

Equazioni differenziali lineari

- Da un punto di vista dinamico, i sistemi lineari stazionari sono descritti da equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x$$

o, con notazione più compatta (operatore derivata $D \equiv \frac{d}{dt}$)

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i x(t)$$

dove $y(t)$ è la funzione *uscita* ed $x(t)$ è la funzione *ingresso*.

- *Condizione di fisica realizzabilità*: $n \geq m$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } n > m \text{ il sistema è } \textit{strettamente proprio} \\ \text{se } n = m \text{ il sistema è } \textit{proprio} \\ \text{se } n < m \text{ il sistema è } \textit{improprio} \end{array} \right.$$

- Per risolvere l'equazione differenziale occorre conoscere

– i) le *condizioni iniziali*:

$$y(0^-), \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0^-}, \quad \dots, \quad \left. \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right|_{t=0^-}$$

– ii) il *segnale di ingresso*

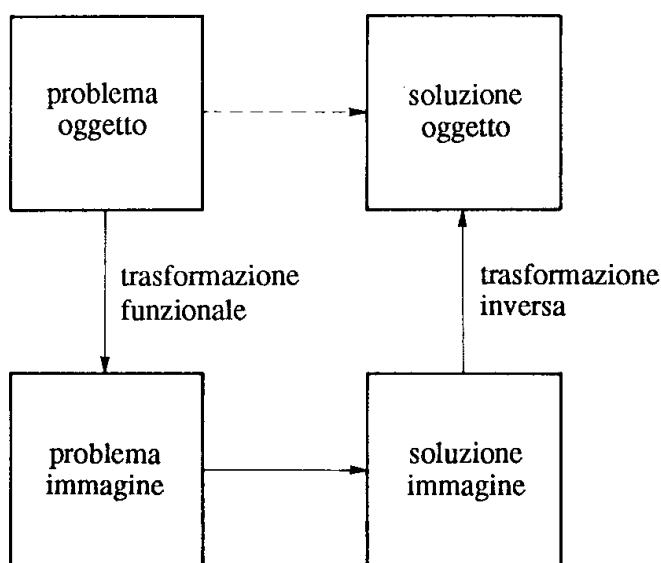
$$x(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

- Si suppone che la funzione $x(t)$ sia *continua a tratti e limitata per ogni t finito*;

- La soluzione dell'equazione differenziale è la somma di due funzioni:

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

1. *l'evoluzione libera* $y_0(t)$, cioè la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata che si ottiene ponendo uguale a zero il segnale di ingresso: $x(t) \equiv 0, 0 \leq t \leq T$.
 2. *l'evoluzione forzata* $y_1(t)$, cioè la soluzione particolare che si ottiene ponendo a zero tutte le condizioni iniziali.
- Per la soluzione delle equazioni differenziali sono di notevole utilità le *trasformazioni funzionali*, in particolare la *trasformazione di Laplace*.
 - Le trasformazioni funzionali stabiliscono una corrispondenza *biunivoca* fra *funzioni oggetto*, normalmente funzioni del tempo, e *funzioni immagine*.



- Tipicamente *problema immagine* è di più facile soluzione. Esempio:

$$a \cdot b = e^{\ln(a \cdot b)} = e^{(\ln a + \ln b)}$$

- Le equazioni differenziali si trasformano in equazioni algebriche, per cui la loro soluzione è immediata.
- Dalla soluzione immagine si passa poi alla soluzione oggetto eseguendo sulle funzioni immagine l'operazione di *antitrasformazione*.

