_s .

- Se i due segnali vengono campionati

$$\begin{cases} x(kT) = \sin(\omega_2 kT + \theta) \\ y(kT) = \sin((\omega_2 + n\omega_s)kT + \theta) \\ \quad = \sin(\omega_2 kT + 2k\pi n + \theta) \\ \quad = \sin(\omega_2 kT + \theta) \end{cases}$$

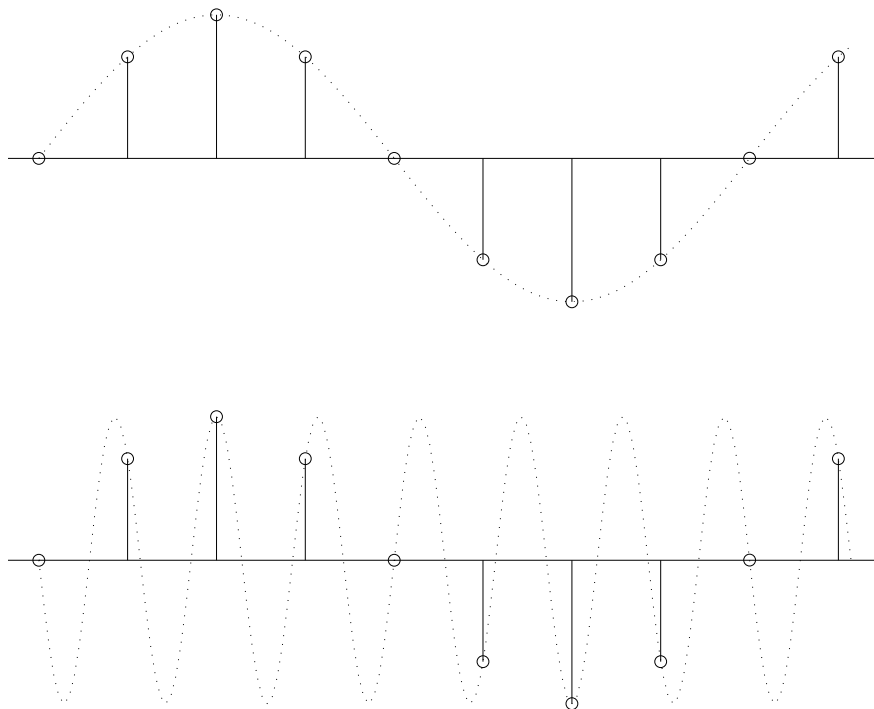
- I valori campionati coincidono: $x(kT) = y(kT)$

- Esempio: $\omega_2 + \omega_1 = n\omega_s$
- Posto $\omega_1 = \frac{1}{8}\omega_s$ e $\omega_2 = \omega_s - \omega_1 = \frac{7}{8}\omega_s$

$$\begin{cases} x(t) = \sin(\omega_1 t) = \sin(\omega_s t/8) \\ y(t) = \sin(\omega_2 t) = \sin(7\omega_s t/8 + \pi) \end{cases}$$

- Campionando si ha

$$\begin{cases} x(kT) = \sin(\omega_s k T/8) = \sin(2k\pi/8) \\ \quad = \sin(k\pi/4) \\ y(kT) = \sin(7\omega_s k T/8 + \pi) = \sin(7k\pi/4 + \pi) \\ \quad = \sin(k\pi/4) \end{cases}$$



- Per evitare fenomeni di aliasing si deve provvedere ad introdurre un opportuno filtraggio passa-basso prima del campionatore.

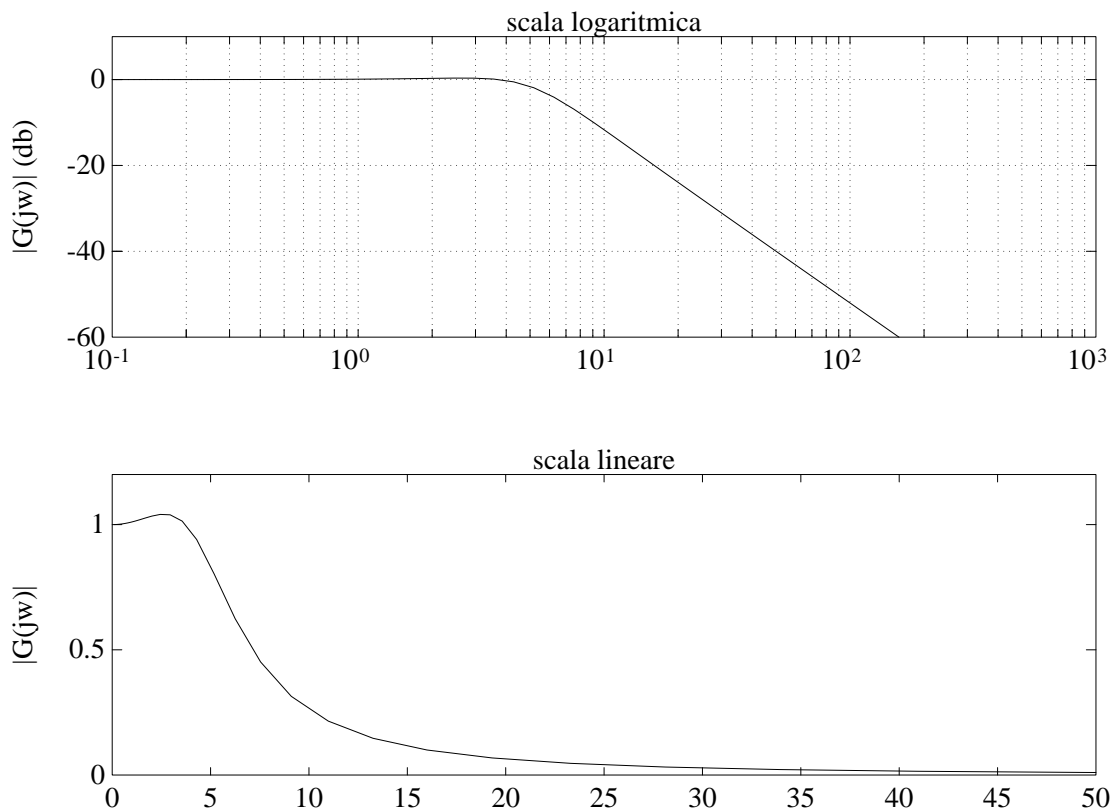
- Campionamento della risposta all'impulso di un sistema del secondo ordine

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

- Il sistema $G(s)$ ha un guadagno statico unitario, ha due poli complessi coniugati $p_{1,2} = -3 \pm j4$, pulsazione naturale $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$ e coefficiente di smorzamento $\delta = 3/5$

$$G(s) = \frac{25}{(s + 3)^2 + 4^2}$$

- Diagramma delle ampiezze di $G(j\omega)$:



- Per $\omega > 10\omega_n = 50 \text{ rad/s} = \bar{\omega}$, l'ampiezza di $G(j\omega)$ è inferiore ad un centesimo (-40 db) del guadagno statico
- Lo spettro, pur essendo a banda teoricamente illimitata, risulta essere praticamente trascurabile per pulsazioni maggiori di $\bar{\omega} = 50 \text{ rad/s}$

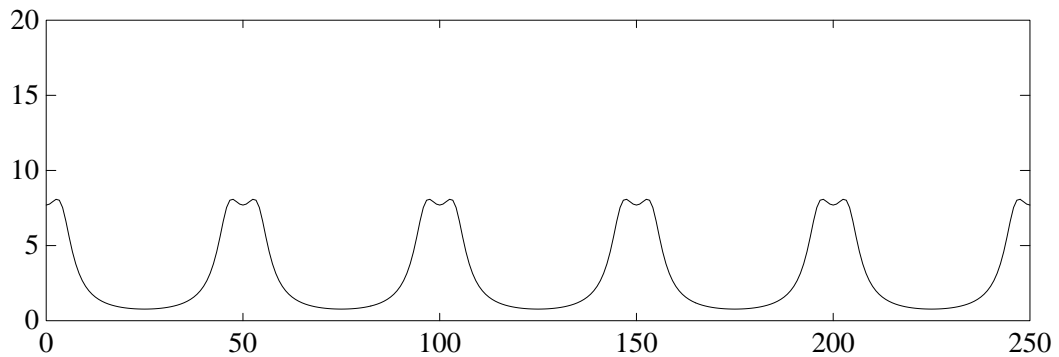
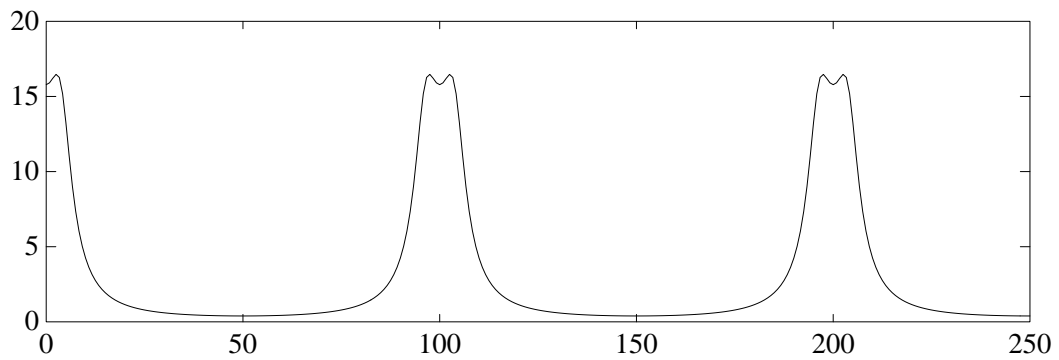
- Applicando la \mathcal{Z} -trasformata si ha

$$G(z) = \frac{25}{4} \frac{e^{-3T} \sin(4T) z}{z^2 - 2e^{-3T} \cos(4T) z + e^{-6T}}$$

- La risposta spettrale è data da

$$G^*(j\omega) = G(z)|_{z=e^{j\omega T}} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

- Andamento spettrale di $G^*(j\omega)$ quando $T = \frac{\pi}{50}$ e $T = \frac{\pi}{25}$



• Tipici ricostruttori di segnale

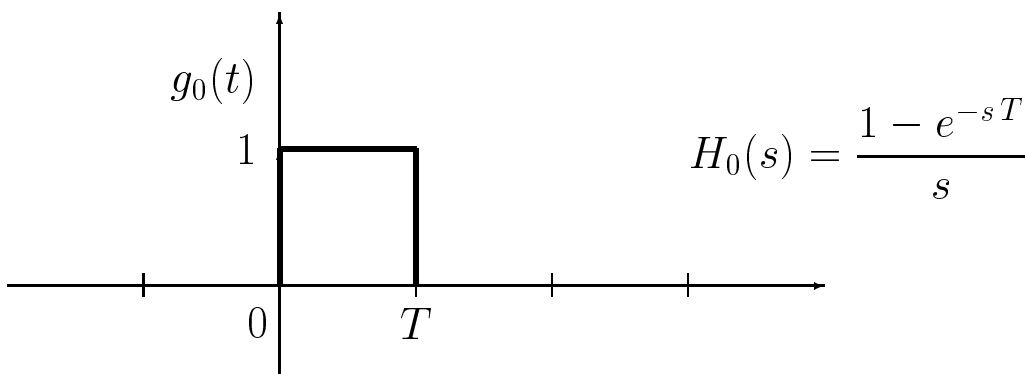


$$x(t) = x(kT) + \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} (t - kT) + \left. \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right|_{t=kT} \frac{(t - kT)^2}{2!} + \dots$$

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} \simeq \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \dots$$

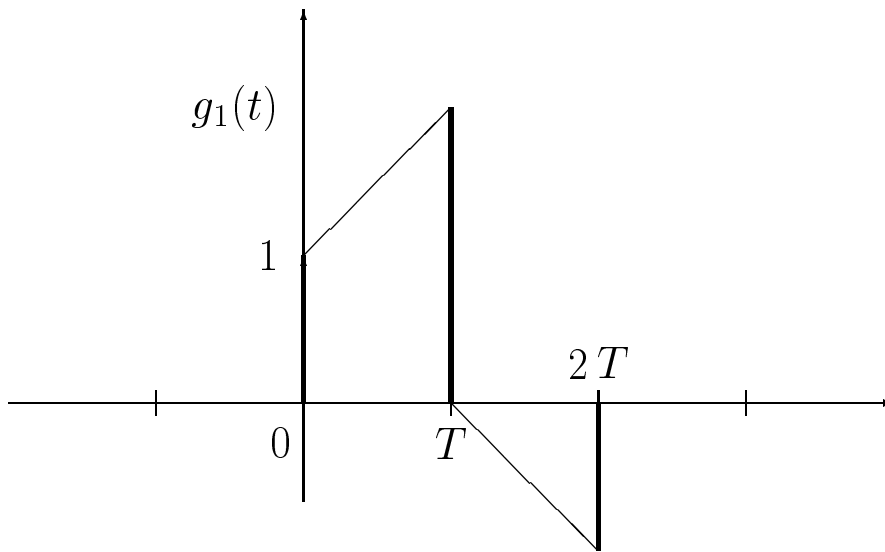
• Ricostruttore di ordine zero

$$x_0(t) = x(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$



- Ricostruttore di ordine uno

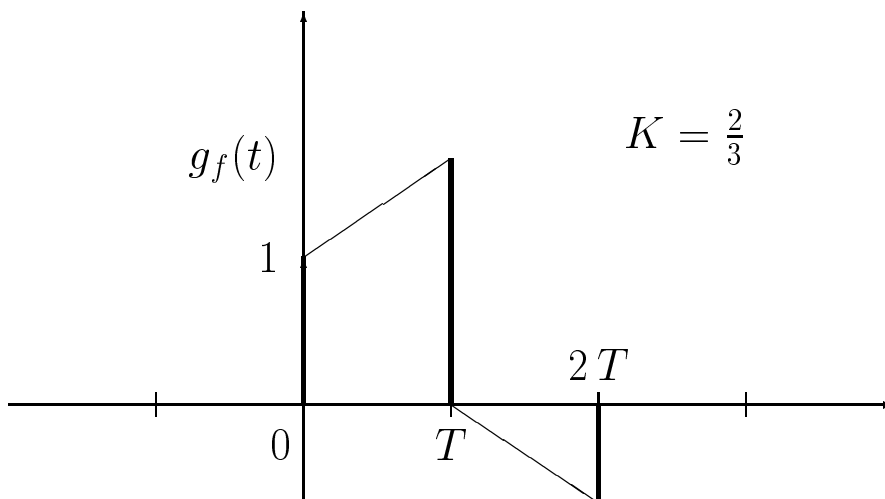
$$x_1(t) = x(kT) + \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}(t - kT)$$



$$H_1(s) = \frac{1 + Ts}{T} \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2$$

- Ricostruttore di ordine frazionario

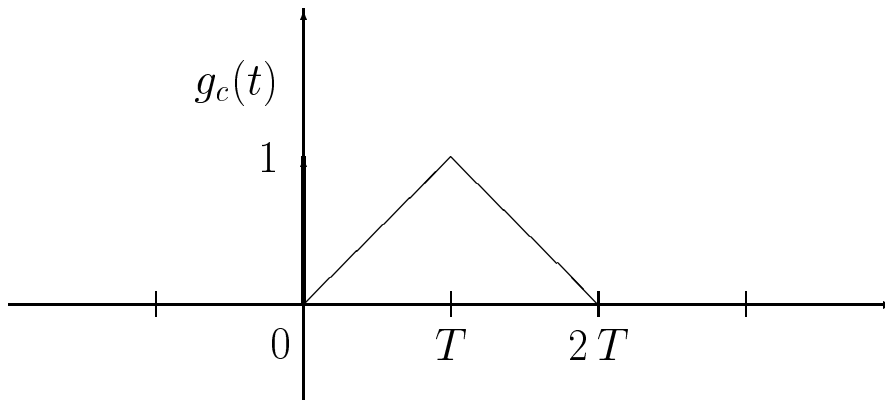
$$x_f(t) = x(kT) + K \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}(t - kT)$$



$$H_f(s) = \frac{K + Ts}{T} \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2 + (1 - K) \frac{(1 - e^{-sT})}{s} e^{-sT}$$

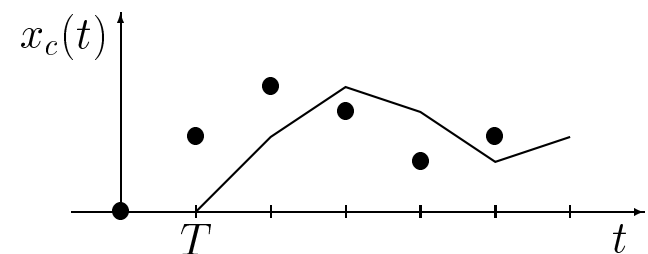
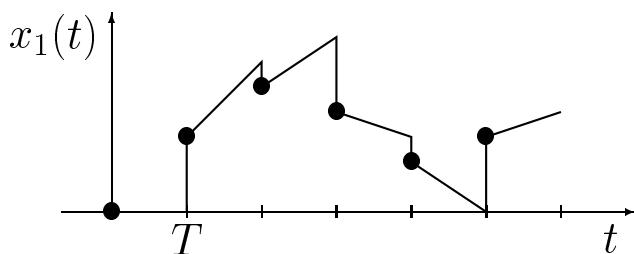
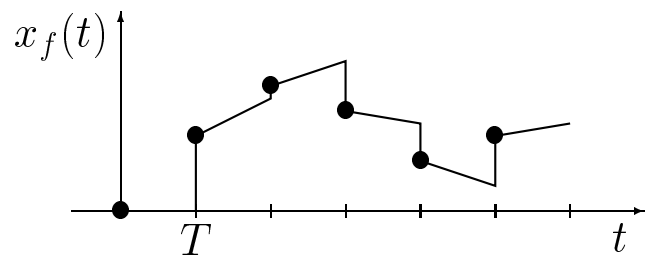
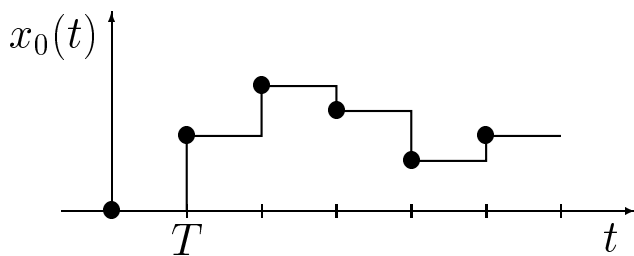
● Ricostruttore ad uscita continua

$$x_c(t) = x((k - 1)T) + \frac{x(kT) - x((k - 1)T)}{T}(t - kT)$$



$$H_c(s) = \frac{1}{T} \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2$$

● RICOSTRUTTORI DI SEGNALE



- La risposta frequenziale del ricostruttore di ordine zero:

$$H_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2 e^{-j\omega T/2}}{\omega} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j}$$