Trasformate di Laplace

- La trasformata di Laplace associa in modo biunivoco a una generica funzione reale del tempo $f(t)$ una funzione complessa $F(s)$ della variabile complessa s :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

È definita nel modo seguente:

$$F(s) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- La trasformazione inversa viene detta antitrasformata di Laplace:

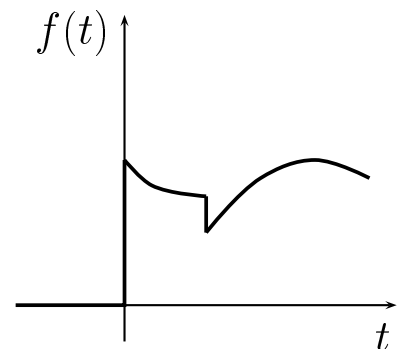
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

È definita nel modo seguente:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

- La funzione $F(s)$ è definita in un *dominio di convergenza* che consiste in un semipiano del piano s posto a destra di una retta parallela all'asse immaginario
- La funzione $f(t)$ è trasformabile secondo Laplace se:

- $f(t) = 0$ per $t < 0$;
- $f(t)$ è continua a tratti e limitata al finito per $t \geq 0$;
- l'integrale $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt$ esiste per un qualche valore di σ .



- Si tiene conto della *storia passata* della variabile $f(t)$ per $t < 0$ considerando opportune *condizioni iniziali* all'istante $t = 0$.

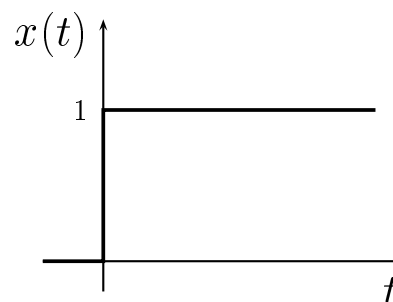
• Trasformate di Laplace dei segnali di uso più comune

$$\mathcal{L} [t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$$

Come casi particolari di questa relazione si ottengono le trasformate di Laplace dei seguenti segnali:

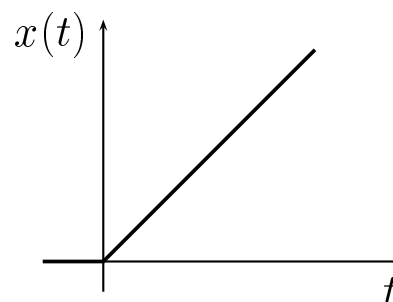
a) **Gradino unitario** ($n = 0, a = 0$):

$$x(t) = u(t) \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s}$$



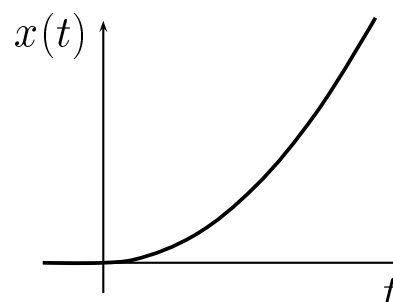
b) **Rampa unitaria** ($n = 1, a = 0$):

$$x(t) = t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^2}$$



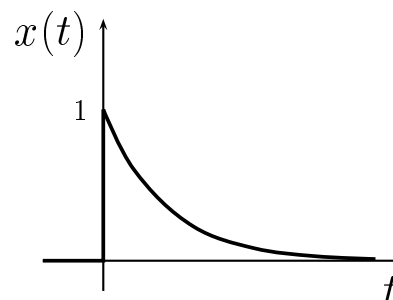
c) **Parabola unitaria** ($n = 2, a = 0$):

$$x(t) = \frac{t^2}{2} \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^3}$$



d) **Esponenziale** ($n = 0, a < 0$):

$$x(t) = e^{at} \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s - a}$$



e) **Sinusoide:** $x(t) = \sin \omega t$. Tale segnale si ricava dalla composizione di due esponenziali:

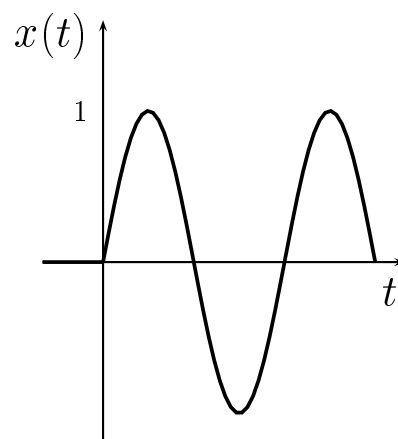
$$x(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Per la linearità della trasformata di Laplace si ha:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{2\omega j}{s^2 + \omega^2} \right]$$

da cui si ricava:

$$x(t) = \sin \omega t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

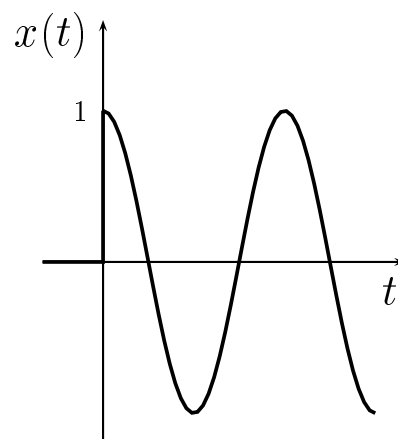


f) **Cosinusoide:** $x(t) = \cos \omega t$. Per tale funzione valgono le relazioni:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2s}{s^2 + \omega^2} \right]$$

da cui si ottiene:

$$x(t) = \cos \omega t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$



Proprietà della trasformata di Laplace

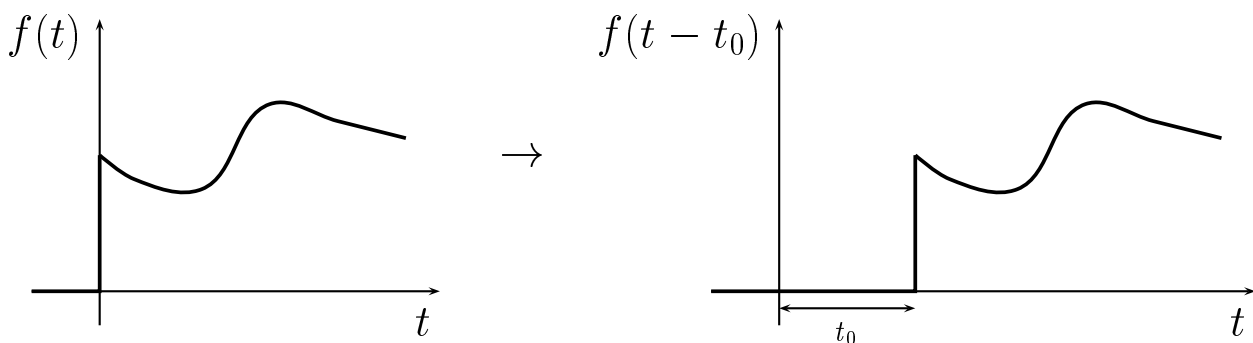
- **Linearità.** Dette c_1 e c_2 due costanti complesse arbitrarie, $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ due funzioni del tempo le cui trasformate siano rispettivamente $F_1(s)$ e $F_2(s)$, vale la relazione

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

- **Traslazione nel tempo.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, nulla per $t < 0$. Vale la relazione

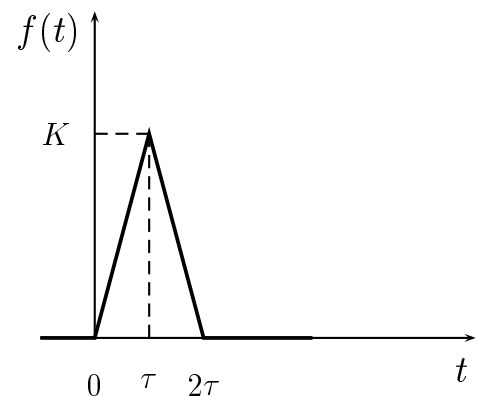
$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$

cioè moltiplicare per la funzione $e^{-t_0 s}$ nello spazio trasformato vuol dire, nel tempo, traslare in ritardo la funzione $f(t)$ della quantità t_0 .



Esempio: Il segnale $f(t)$ è scomponibile nella somma di tre rampe, di pendenze K/τ , $-2K/\tau$ e K/τ , applicate rispettivamente agli istanti $t=0$, $t=\tau$ e $t=2\tau$ utilizzando il teorema della traslazione nel tempo, si deduce

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{K}{\tau s^2} (1 - 2e^{-\tau s} + e^{-2\tau s}) \\ &= \frac{K}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2 \end{aligned}$$



- **Trasformata dell'integrale**. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s)$$

Moltiplicare per $\frac{1}{s}$ una funzione $F(s)$ vuol dire calcolare l'integrale del segnale $f(t)$.

- **Trasformata della derivata generalizzata**. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = s F(s) - f(0^-)$$

dove $f(0^-)$ è il valore che la funzione $f(t)$ assume all'istante $t = 0^-$. Nel caso di condizioni iniziali nulle, moltiplicare per s una funzione $F(s)$ vuol dire calcolare la derivata del segnale $f(t)$.

- **Teorema del valore iniziale**. Sia $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Vale la relazione:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s)$$

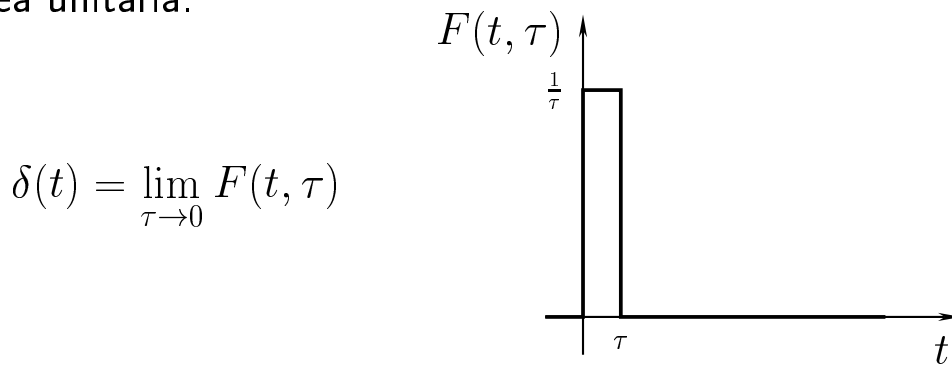
Questo teorema è valido per qualsiasi funzione $X(s)$.

- **Teorema del valore finale**. Sia $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Vale la relazione:

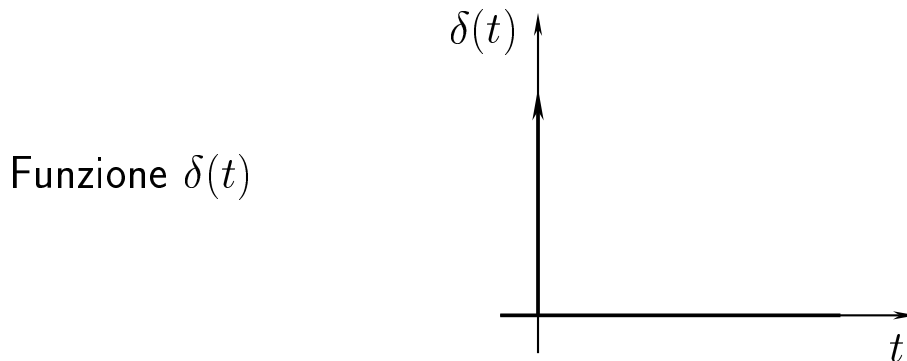
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s)$$

Questo teorema è valido solamente per funzioni $X(s)$ che abbiano tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un polo nell'origine.

- **Impulso di Dirac:** $\delta(t)$. È un segnale ideale che approssima un impulso di area unitaria.