$$= T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}$$

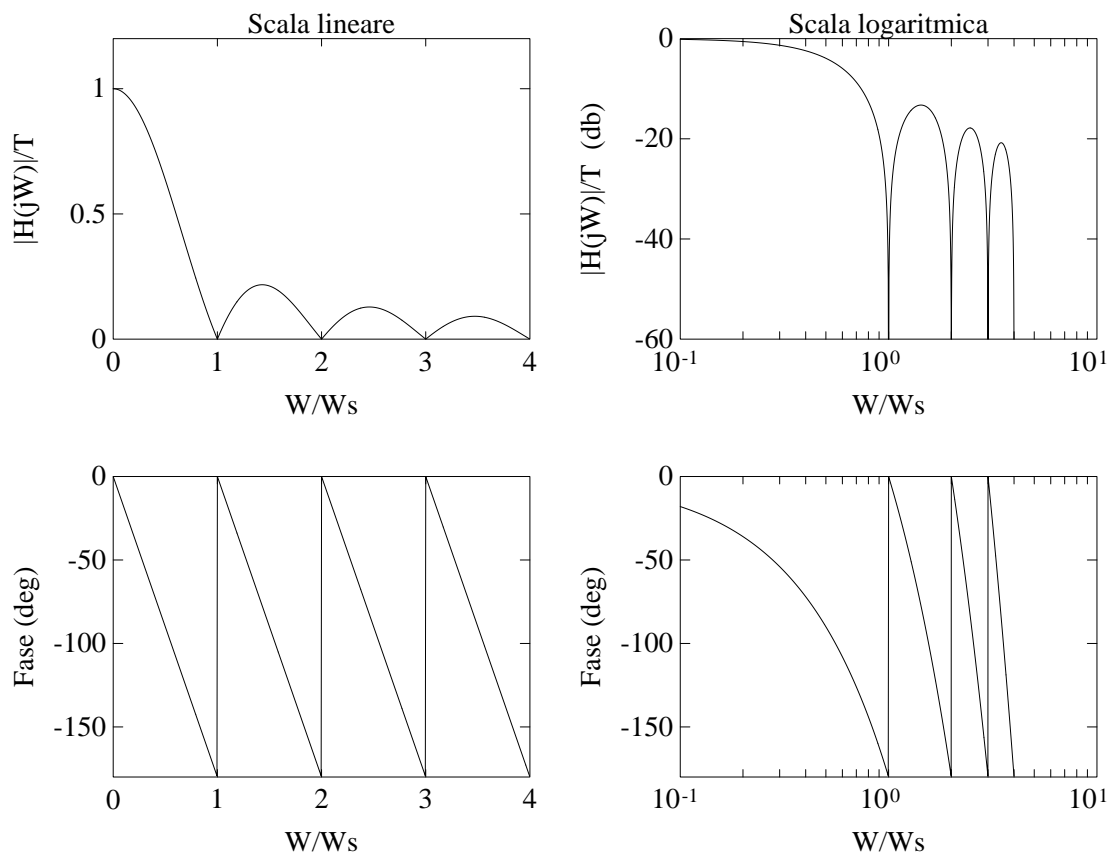
- Modulo

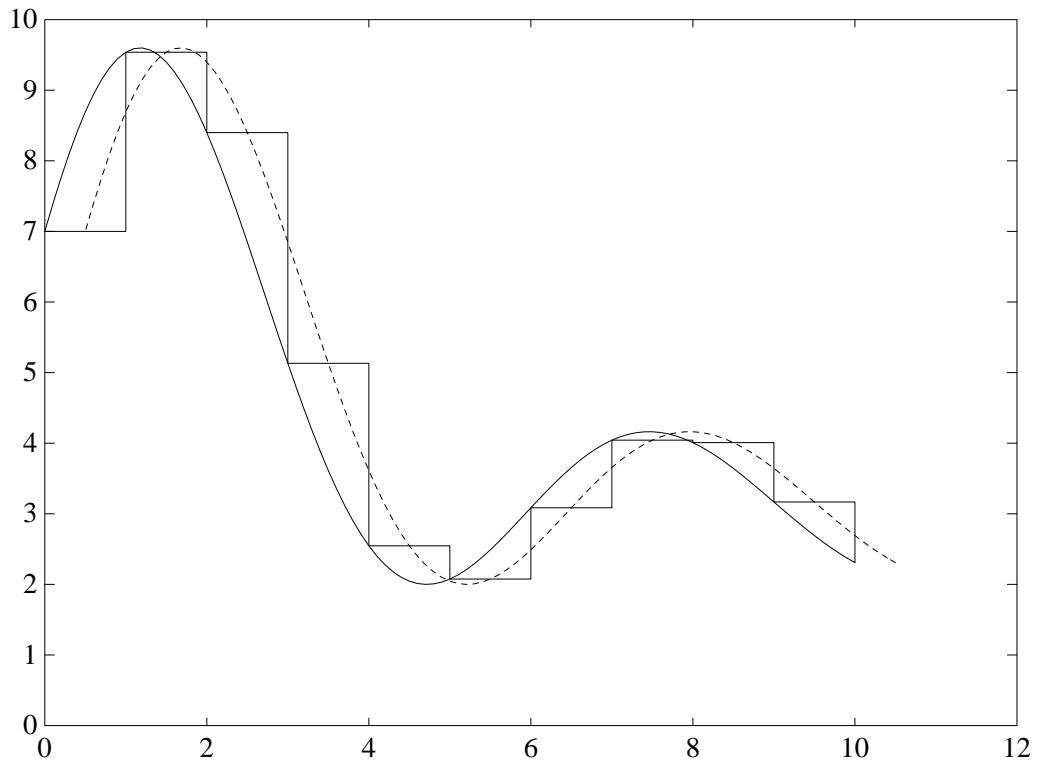
$$|H_0(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|$$

- Fase

$$Arg [H_0(j\omega)] = Arg \left[\sin \frac{\omega T}{2} \right] - \frac{\omega T}{2}$$

- Ricostruttore di ordine zero





$$H_0(j\omega) \simeq T e^{-j\omega T/2}$$

- Risposta frequenziale del ricostruttore di ordine uno:

$$\begin{aligned}
 H_1(j\omega) &= \left(\frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \right)^2 \frac{1 + j\omega T}{T} \\
 &= T \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2 (1 + j\omega T) e^{-j\omega T}
 \end{aligned}$$

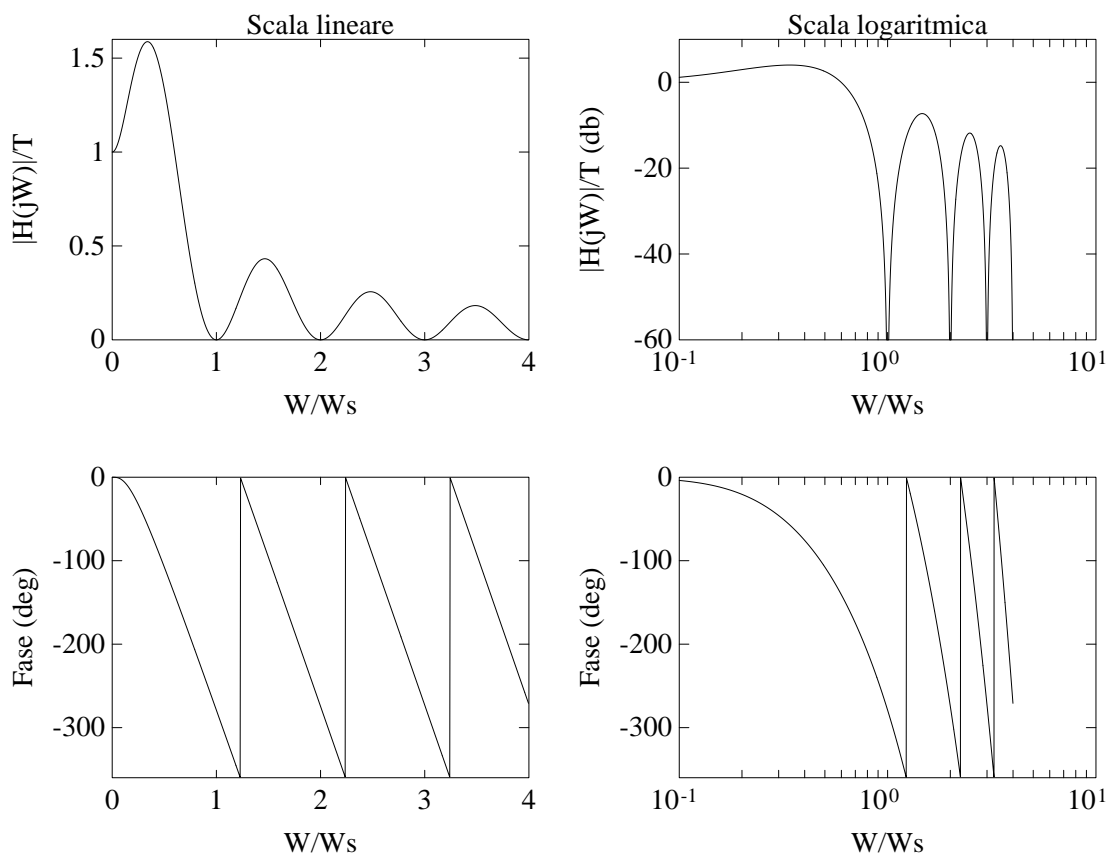
- Modulo

$$|H_1(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|^2 \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

- Fase

$$Arg [H_1(j\omega)] = \arctan \omega T - \omega T$$

- Ricostruttore di ordine uno



- Corrispondenza tra piano s e piano z

$$X^*(s) = X(z)|_{z=e^{sT}}$$

- Le variabili complesse s e z sono legate dalla relazione

$$z = e^{sT}$$

- Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha

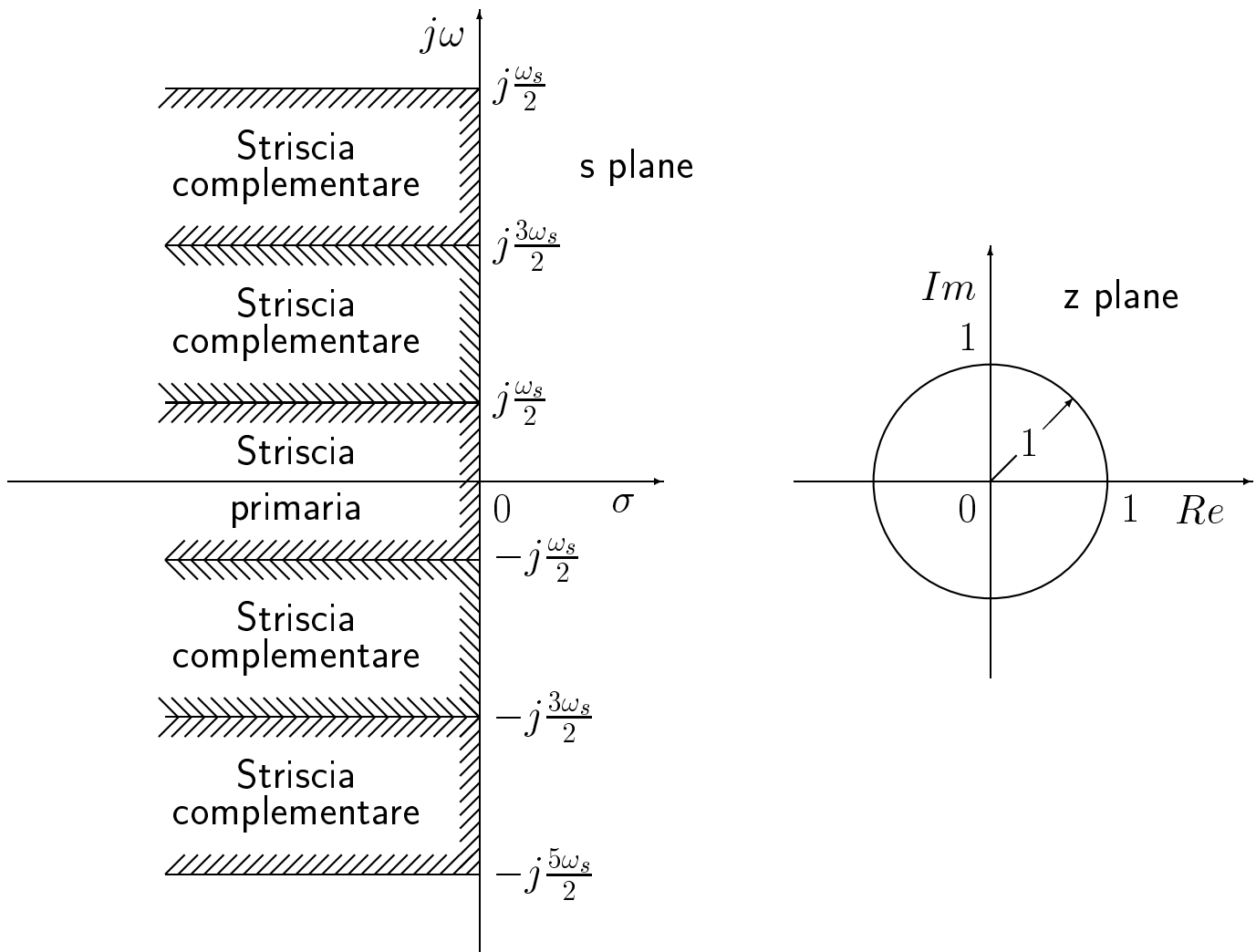
$$z = e^{T(\sigma+j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{jT(\omega + \frac{2k\pi}{T})}$$

- Ogni punto del piano z è in corrispondenza con infiniti punti del piano s
- I punti del piano s a parte reale negativa ($\sigma < 0$) sono in corrispondenza con i punti del piano z all'interno del cerchio unitario:

$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

- I punti sull'asse immaginario ($\sigma = 0$) vengono mappati sul cerchio unitario ($|z| = 1$), mentre quelli a parte reale positiva ($\sigma > 0$) vengono mappati all'esterno del cerchio unitario ($|z| > 1$).
- La striscia di piano s delimitata dalle rette orizzontali $s = j\omega_s/2$ e $s = -j\omega_s/2$ prende il nome di striscia primaria

• Striscia primaria e Strisce complementari



• Le variabili complesse s e z sono legate dalla relazione

$$z = e^{sT}$$

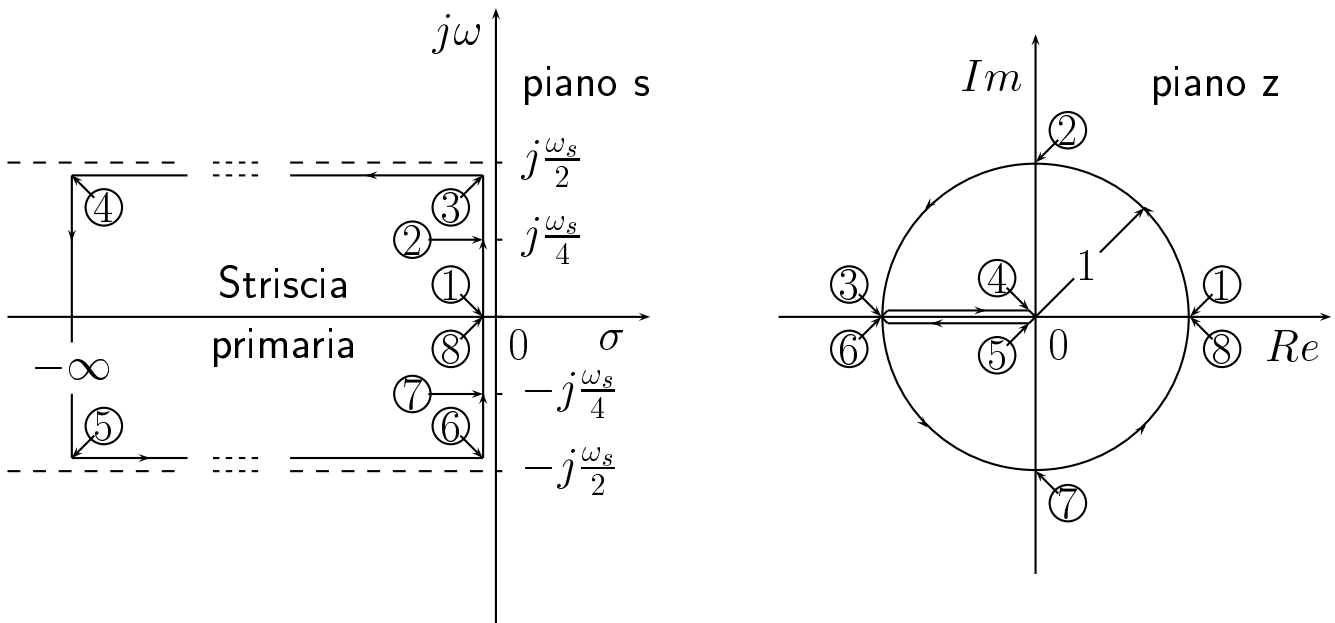
• Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha

$$z = e^{T(\sigma+j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega}$$

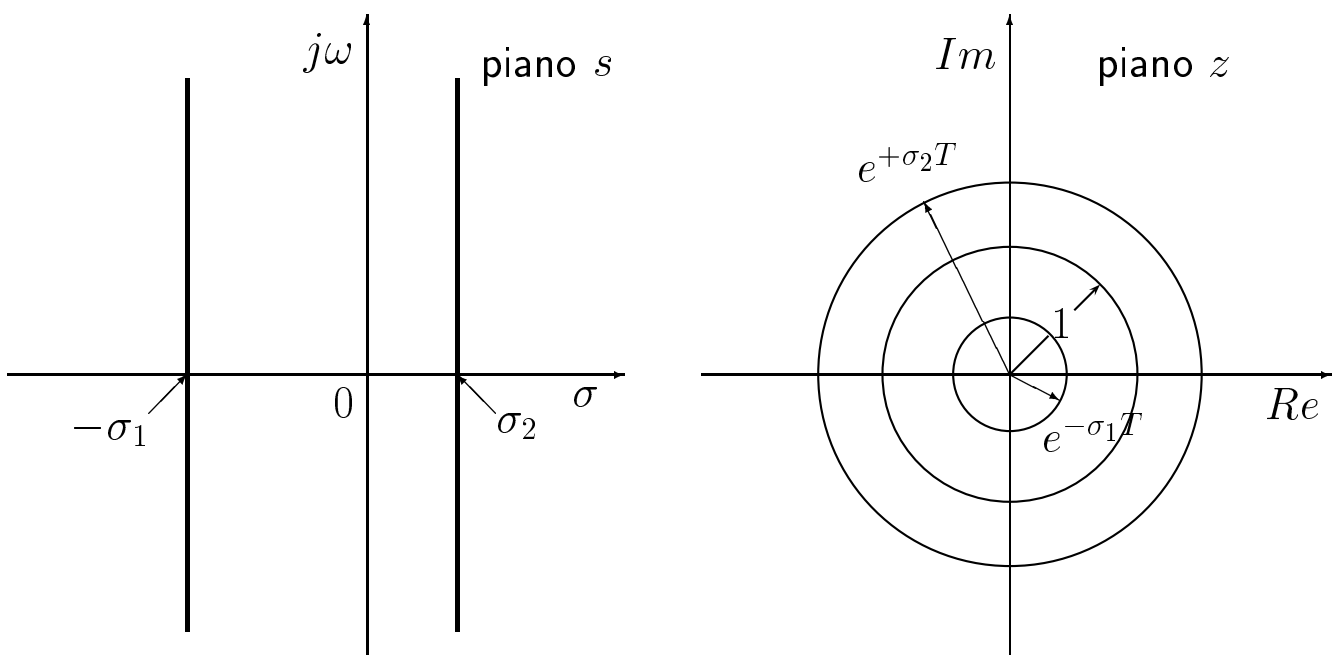
dove

$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

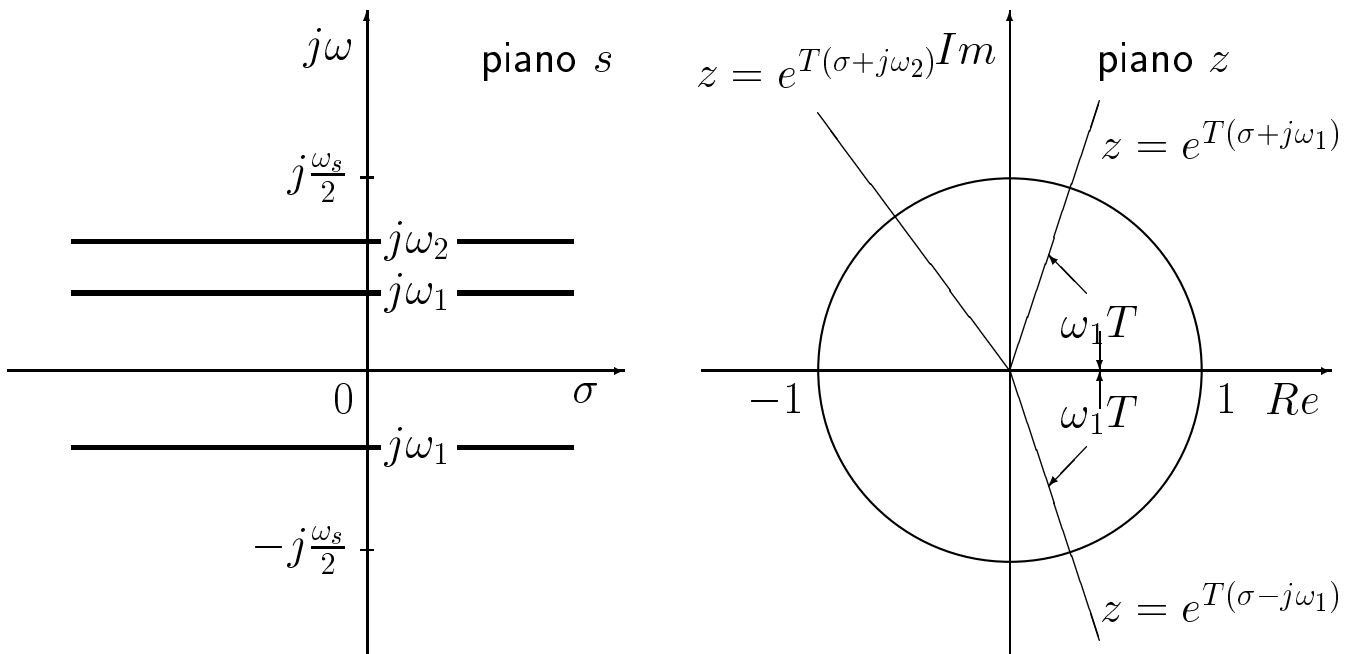
- Mapping tra striscia primaria e piano z



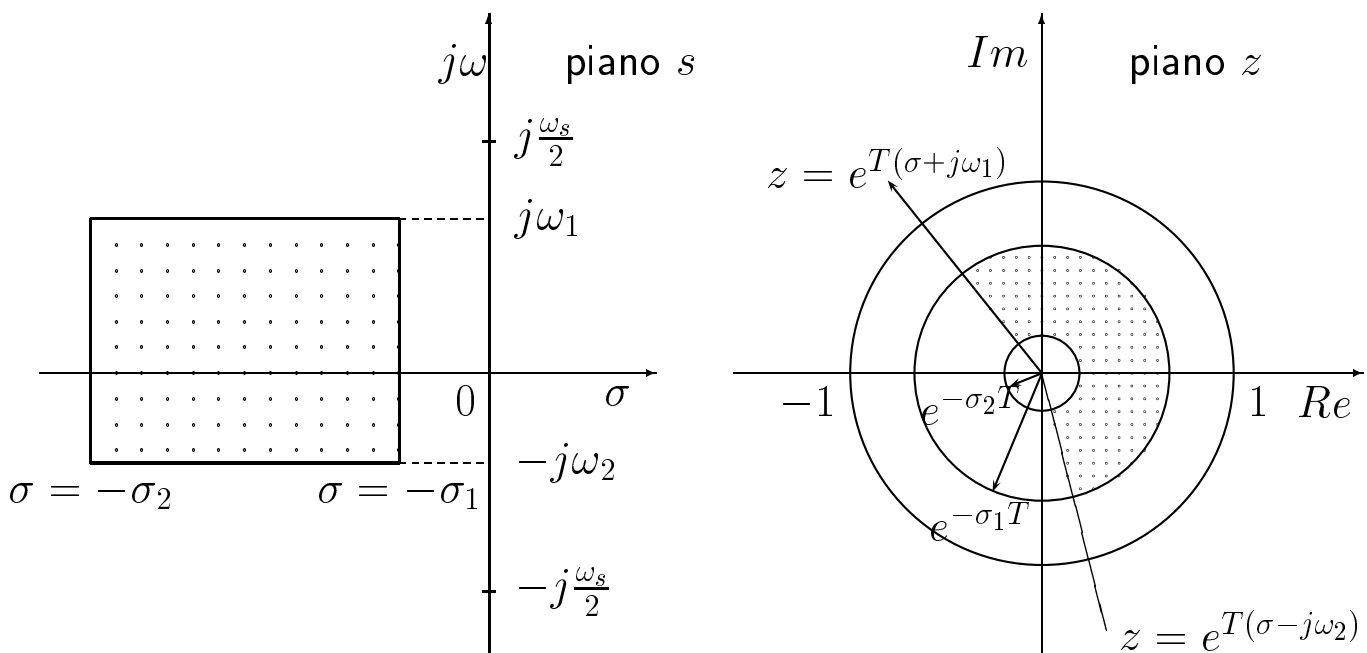
- Luoghi a decadimento esponenziale costante