- L'impulso di Dirac viene rappresentato nel modo seguente:



- La trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac è:

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Valgono infatti le seguenti relazioni:

$$F(s) = \mathcal{L}[\lim_{\tau \rightarrow 0} F(t, \tau)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}[F(t, \tau)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} F(s, \tau)$$

Essendo

$$F(s, \tau) = \frac{1}{\tau s} - \frac{1}{\tau s} e^{-\tau s} = \frac{1}{\tau s} (1 - e^{-\tau s})$$

si ha che

$$F(s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} F(s, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\tau}(1 - e^{-\tau s})}{\frac{d}{d\tau}(\tau s)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{se^{-\tau s}}{s} = 1$$

- La risposta di un sistema all'impulso di Dirac coincide con l'antitrasformata della funzione di trasferimento:

$$Y(s) = G(s) \underbrace{X(s)}_1 = G(s) \quad \rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

- **Teorema della traslazione in s .** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

$$\mathcal{L} [e^{-at} f(t)] = F(s + a)$$

- **Derivate di ordine superiore al primo.** Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$ e siano $f(0_-)$, $\dot{f}(0_-)$, $\ddot{f}(0_-)$, ... le condizioni iniziali della funzione $f(t)$ all'istante 0_- . Valgono le relazioni (si utilizza l'operatore derivata D):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] &= \mathcal{L} [D f(t)] = s F(s) - f(0_-) \\ \mathcal{L} \left[\frac{d^2 f}{dt^2} \right] &= \mathcal{L} [D^2 f(t)] = s^2 F(s) - s f(0_-) - D f(t)|_{t=0_-} \\ &\dots \quad \dots \\ \mathcal{L} \left[\frac{d^i f}{dt^i} \right] &= \mathcal{L} [D^i f(t)] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} f(t) \Big|_{t=0_-} \end{aligned}$$

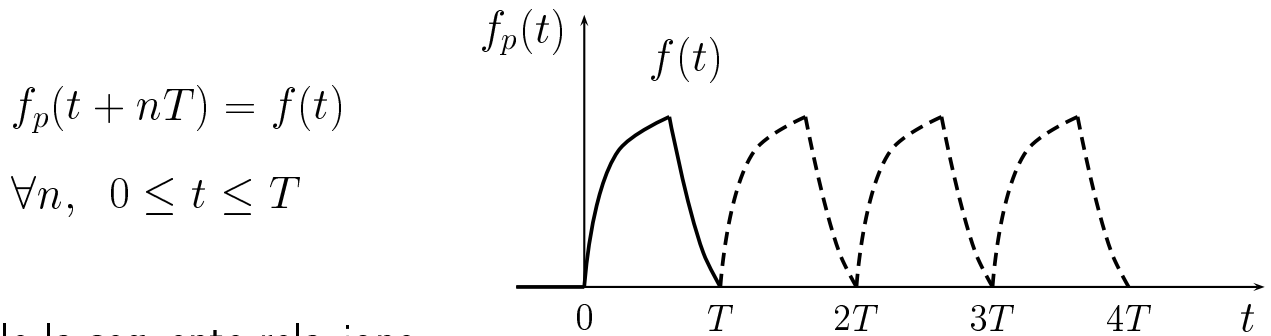
- **Teorema della trasformata del prodotto integrale.** Siano $F_1(s)$ e $F_2(s)$ le trasformate di Laplace delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[\int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = F_1(s) F_2(s)$$

L'integrale di convoluzione delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ gode della proprietà commutativa:

$$\int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$$

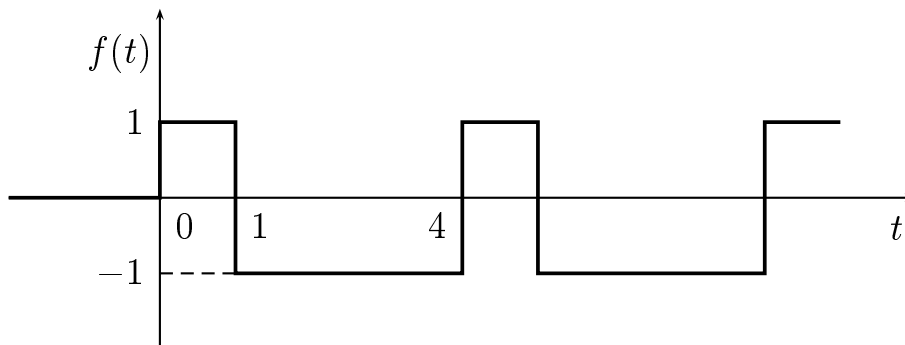
- **Trasformata di una funzione periodica.** Sia $f(t)$ una funzione non nulla solo per $0 \leq t \leq T$ e sia $f_p(t)$ la funzione che si ottiene ripetendo in modo periodico la funzione $f(t)$.



Vale la seguente relazione:

$$\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1 - e^{-Ts}}$$

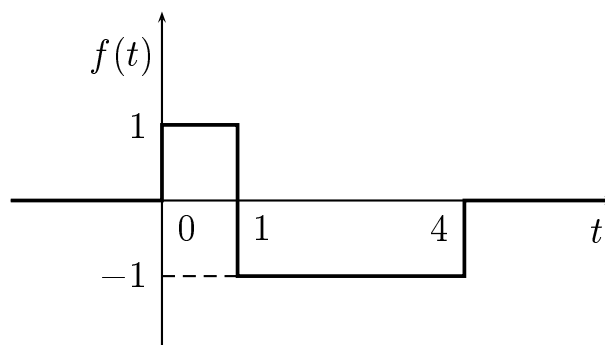
- Esempio. Calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale:



La funzione $f(t)$ è periodica di periodo $T = 4$. La sua trasformata di Laplace è

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{4s}} \mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-4s}}{s(1 - e^{4s})}$$

Con $f_1(t)$ si è indicata la funzione seguente:



Funzione di trasferimento

- Si consideri l'equazione differenziale:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i x(t)$$

Sostituendo alle funzioni e alle loro derivate le rispettive trasformate, si ottiene la relazione

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i X(s) + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t) \Big|_{t=0-}$$

in cui con $X(s)$ e $Y(s)$ si indicano le trasformate di Laplace dei segnali di ingresso e uscita $x(t)$ e $y(t)$.

- La trasformata di Laplace $Y(s)$ è data quindi dalla somma di due funzioni:

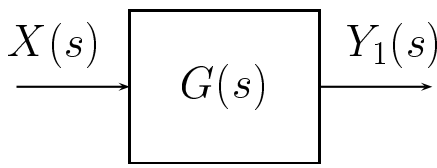
$$Y_0(s) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t) \Big|_{t=0-} / \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

$$Y_1(s) = \left(\sum_{i=0}^m b_i s^i / \sum_{i=0}^n a_i s^i \right) X(s)$$

che sono, rispettivamente, le trasformate dell'*evoluzione libera* $y_0(t)$ e dell'*evoluzione forzata* $y_1(t)$.

- La seguente funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

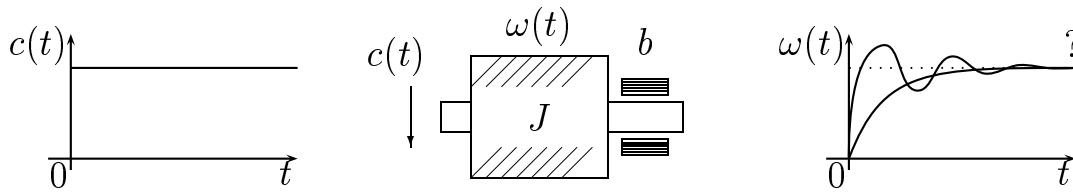


```

graph LR
    Xs["X(s)"] --> Gs["G(s)"]
    Gs --> Y1s["Y1(s)"]
            
```

è definita a partire da *condizioni iniziali identicamente nulle*.

Esempio. Si consideri un elemento meccanico con inerzia J , coefficiente di attrito lineare b che ruota alla velocità angolare ω al quale venga applicata una coppia esterna $c(t)$.



Si richiede di determinare la risposta del sistema al gradino unitario.