- Luoghi a pulsazione costante



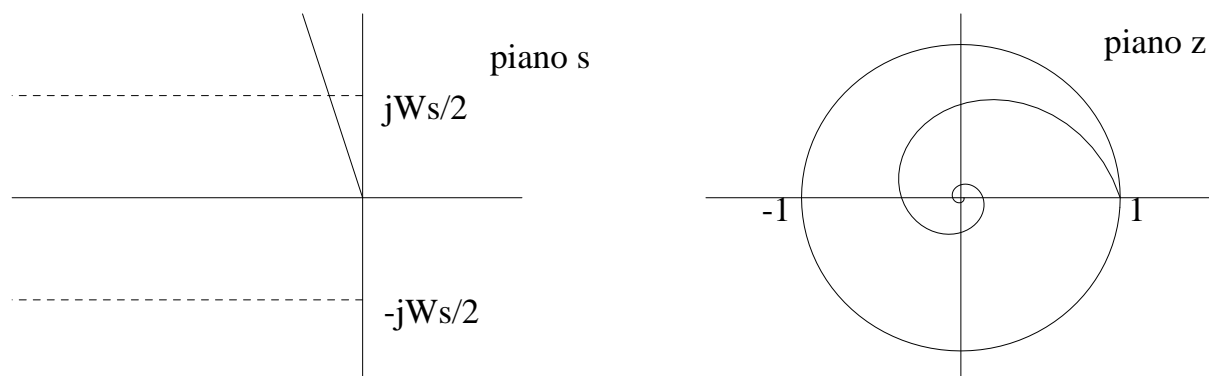
- Un esempio di corrispondenza fra due regioni del piano s e del piano z



- Luogo dei punti a coefficiente di smorzamento costante $\delta = \delta_1$

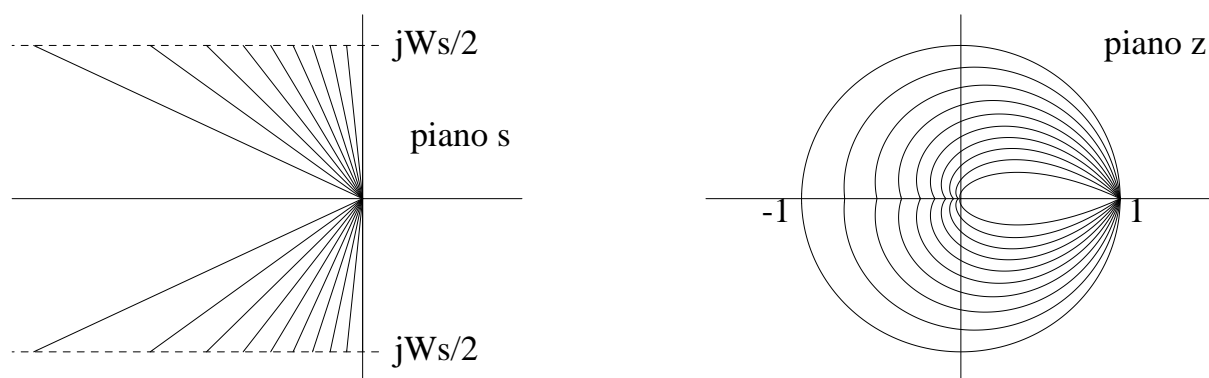
$$s = -\omega \tan \beta + j\omega = -\omega \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} + j\omega$$

$$\beta = \arcsin \delta_1$$

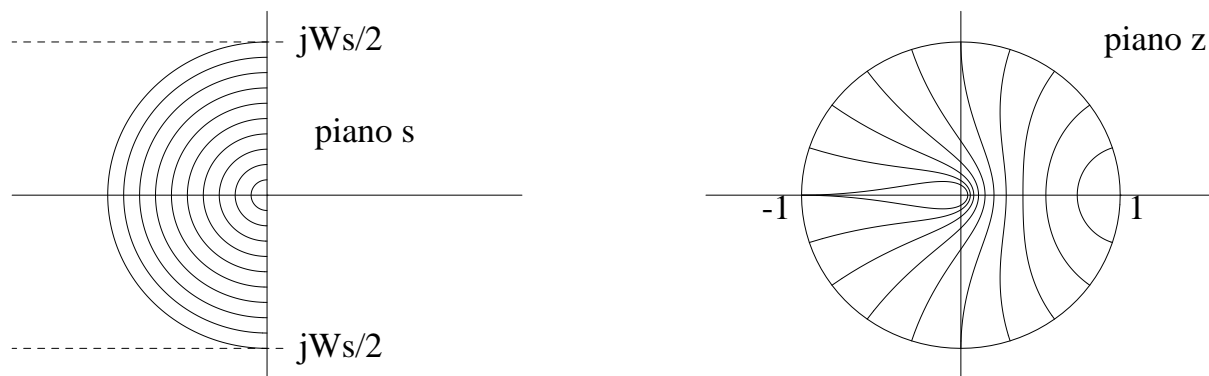


$$z = e^{sT} = e^{(-\omega \tan \beta + j\omega)T} = e^{-\varphi \tan \beta} e^{j\varphi} \quad \varphi = \omega T$$

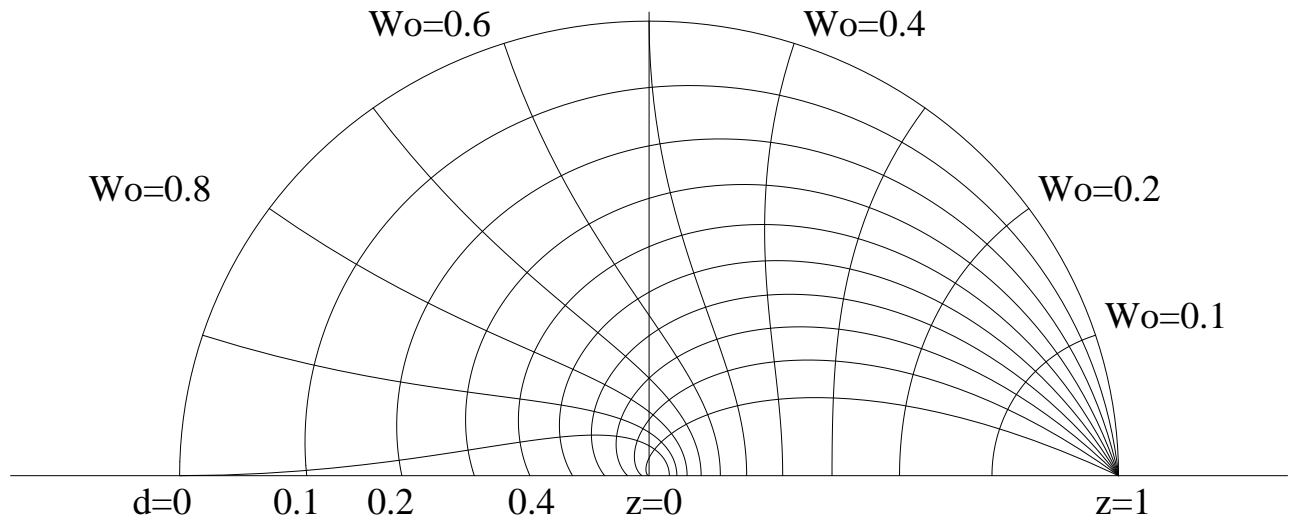
- Luoghi a coefficiente di smorzamento δ costante



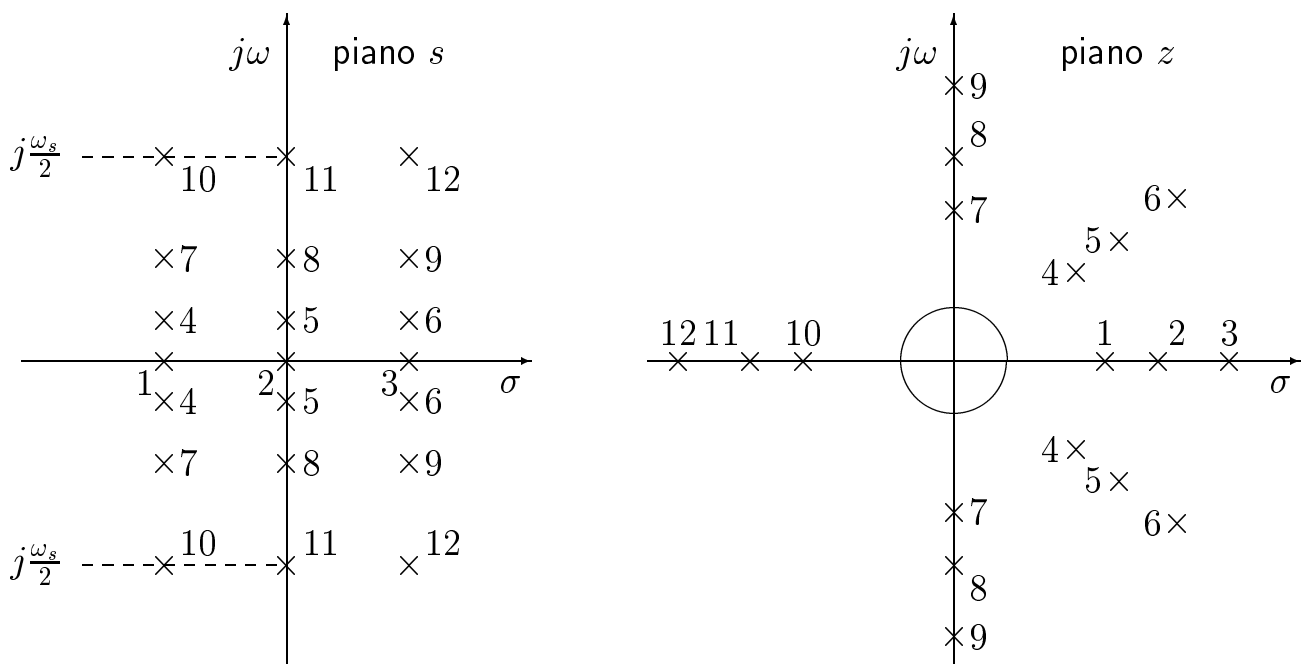
- Luoghi a pulsazione naturale ω_n costante



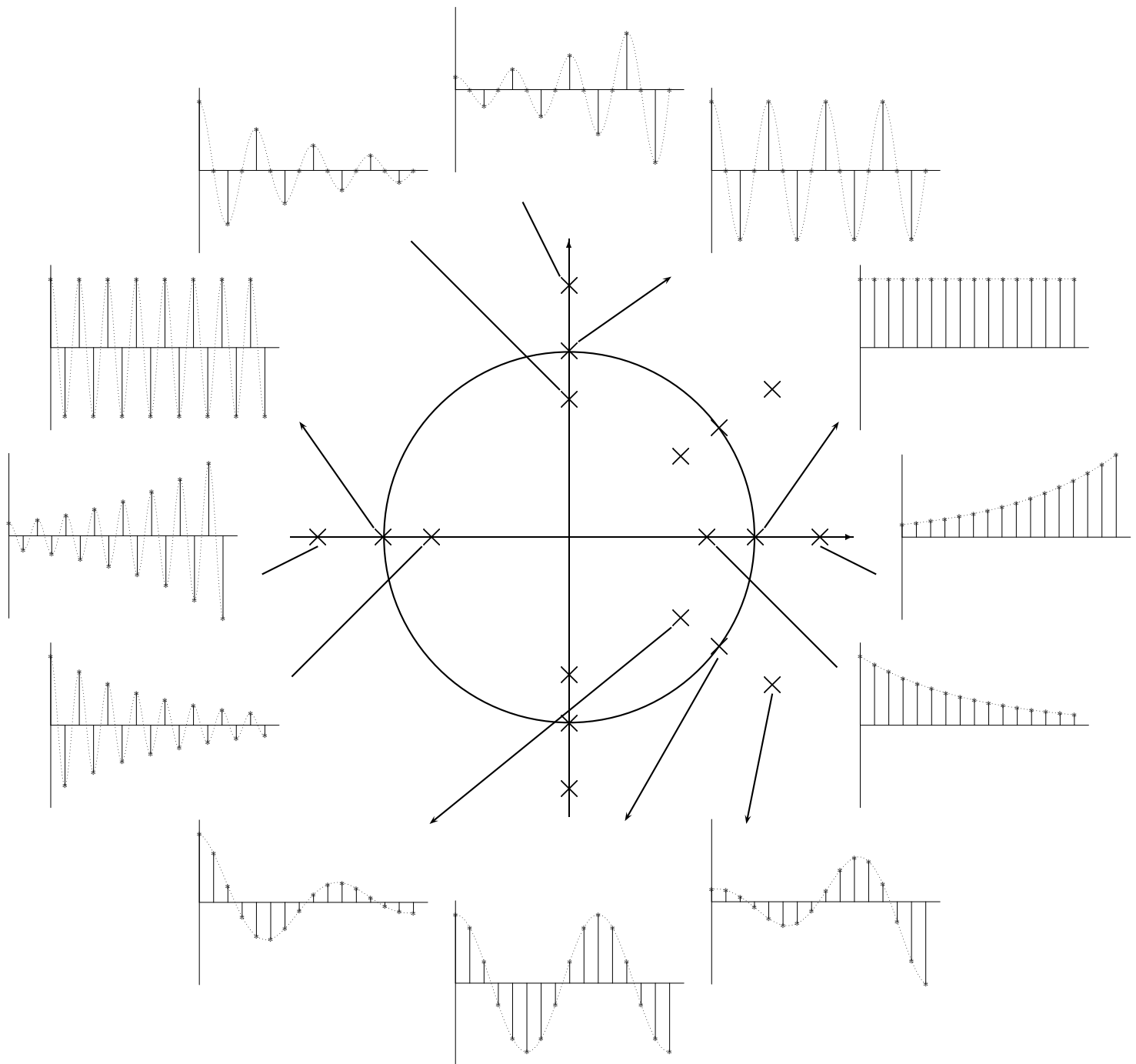
- Luoghi del piano z a δ e ω_n costanti



- I punti del piano s e del piano z , posti in corrispondenza per mezzo della relazione $z = e^{sT}$, possono essere considerati come poli corrispondenti di trasformate $F(s)$ ed $F(z)$, con $F(z)$ calcolata campionando $F(s)$

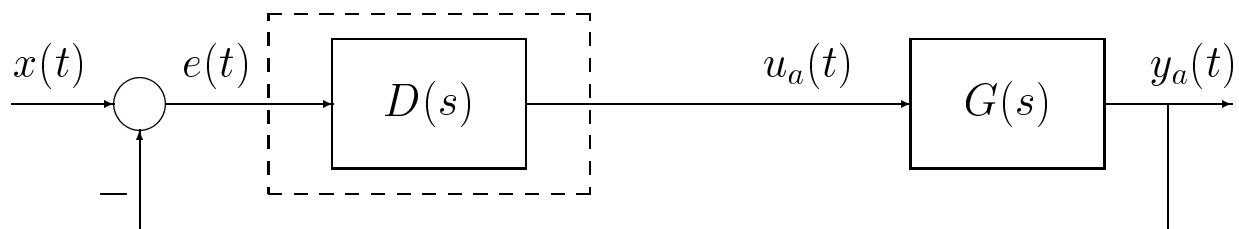


POSIZIONE DEI POLI E RISPOSTE TRANSITORIE

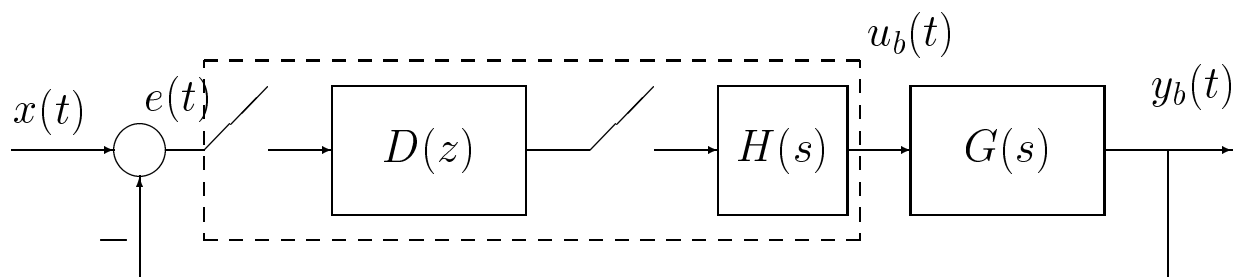


PROGETTO PER DISCRETIZZAZIONE

- Tre classi di tecniche progettuali
 1. Metodo indiretto o per discretizzazione di un progetto analogico
 2. Metodo diretto ossia nel dominio discreto:
 - progetto nel piano w (Bode)
 - progetto con il luogo delle radici
 - progetto con metodi analitici
 3. Regolatori a struttura fissa (tipo PID)
- Metodo indiretto



(a)



(b)

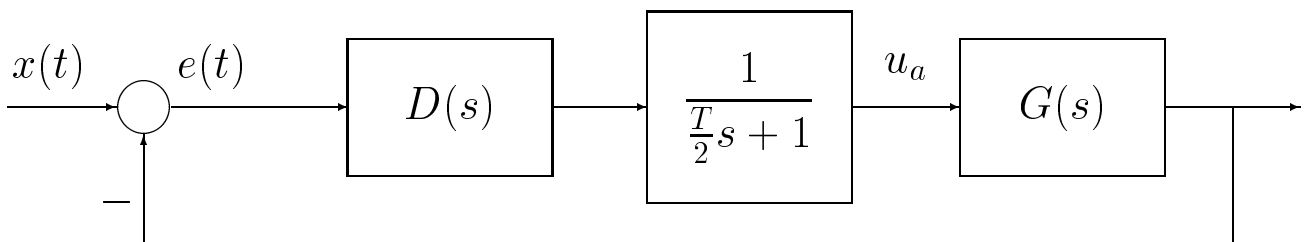
- T il più piccolo possibile !?

- Tre passi concettuali

1. Definizione di T e verifica dei margini di stabilità del sistema

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{T}{\frac{T}{2}s + 1}$$

$$H_0(s) \approx e^{-sT/2}$$



2. Discretizzazione della $D(s)$

3. Verifica a posteriori (simulativa e sperimentale) del comportamento dinamico

- TECNICHE DI DISCRETIZZAZIONE:

1. Metodo delle differenze all'indietro
2. Metodo delle differenze in avanti
3. Trasformazione bilineare
4. Trasformazione bilineare con precompensazione
5. Metodo della \mathcal{Z} -trasformata
6. Metodo della \mathcal{Z} -trasformata con ricostruttore di ordine 0
7. Metodo della corrispondenza poli/zeri

• METODO DELLE DIFFERENZE ALL'INDIETRO

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

 • Esempio: $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = ax(t)$

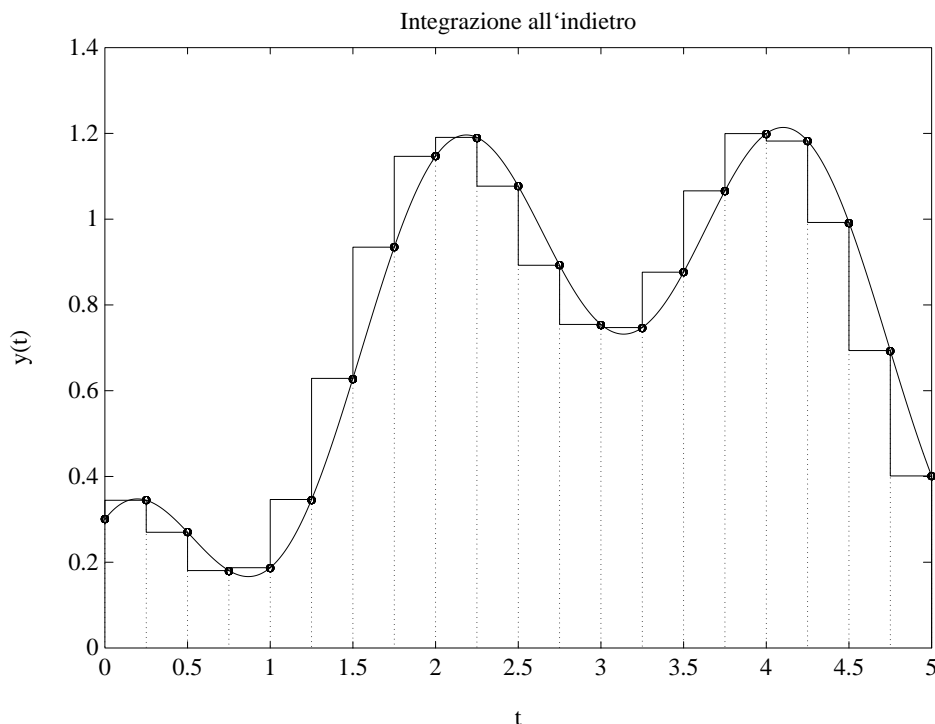
$$\int_0^t \frac{dy(t)}{dt} dt = -a \int_0^t y(t) dt + a \int_0^t x(t) dt$$

 calcolando per $t = kT$, per $t = (k - 1)T$ e sottraendo si ha

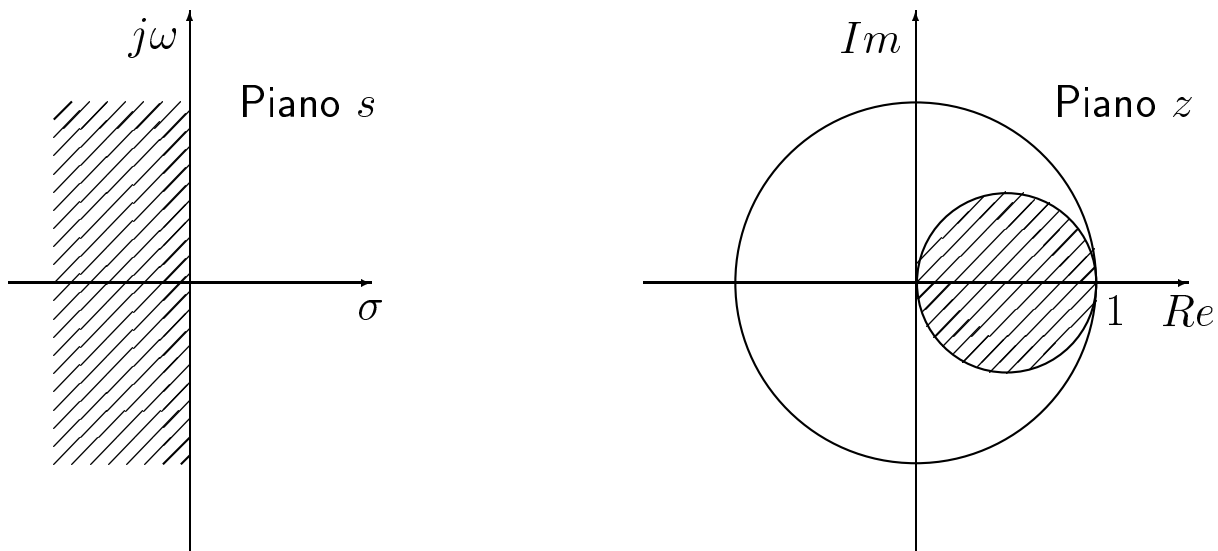
$$\begin{aligned} y(kT) - y((k - 1)T) &= -a \int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt + a \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \\ &\simeq -aT [y(kT) - x(kT)] \end{aligned}$$

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - aT [Y(z) - X(z)]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{aT}{1 - z^{-1} + aT} = \frac{a}{\frac{1 - z^{-1}}{T} + a}$$



- Legame fra il piano s e il piano z :



- Per $z = \sigma + j\omega$

$$Re \left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega} \right) = Re \left(\frac{(\sigma + j\omega - 1)(\sigma - j\omega)}{\sigma^2 + \omega^2} \right) = \frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2}{\sigma^2 + \omega^2} < 0$$

$$\left(\sigma - \frac{1}{2} \right)^2 + \omega^2 < \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

- Regolatori stabili tempo continui $D(s)$ vengono trasformati in regolatori stabili tempo discreti $D(z)$.

2. METODO DELLE DIFFERENZE IN AVANTI

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{T}}$$

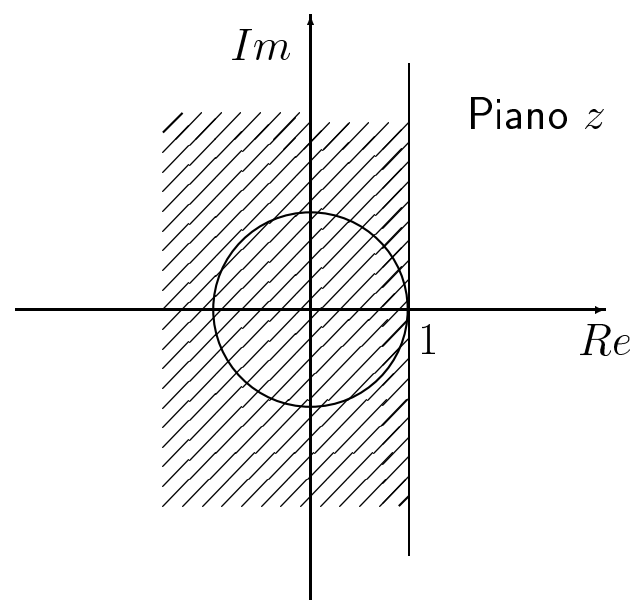
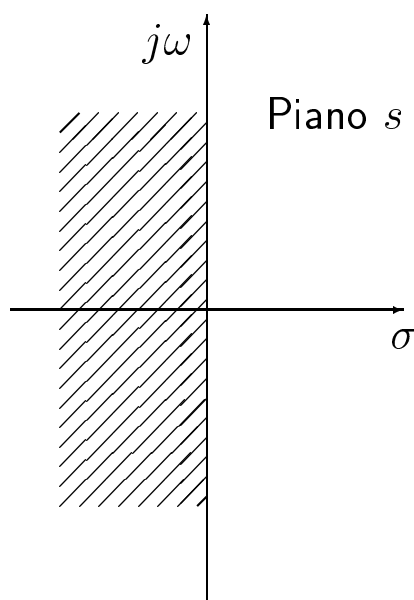
• Esempio

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx Ty((k-1)T), \quad \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx Tx((k-1)T)$$

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT [y((k-1)T) - x((k-1)T)]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{aTz^{-1}}{1 - (1 - aT)z^{-1}} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} + a}$$

$$Re(s) = Re\left(\frac{z-1}{T}\right) < 0 \quad \rightarrow \quad Re(z) < 1$$



- Un regolatore stabile $D(s)$ può trasformarsi in un regolatore instabile $D(z)$.

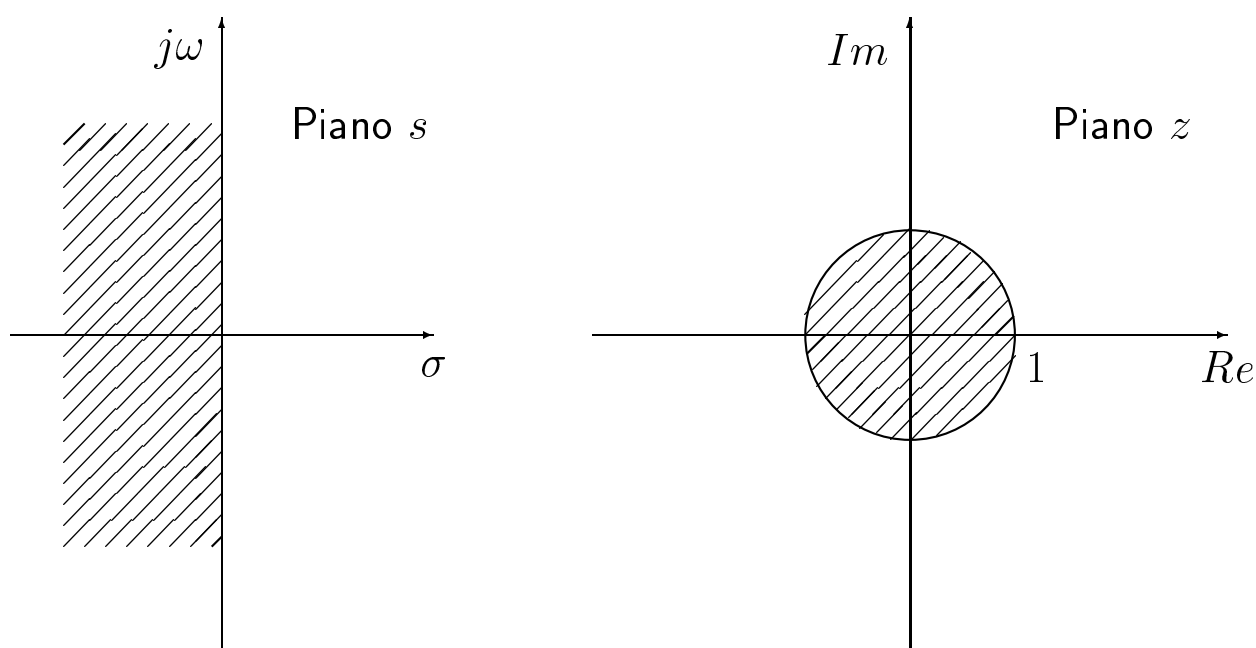
3. TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

- detta anche integrazione trapezoidale (o di di Tustin)

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx \frac{[y(kT) + y((k-1)T)]T}{2}$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx \frac{[x(kT) + x((k-1)T)]T}{2}$$

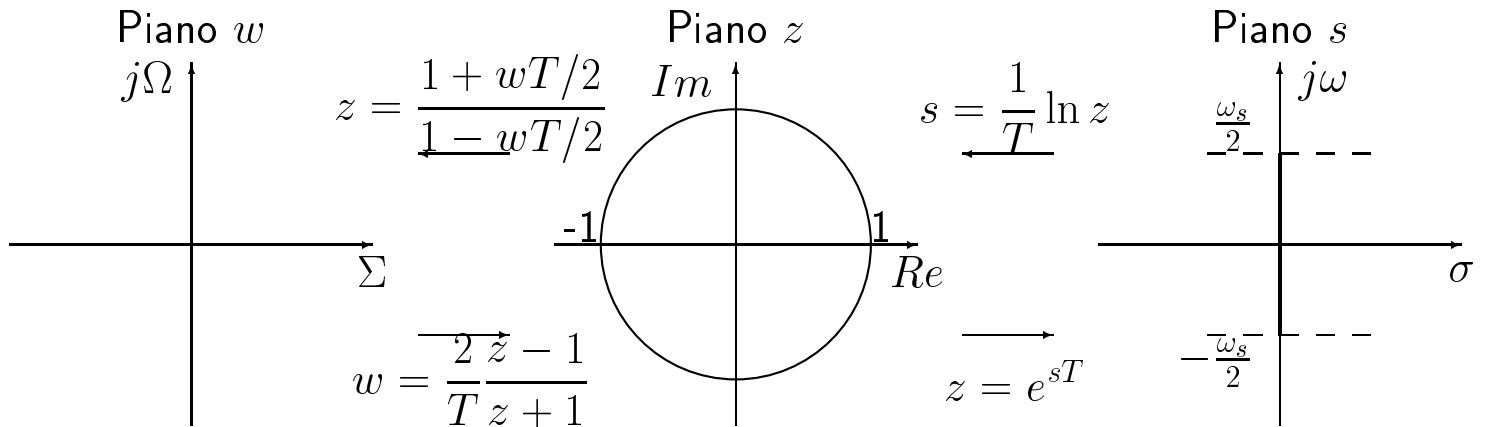


$$\operatorname{Re} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) < 0$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1} \right) = \operatorname{Re} \left[\frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + j2\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \right] < 0$$

$$\sigma^2 + \omega^2 < 1$$

- Relazione frequenziale tra il piano w , il piano z ed il piano s



- La trasformazione non genera sovrapposizione frequenziale, ma introduce distorsioni

$$j\Omega = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}}$$

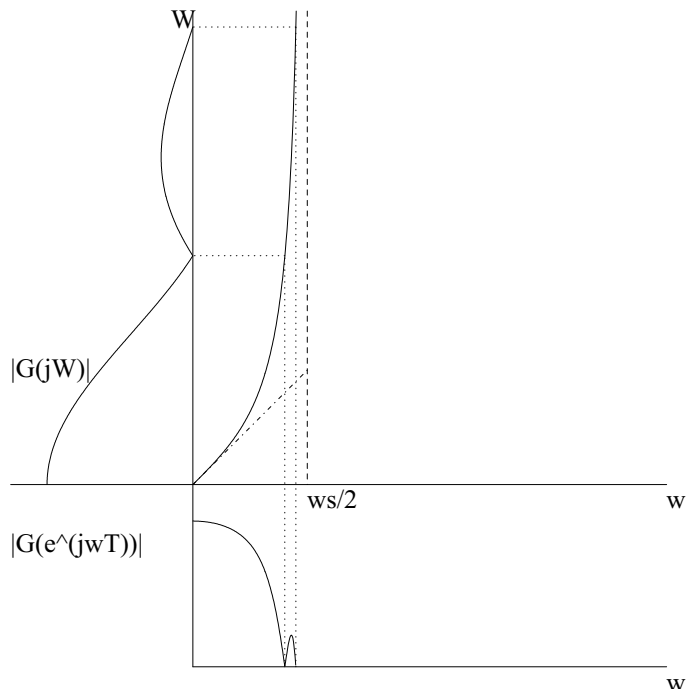
$$= \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} = \frac{2}{T} \frac{2j \sin \omega T/2}{2 \cos \omega T/2}$$

$$= j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

$$D_c(j\Omega) = D_d(e^{j\omega T})$$

per

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$



4. TRASFORMAZIONE BILINEARE CON PRECOMPENSAZIONE

$$s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{z - 1}{z + 1}$$

- Per $\Omega = \omega_1$ si ha $\omega = \omega_1$
- Esempio

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

- Precompensazione alla frequenza $\omega = a$

$$s = \frac{a}{\tan \frac{aT}{2}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$G_d(z) = \frac{\tan \frac{aT}{2} (1 + z^{-1})}{(\tan \frac{aT}{2} - 1)z^{-1} + (\tan \frac{aT}{2} + 1)}$$

- Esempio. Progettare un filtro passa basso discreto che approssimi il comportamento frequenziale nella banda $[0, 10] \text{ rad/s}$ del filtro analogico

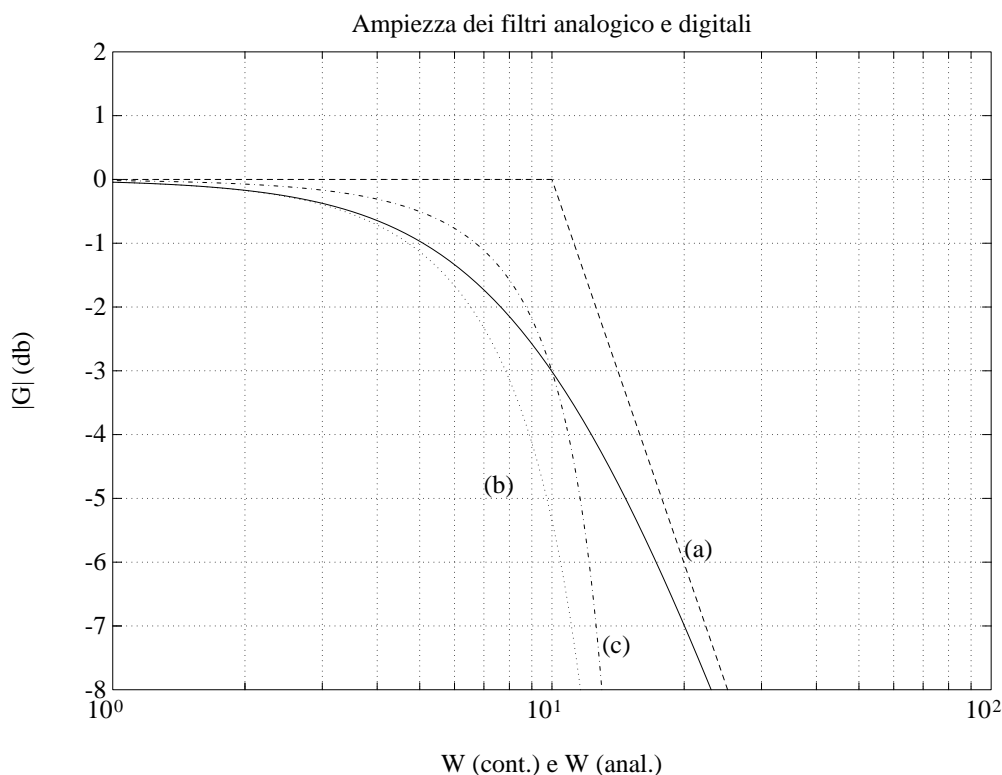
$$G(s) = \frac{10}{s + 10} \quad \text{con} \quad T = 0.2 \text{ s}$$

$$G_d(z) = \frac{10}{\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 10} = \frac{1 + z^{-1}}{2}$$

$$G_d(e^{j\omega T}) = \frac{10}{j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} + 10} = \frac{1}{j \tan 0.1\omega + 1}$$

- Utilizzando la precompensazione di frequenza per $\omega = 10 \text{ rad/s}$, si ottiene

$$G_d(z) = \frac{10}{\frac{10}{\tan \frac{10T}{2}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 10} = \frac{0.609(1 + z^{-1})}{1 + 0.218z^{-1}}$$



5. METODO DELLA \mathcal{Z} -TRASFORMATA

$$D(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[D(s)]]$$

- Invarianza della risposta all'impulso
- Possibilità di aliasing
- Da $D(s)$ stabili a $D(z)$ stabili

6. METODO DELLA \mathcal{Z} -TRASFORMATA CON RICOSTRUTTORE DI ORDINE 0 o dell'invarianza alla risposta al gradino

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[D(z)\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[D(s)\frac{1}{s}\right]\Bigg|_{t=kT}$$

$$D(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{D(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}D(s)\right]$$

- Possibilità di aliasing
- Da $D(s)$ stabili a $D(z)$ stabili

7. METODO DELLA CORRISPONDENZA POLI/ZERI

- Si fattorizza numeratore e denominatore di $D(s)$
- Trasformazione dei poli e zeri

$$(s + a) \rightarrow (1 - e^{-aT} z^{-1})$$

$$(s + a \pm jb) \rightarrow (1 - 2e^{-aT} \cos bT z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2})$$

- Si introducono zeri in $z = -1$ in numero pari al grado relativo
- Si aggiusta il guadagno alle basse ($z = 1$) o alle alte ($z = -1$) frequenze
- Esempio

$$D(s) = \frac{s + b}{s + a}$$

$$D(z) = k \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}}$$

$$D(z = 1) = k \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}} = D(s = 0) = \frac{b}{a}$$

$$k = \frac{b(1 - e^{-aT})}{a(1 - e^{-bT})}$$

- Esempio. Filtro passa alto

$$D(s) = \frac{s}{s + a}$$

$$D(z) = k \frac{z - 1}{z - e^{-aT}} \quad k = \frac{1 + e^{-aT}}{2}$$

- Esempio

$$D(s) = \frac{1}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{1}{(s+a+jb)(s+a-jb)}$$

- Eccesso poli-zeri uguale a 2

$$D(z) = k \frac{(z+1)^2}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}$$

$$k = \frac{1 - 2e^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}{4(a^2 + b^2)}$$

- Esempio

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

- Specifiche in retroazione unitaria:

- $\delta = 0.5$ ($S = 16.3\%$) e $T_a \leq 2$ s (al 2%)

$$\frac{4}{\delta\omega_n} = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 4 \text{ rad/s}$$

- Scelta del periodo di campionamento T :

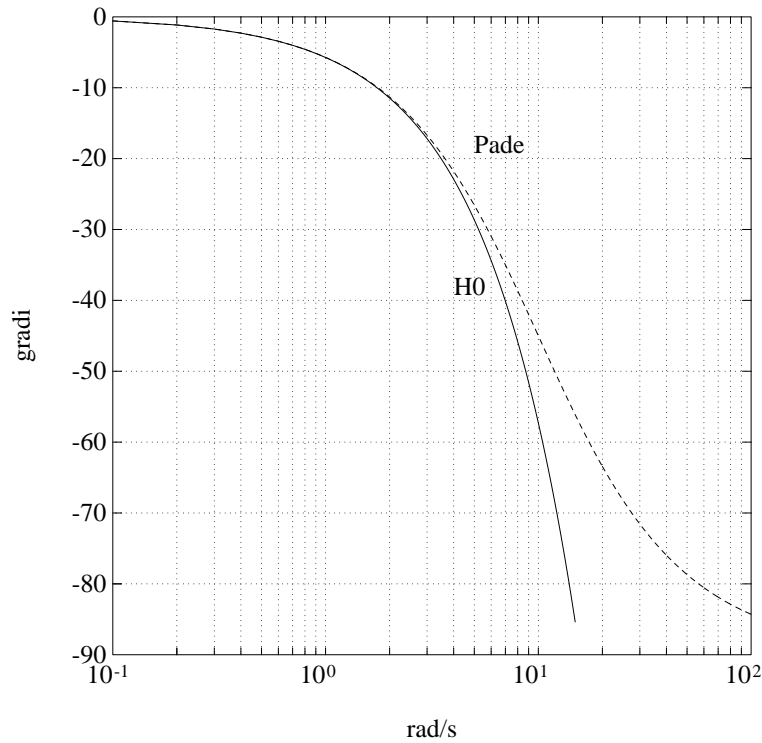
- oscillazioni smorzate con periodo $2\pi/(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}) = 1.814$ s

- circa 8-10 campioni per oscillazione

- $T = 0.2$ s

- Effetto di ritardo introdotto dal ricostruttore

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx G_h(s) = \frac{1}{Ts/2 + 1} = \frac{10}{s + 10}$$



- Un controllore analogico $D(s)$ che soddisfa le specifiche per il sistema modificato G_m è il seguente

$$G_m(s) = G_h(s)G(s) \quad \Rightarrow \quad D(s) = 20.25 \frac{s + 2}{s + 6.667}$$

- Posto $G_a(s) = D(s)G_h(s)G(s)$, la funzione di trasferimento complessiva

$$G_0(s) = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)} = \frac{202.5}{s^3 + 16.667s^2 + 66.67s + 202.5}$$

ha i poli in $s = -12.665$ e in $s = -2 \pm j3.462$

- Per la coppia di poli dominanti vale $\delta = 0.5$, $\delta\omega_n = 2$ e quindi $T_a = 2$ s
- Si passa al dominio discreto con la trasformazione per corrispondenza di poli e zeri

$$z = e^{-6.667T} = 0.2644, \quad z = e^{-2T} = 0.6703$$

$$D(z) = k \frac{z - 0.6703}{z - 0.2644}$$

$$D(z = 1) = D(s = 0) \quad \Rightarrow \quad k = 13.57$$

$$D(z) = 13.57 \frac{z - 0.6703}{z - 0.2644}$$

- Risposta del sistema discreto in catena chiusa (a) e corrispondente uscita del regolatore (b)