Per rispondere esattamente a questa domanda occorre determinare il modello dinamico del sistema. L'equazione differenziale che caratterizza il sistema è la seguente:

$$\frac{d[J\omega(t)]}{dt} = c(t) - b\omega(t) \quad \leftrightarrow \quad J\dot{\omega}(t) + b\omega(t) = c(t)$$

Partendo da condizioni iniziali nulle e trasformando secondo Laplace si ottiene:

$$J s \omega(s) + b \omega(s) = C(s) \quad \leftrightarrow \quad \omega(s) = \frac{1}{b + J s} C(s)$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ che caratterizza il sistema è quindi la seguente:

$$G(s) = \frac{1}{b + J s} \quad \begin{array}{c} G(s) \\ \begin{array}{ccc} C(s) & \rightarrow & \boxed{\frac{1}{b + J s}} & \rightarrow & \omega(s) \\ c(t) & & & & \omega(t) \end{array} \end{array}$$

I coefficienti di questa funzione sono in corrispondenza biunivoca con i coefficienti dell'equazione differenziale. Posto $C(s) = \frac{1}{s}$, la risposta al gradino del sistema in ambito trasformato è la seguente:

$$\omega(s) = G(s) C(s) \quad \rightarrow \quad \omega(s) = \frac{1}{(b + J s)s}$$

Alcune informazioni sull'andamento di $\omega(t)$ si possono ricavare direttamente da $\omega(s)$ anche senza antitrasformare. Applicando il teorema del valore iniziale, per esempio, si ricava il valore di $\omega(t)$ per $t = 0^+$:

$$\omega(0^+) = \omega(t)|_{t \rightarrow 0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \omega(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{(b + J s)s} = 0$$

Applicando invece il teorema del valore finale si ricava il valore di $\omega(t)$ per $t \rightarrow \infty$:

$$\omega(\infty) = \omega(t)|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \omega(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{(b + J s)s} = \frac{1}{b}$$

Applicando il teorema del valore iniziale è anche possibile calcolare il valore dell'accelerazione $\dot{\omega}(t)$ per $t = 0^+$:

$$\dot{\omega}(0^+) = \dot{\omega}(t)|_{t \rightarrow 0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \underbrace{[s \omega(s)]}_{\dot{\omega}(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{(b + J s)s} = \frac{1}{J}$$

Infatti, in ambito trasformato, l'accelerazione $\dot{\omega}(s)$ si ottiene semplicemente moltiplicando la velocità $\omega(s)$ per la variabile s (che rappresenta l'operatore "derivata" di Laplace).

Per ottenere esattamente l'andamento temporale $\omega(t)$ occorre antitrasformare la funzione $\omega(s)$. Il modo più semplice per farlo è utilizzare la scomposizione in fratti semplici. Nel caso in esame, esistono sempre due coefficienti α e β che permettono di scomporre la funzione $\omega(s)$ nel modo seguente:

$$\omega(s) = \frac{1}{(b + Js)s} \quad \leftrightarrow \quad \omega(s) = \frac{\alpha}{b + Js} + \frac{\beta}{s}$$

I coefficienti α e β si determinano (per esempio) imponendo uguaglianza fra le due espressioni:

$$\omega(s) = \frac{\alpha}{b + Js} + \frac{\beta}{s} = \frac{\alpha s + \beta(b + Js)}{(b + Js)s} = \frac{(\alpha + \beta J)s + \beta b}{(b + Js)s} = \frac{1}{(b + Js)s}$$

Risolvendo si ricava:

$$\begin{cases} \alpha + \beta J = 0 \\ \beta b = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{J}{b} \\ \beta = \frac{1}{b} \end{cases}$$

per cui si ha

$$\omega(s) = \frac{1}{(b + Js)s} = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{s} - \frac{J}{b + Js} \right] = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{b}{J}} \right]$$

Antitrasformando i singoli elementi si ricava la funzione $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \frac{1}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{J}t} \right)$$

L'andamento temporale è di tipo esponenziale:

