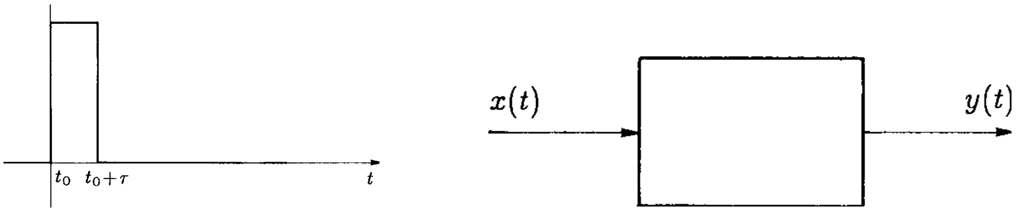
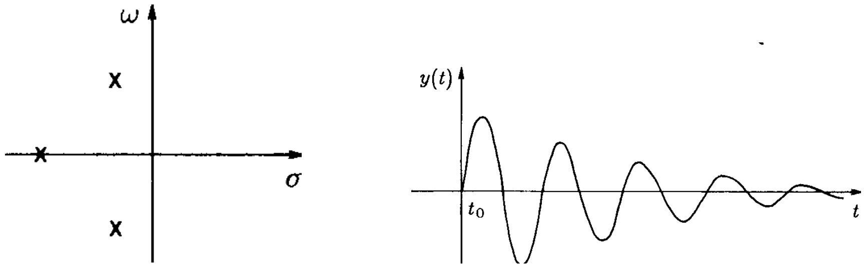
Stabilità e retroazione

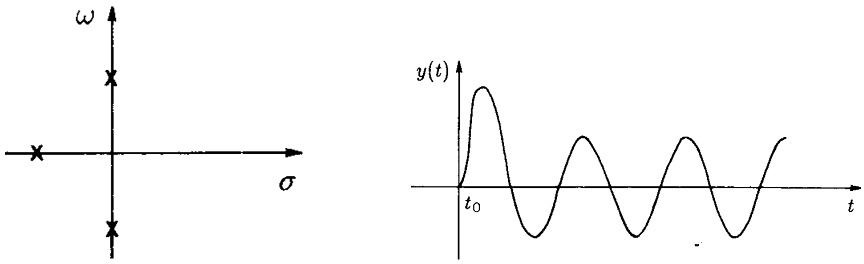
- Stabilità dei sistemi dinamici lineari:



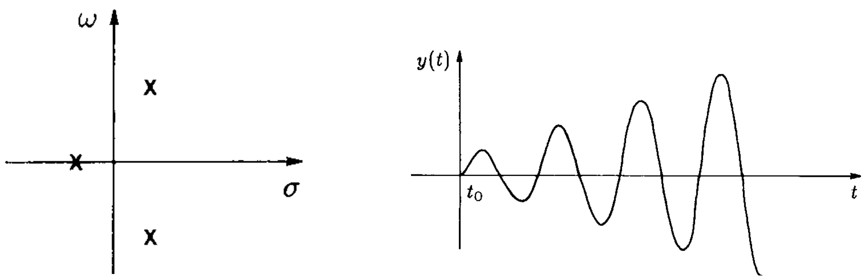
- Un sistema $G(s)$ è **asintoticamente stabile** se tutti i suoi poli sono a parte reale negativa.



- Un sistema $G(s)$ è **stabile** se tutti i suoi poli sono a parte reale negativa o nulla e se i poli a parte reale nulla sono semplici.

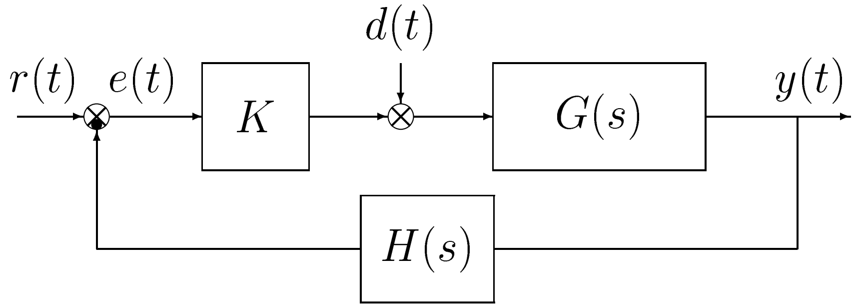


- Un sistema $G(s)$ è **instabile** se ha almeno un polo a parte reale positiva, oppure a parte reale nulla con grado di molteplicità ≥ 2.



Il criterio di Routh

- Si faccia riferimento al seguente sistema dinamico retroazionato:



- La funzione di trasferimento $G_0(s)$ del sistema retroazionato è:

$$G_0(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)H(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Equazione caratteristica del sistema retroazionato

$$1 + K\,G(s)H(s) = 0$$

- La stabilità del sistema retroazionato è univocamente determinata dalla posizione sul piano complesso dei poli della funzione $G_0(s)$, cioè dagli zeri dell'equazione caratteristica.

- Per determinare se $G_0(s)$ è stabile o meno, in realtà non è necessario sapere la posizione esatta dei poli, è sufficiente sapere se essi si trovano o meno tutti a sinistra dell'asse immaginario.

- Il criterio di Routh permette di determinare se un sistema retroazionato è stabile senza dover calcolare esattamente la posizione delle radici stesse.

- Si ponga l'equazione caratteristica in forma polinomiale:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

con $a_n > 0$ e $a_0 \neq 0$

- *Condizione <u>necessaria</u> affinchè le radici dell'equazione caratteristica abbiano tutte parte reale negativa è che tutti i coefficienti siano positivi*

$$a_n > 0, \quad a_{n-1} > 0, \quad \ldots, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$$

- Data l'equazione caratteristica

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

- La **Tabella di Routh** si costruisce nel modo seguente:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
n & a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & & a_{n-6} \\
 & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
n-1 & a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & & a_{n-7} \\
n-2 & b_{n-2} & & b_{n-4} & & b_{n-6} & & \ldots \\
n-3 & c_{n-3} & & c_{n-5} & & \ldots & &
\end{array}$$

dove

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \qquad b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \quad \ldots$$

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}}, \qquad c_{n-5} = \frac{b_{n-2}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-6}}{b_{n-2}}, \quad \ldots$$

- **Criterio di Routh**: *ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella di Routh corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa. (C.N.S.)*

- Esempio:

$$s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0 \qquad \rightarrow \qquad (s+1)(s-2)(s-3) = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc}
3 & 1 & 1 & 0 \\
2 & -4 & 6 & 0 \\
1 & \frac{-4-6}{-4} = 2.5 & 0 & \\
0 & \frac{2.5\cdot 6}{2.5} = 6 & &
\end{array}$$

Vi sono due variazioni di segno per cui l'equazione ha due radici a parte reale positiva.

- Esempio:

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 2 & 3 & 10 \\
3 & 1 & 5 & 0 \\
2 & -7 & 10 & \\
1 & \frac{45}{7} & 0 & \\
0 & 10 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\ \\ \\
\text{2 variazioni} \quad \rightarrow \\
\text{2 radici a parte reale negativa}
\end{array}$$

- Il criterio di Routh rimane valido anche se si moltiplica **tutti** i termini di una stessa riga per un coefficiente **positivo**

$$4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 4 & 5 & 1 \\
3 & 3 & 2 & 0 \\
2 & 7 & 3 & \\
1 & 5 & 0 & \\
0 & 3 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\ \\
\leftarrow \quad \text{non si è diviso per 3} \\
\leftarrow \quad \text{non si è diviso per 7} \\
\\
\end{array}$$

Tutte le radici sono a parte reale negativa.

- <u>Casi Particolari</u>: a) Se il primo termine di una riga è nullo:

$$s^3 + 3s - 2 = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 3 \\
2 & \epsilon & -2 \\
1 & 2 & \\
0 & -2 &
\end{array}
\quad (3\epsilon + 2)_{\epsilon \to 0}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 3 \\
2 & -\epsilon & -2 \\
1 & -2 & \\
0 & -2 &
\end{array}
\quad \left(\frac{-3\epsilon + 2}{-\epsilon}\right)_{\epsilon \to 0}$$

Lo zero viene sostituito con una quantità ϵ positiva (o negativa) che poi si fa tendere a zero.

- Casi Particolari: b) Tutti i termini di una riga sono nulli.

  Una situazione di questo tipo può accadere solamente in una riga dispari, per esempio la $(2m-1)$-esima riga:

$$\begin{array}{r|cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2m & b_{2m} & b_{2m-2} & \dots & b_0 \\ 2m-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}$$

  Le variazioni e le permanenze della tabella fino alla riga $2m$ determinano univocamente le prime $n-2m$ radici dell'equazione data.

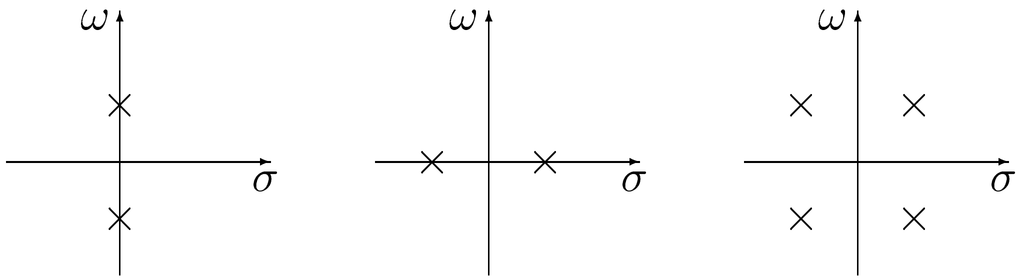
  Le altre $2m$ radici dell'equazione si detreminano come soluzioni della seguente equazione ausiliaria:

$$b_{2m}s^{2m} + b_{2m-2}s^{2m-2} + \dots + b_2 s^2 + b_0 = 0$$

  Ponendo $z = s^2$ si ottiene una equazione di grado m.

- Le soluzioni dell'equazione ausiliaria sono un sottoinsieme delle soluzioni dell'equazione caratteristica di partenza.

- Le $2m$ radici dell'equazione ausiliaria sono sempre simmetriche rispetto all'origine del piano complesso:



  Quindi ad ogni radice a parte reale positiva corrisponde una redice a parte reale negativa.

- Se l'equazione caratteristica è di ordine > 4, l'equazione ausiliaria non è direttamente risolubile per cui si deriva l'equazione ausiliaria, i coefficienti del polinomio ottenuto si sostituiscono alla riga tutta nulla e si procede nella costruzione della tabella di Routh.

- Esempio:

$$s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

Le prime due radici: 1 a parte reale negativa (permanenza) e 1 a parte reale positiva (variazione). L'equazione ausiliaria è

$$-2s^2 + 2 - 0 \qquad \rightarrow \qquad s_1 = 1, \;\; s_2 = -1$$

Derivando è possibile proseguire nella costruzione della tabella:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & -2 & 2 \\ \hline 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & \end{array}$$

Una permanenza e una variazione di segno $\rightarrow$ una radice a parte reale negativa e una a parte reale positiva.

- Esempio:

$$s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -2 & -7 & -4 \\ 5 & 1 & -3 & -4 & \\ 4 & 1 & -3 & -4 & \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Equazione ausiliaria:

$$s^4 - 3s^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ -1 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad s = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ -2 \\ j \\ -j \end{array} \right.$$

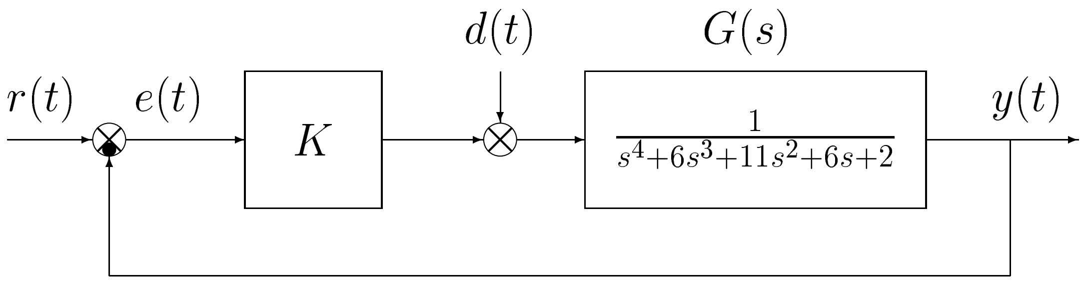
- Allo stesso risultato si giunge derivande l'equazione caratteristica:

$$
\begin{array}{c|rrr}
4 & 1 & -3 & -4 \\
\hline
3 & 4 & -6 & \\
2 & -6 & -16 & \\
1 & -100 & 0 & \\
0 & -16 & &
\end{array}
$$

  Avvertenza: dopo aver derivato l'equazione ausiliaria, le permanenze che non sono "bilanciate" da un uguale numero di variazioni debbono essere interpretate come radici appartenenti all'asse immaginario (per la simmetria delle radici dell'equazione ausiliaria).

- Il criterio di Routh, essendo un criterio necessario e sufficiente, è molto utile per determinare le condizioni di stabilità al variare di un parametro qualsiasi presente all'interno dell'equazione caratteristica.

- Esempio:



- Funzione di trasferimento del sistema retroazionato:

$$G_0(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)}$$

- Equazione caratteristica:

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K + 2 = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 11 & K+2 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & K+2 & \\ 1 & 48-6K & 0 & \\ 0 & K+2 & & \end{array}$$

Condizioni per la stabilità asintotica:

$$48 - 6K > 0, \qquad K + 2 > 0$$

Il sistema, quindi, risulta asintoticamente stabile per i seguenti valori di K:

$$-2 < K < 8$$

Per i valori limite si ha stabilità semplice: per $K = -2$ un polo è nell'origine; per $K = 8$ il sistema ha due poli complessi coniugati sull'asse immaginario.

Il criterio di Routh è lo strumento più semplice ed efficacie per calcolare "esattamente" le condizioni di stabilità di un sistema retroazionato al variare dei parametri del sistema stesso. È bene ricordare che:

- Il criterio di Routh *è un criterio necessario e sufficiente* per cui i risultati da esso forniti sono "esatti".
- L'analisi di stabilità può essere fatta rispetto ad un parametro qualsiasi del sistema e non solo al variare del guadagno K. È possibile eseguire l'analisi di stabilità anche al variare di più parametri contemporaneamente.
- Nella costruzione della tabella di Routh è possibile moltiplicare tutti gli elementi di una riga per lo stesso valore "positivo" senza modificare i risultati dell'analisi di stabilità.
- Se nella costruzione della tabella si ottiene una riga tutta nulla (può accadere solo per una riga dispari), gli zeri dell'equazione ausiliaria che si ottiene dalla riga precedente (riga pari) sono un sottoinsieme degli zeri dell'equazione caratteristica di partenza. Le soluzioni dell'equazione ausiliaria sono simmetriche rispetto all'origine cioè sono simmetriche sia rispetto all'asse reale che all'asse immaginario.
- L'utilizzo del criterio di Routh permette di determinare anche le pulsazioni ω delle oscillazioni periodiche che si instaurano nel sistema retroazionato in corrispondenza dei valori limite dei parametri per quanto riguarda la stabilità.

Analisi di stabilità di alcuni semplici sistemi

1) Un sistema che si incontra molto frequentemente nello studio dei sistemi dinamici è il seguente:

$$G_1(s) = \frac{\alpha}{s(s+a)(s+b)}$$

L'equazione caratteristica del corrispondente sistema retroazionato è:

$$s^3 + (a+b)s^2 + a\,b\,s + \alpha K = 0$$

Dalla tabella di Routh

$$\begin{array}{r|ll} 3 & 1 & ab \\ 2 & a+b & \alpha K \\ 1 & (a+b)ab - \alpha K & \\ 0 & \alpha K & \end{array}$$

si determina immediatamente che il sistema retroazionato è stabile per $0 < K < K^*$. Il valore limite K^* e la corrispondente pulsazione ω^* sono i seguenti:

$$K^* = \frac{(a+b)ab}{\alpha}, \qquad \omega^* = \sqrt{ab}$$

In questo caso il valore limite K^* coincide con il margine di ampiezza $M_\alpha = K^*$ del sistema.

2) Per il sistema

$$G_2(s) = \frac{(s+c)}{s(s+a)(s+b)}$$

si ha invece l'equazione caratteristica

$$s^3 + (a+b)s^2 + (a\,b + K)\,s + K\,c = 0$$

da cui si ricava la tabella di Routh

$$\begin{array}{r|ll} 3 & 1 & ab+K \\ 2 & a+b & K\,c \\ 1 & (a+b)(ab+K) - K\,c & \\ 0 & K\,c & \end{array}$$

In questo caso, il sistema retroazionato è stabile per $0 < K < K^*$ se $c > a+b$, e per $K > 0$ se $c < a+b$. I valori di K^* ed ω^* corrispondenti alla stabilità critica sono:

$$K^* = \frac{(a+b)ab}{c-a-b}, \qquad \omega^* = \sqrt{\frac{abc}{c-a-b}}$$

Calcolo della pulsazione limite ω^*

Relativamente al calcolo della pulsazione limite ω^*, vale la seguente proprietà.
Sia data un'equazione caratteristica del terzo ordine

$$a_3(K)s^3 + a_2(K)s^2 + a_1(K)s + a_0(K) = 0$$

dove i coefficienti $a_i(K)$ $(i = 0, \dots, 3)$ sono funzioni di un parametro variabile K. La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\boxed{\omega^* = \sqrt{\frac{a_0(K^*)}{a_2(K^*)}} = \sqrt{\frac{a_1(K^*)}{a_3(K^*)}}}$$

Nel caso invece in cui l'equazione caratteristica sia del quarto ordine:

$$a_4(K)s^4 + a_3(K)s^3 + a_2(K)s^2 + a_1(K)s + a_0(K) = 0$$

la pulsazione ω^* si determina utilizzando la seguente formula:

$$\boxed{\omega^* = \sqrt{\frac{a_1(K^*)}{a_3(K^*)}}}$$

Infatti, nel caso di equazione caratteristica del terzo ordine, la tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|cc}
3 & a_3(K) & a_1(K) \\
2 & a_2(K) & a_0(K) \\
1 & a_2(K)a_1(K) - a_0(K)a_3(K) & \\
0 & a_0(K) &
\end{array}$$

In corrispondenza del valore limite K^* il coefficiente della riga 1 si annulla, per cui si ha

$$a_2(K*)a_1(K^*) - a_0(K^*)a_3(K^*) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{a_0(K^*)}{a_2(K*)} = \frac{a_1(K^*)}{a_3(K^*)} \tag{1}$$

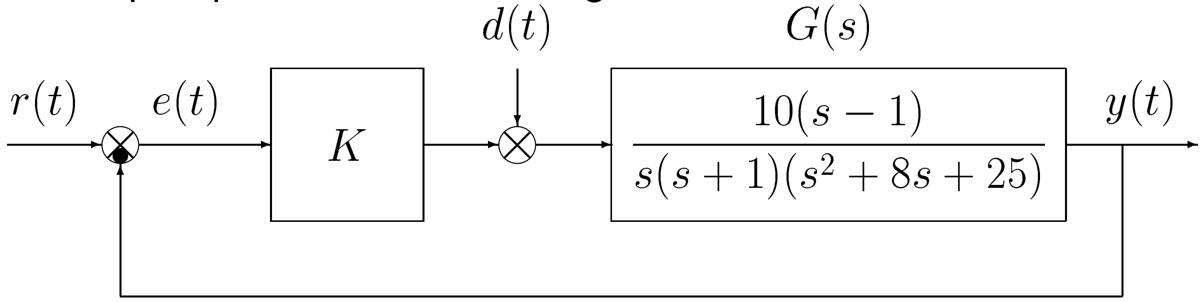
La pulsazione ω^* si determina utilizzando l'equazione ausiliaria (riga 2):

$$a_2(K^*)s^2 + a_0(K^*) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \omega^* = \sqrt{\frac{a_0(K^*)}{a_2(K^*)}} \tag{2}$$

La relazione fornita si ottiene combinando tra loro le relazioni (1) e (2).

Esempio

Determinare per quali valori di K il seguente sistema retroazionato



è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema è

$$1 + \frac{10K(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)} = 0$$

cioè

$$s^4 + 9s^3 + 33s^2 + (25 + 10K)s - 10K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 33 & -10K \\ 3 & 9 & 25+10K & \\ 2 & 272-10K & -90K & \\ 1 & (272-10K)(25+10K)+810K & & \\ 0 & -90K & & \end{array} \tag{3}$$

Si noti che essendo richiesto solamente lo studio degli intervalli di stabilità al variare di K, nella costruzione della tabella vi può evitare di dividere gli elementi di una riga per il primo coefficiente della riga precedente in quanto tale elemento dovrà necessariamente essere positivo affinchè il sistema retroazionato sia stabile. Per esempio, nella costruzione della tabella (3) la riga 2 non è stata divisa per 9 e la riga 1 non è stata divisa per $272 - 10K$.

In questo caso il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se tutti gli elementi della prima colonna sono positivi, cioè se gli ultimi tre elementi della prima colonna sono positivi:

$$2)\;\; 272 - 10\,K > 0 \qquad 1)\;\; 340 + 164K - 5K^2 > 0 \qquad 0)\;\; -90\,K > 0$$

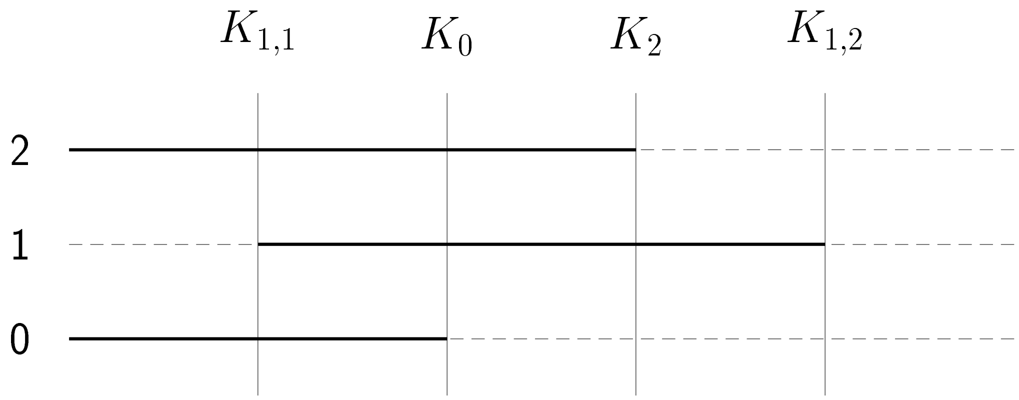
Questi tre elementi si annullano per i seguenti valori di K:

$$2)\;\; K_2 = 27.2, \quad 1)\;\; K_{1,*} = \begin{cases} K_{1,1} = \frac{164-\sqrt{33696}}{10} = -1.956 \\ K_{1,2} = \frac{164+\sqrt{33696}}{10} = 34.7565 \end{cases} \quad 0)\;\; K_0 = 0$$

Si ha quindi stabilità asintotica se valgono le seguenti tre disequazioni:

$$2)\;\; K < K_2 \qquad 1)\;\; K_{1,1} < K < K_{1,2} \qquad 0)\;\; K < K_0$$

La rappresentazione grafica di queste tre disequazioni è la seguente:



Da tale figura risulta chiaro che l'unico intervallo di stabilità al variare di K è:

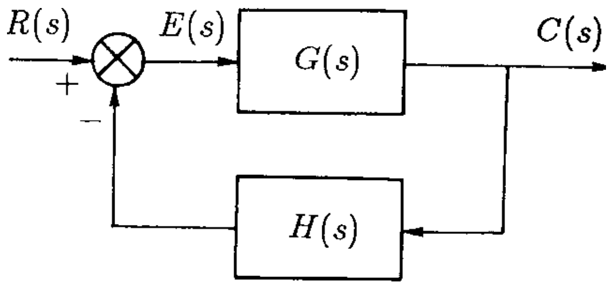
$$K_{1,1} < K < K_0 \qquad \leftrightarrow \qquad -1.956 < K < 0$$

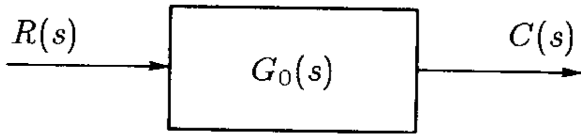
La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K_{1,1}$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{a_1(K_{1,1})}{a_3}} = \sqrt{\frac{25 + 10K_{1,1}}{9}} = 0.7771$$

Proprieà generali dei sistemi in retroazione

- Sistema in retroazione e sua forma minima:





- Significato dei simboli:

  $r(t)$: *segnale di riferimento* (o "set point");

  $c(t)$: *variabile controllata*;

  $e(t)$: *segnale errore*;

  $G(s)$: *funzione di trasferimento del percorso diretto*;

  $H(s)$: *funzione di trasferimento del percorso in retroazione*);

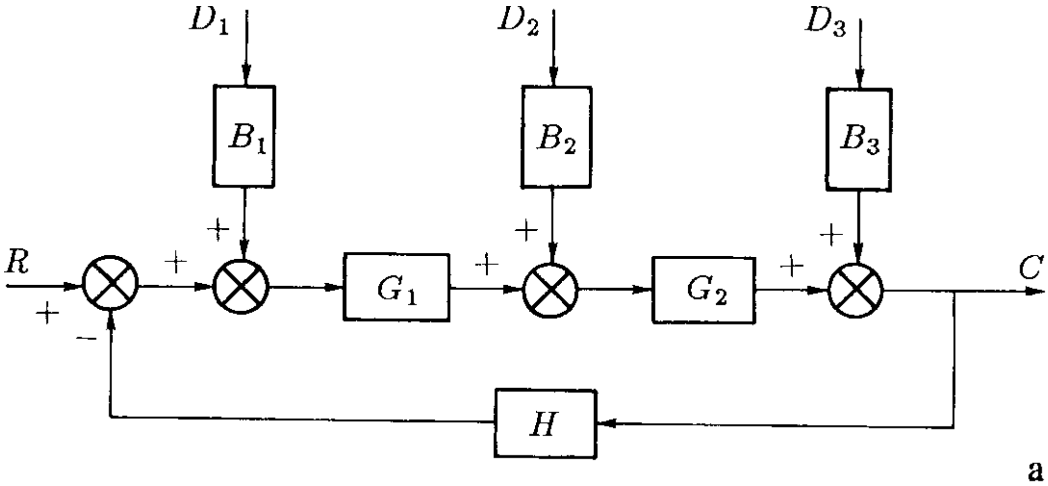
  $G(s)\,H(s)$: *guadagno di anello.*

- Funzione di trasferimento del sistema in forma minima:

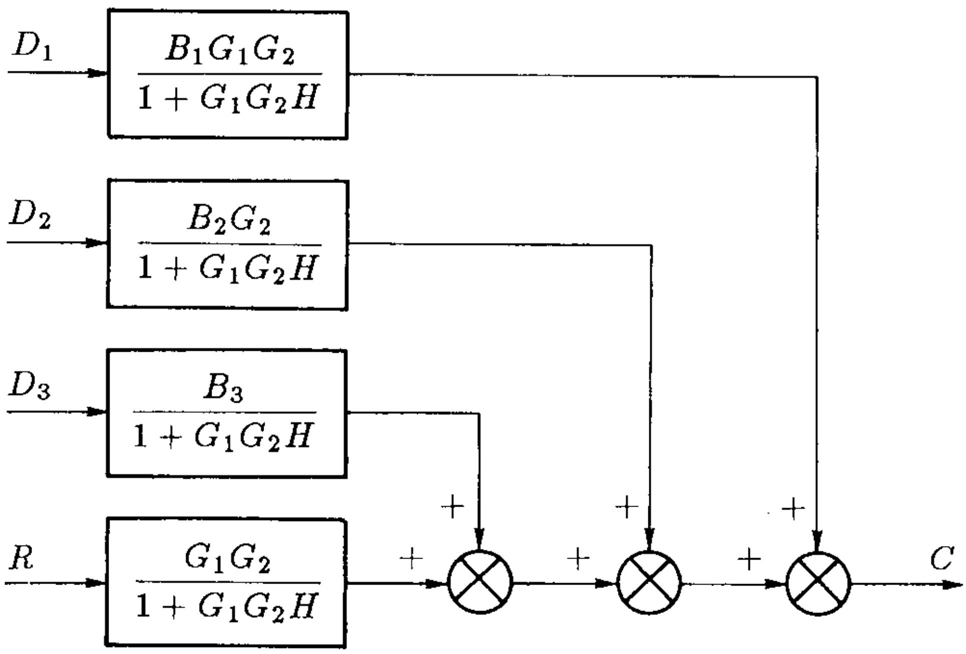
$$G_0(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)\,H(s)}$$

- Questa è la situazione teorica in assenza di disturbi e di variazioni parametriche

- Spesso accade che si abbiano sistemi a più ingressi (per esempio ingressi di disturbo) agenti in vari punti dell'anello.
- In questo caso la riduzione in forma minima viene fatta nel modo seguente:



a)



b)

- Nota: tutte le funzioni di trasferimento hanno lo stesso denominatore.

Sensibilità alla variazione di parametri

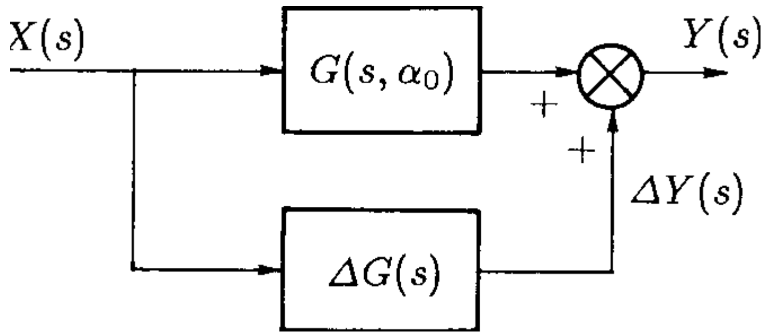
- Sia α un parametro della funzione di trasferimento $G(s)$ che subisca una piccola variazione $\Delta\alpha$ rispetto al valore nominale α_0. Sia $G(s,\alpha_0)$ la funzione di trasferimento "nominale". La nuova funzione di trasferimento si può scrivere, in prima approssimazione

$$G(s,\alpha_0+\Delta\alpha) = G(s) + \Delta G(s)$$

in cui per semplicità di notazione si è posto

$$G(s) = G(s,\alpha_0)\ , \quad \Delta G(s) = \left.\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha$$

- Se il sistema è soggetto a un segnale d'ingresso la cui trasformata sia $X(s)$, la variazione del parametro porta a una variazione dell'uscita la cui trasformata, in prima approssimazione, può esprimersi come $\Delta Y(s) = \Delta G(s)\, X(s)$.



- Nei sistemi in retroazione, l'effetto della variazione di un parametro è diverso a seconda che si verifichi nella catena di amplificazione diretta o nel percorso di retroazione.

- Una variazione della funzione di trasferimento della catena di amplificazione diretta $G(s)$ produce una variazione della funzione di trasferimento complessiva $G_0(s)$ molto minore,

- Una variazione della funzione di trasferimento del percorso di retroazione $H(s)$ produce in $G_0(s)$ una variazione dello stesso ordine di grandezza.

- In presenza della variazione $\Delta\alpha$ di un parametro della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto $G(s)$ si ha

$$\begin{aligned}\Delta G_0(s) &= \frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{G}{1+G\,H}\right)\frac{\partial G}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha \\ &= \frac{1}{\left(1+G(s)\,H(s)\right)^2}\,\Delta G(s)\ ,\end{aligned}$$

- Per le variazioni relative vale la relazione

$$\boxed{\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)\,H(s)}\,\frac{\Delta G(s)}{G(s)}}$$

- Per tutte le pulsazioni per le quali vale la condizione

$$|G(j\omega)\,H(j\omega)| \gg 1\ ,$$

si ha che

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

- L'errore relativo dovuto alla variazione di un parametro di $G(s)$ e per le frequenze per le quali il guadagno di anello è sufficientemente elevato è molto minore nel sistema in retroazione che non nel sistema ad anello aperto.

- Nel caso di una variazione $\Delta\beta$ di un parametro di $H(s)$ si ha invece che:

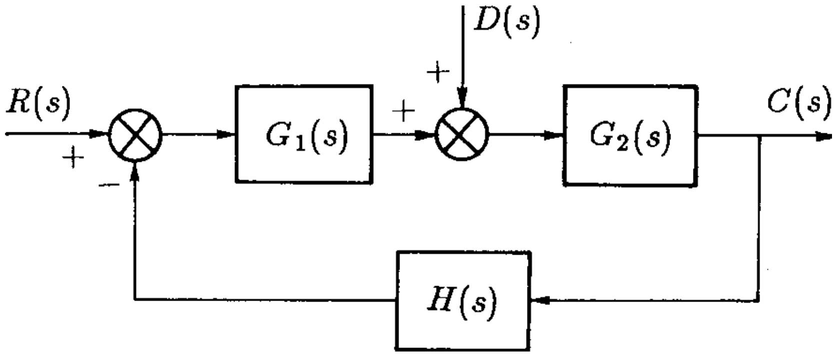
$$\boxed{\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{-G(s)\,H(s)}{1+G(s)\,H(s)}\,\frac{\Delta H(s)}{H(s)}}$$

cioè gli errori relativi sono dello stesso ordine di grandezza.

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} \simeq \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

• Sensibilità ai disturbi

- Sia $d(t)$ un disturbo che agisce in un punto della catena di amplificazione diretta, in un sistema di controllo in retroazione



- In assenza e in presenza di retroazione le trasformate della variazione dell'uscita dovuta al disturbo sono rispettivamente

$$\begin{aligned} C'_d(s) &= G_2(s)\, D(s)\ , \\ C''_d(s) &= \frac{G_2(s)}{1+G(s)\,H(s)}\, D(s)\ , \quad \text{con } G(s){=}G_1(s)\, G_2(s)\ . \end{aligned}$$

- I rapporti segnale/disturbo all'uscita valgono rispettivamente

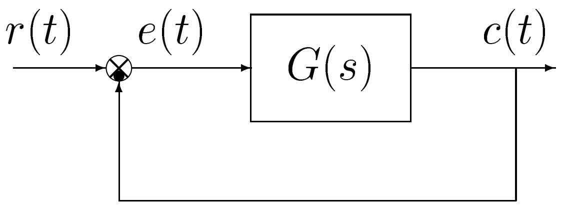
$$\begin{aligned} \frac{C'_r(s)}{C'_d(s)} &= \frac{G_0(s)}{G_2(s)}\, \frac{R(s)}{D(s)}\ , \\ \frac{C''_r(s)}{C''_d(s)} &= \big(1+G(s)\,H(s)\big)\, \frac{G_0(s)}{G_2(s)}\, \frac{R(s)}{D(s)} \end{aligned}$$

- In presenza di retroazione il rapporto segnale/disturbo viene modificato nel rapporto di 1 a $|1{+}G(j\omega)\,H(j\omega)|$ e pertanto fortemente aumentato se nella banda di frequenza del disturbo vale la relazione

$$|G(j\omega)\,H(j\omega)| \gg 1$$

Errori a regime

- Si faccia riferimento al seguente schema a retroazione unitaria:



Nel caso di segnali di ingresso a gradino, a rampa e a parabola:

$$r(t) = R_0 u(t) \qquad r(t) = R_0 t \qquad r(t) = \frac{R_0}{2} t^2$$

per il calcolo degli <u>errori a regime</u> si utilizzano le seguenti formule:

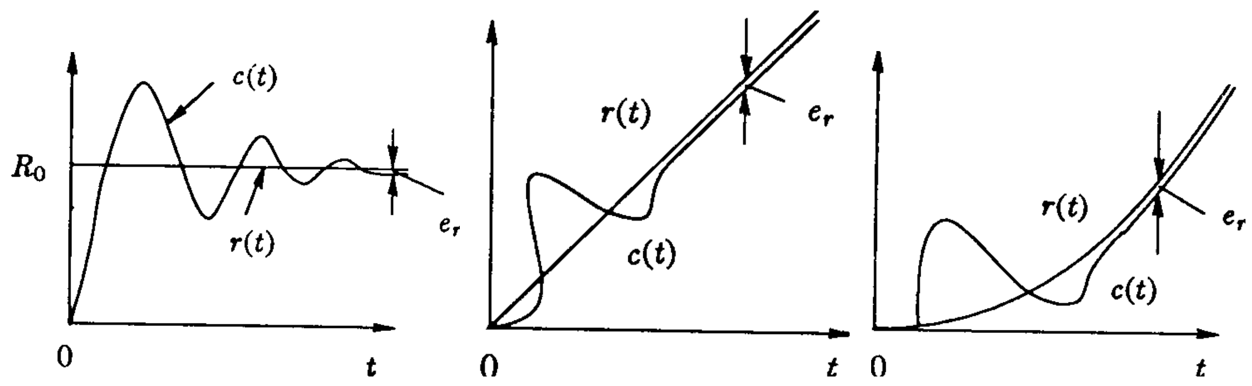
$$\boxed{e_p = \frac{R_0}{1+K_p}}, \qquad \boxed{e_v = \frac{R_0}{K_v}}, \qquad \boxed{e_a = \frac{R_0}{K_a}}$$

dove K_p, K_v e K_a:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s), \qquad K_v = \lim_{s \to 0} sG(s), \qquad K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

sono le costanti di posizione, di velocità e di accelerazione.

- Andamenti temporali.



- Ingresso a gradino:

$$e_r = \frac{R_0}{1 + K_p} \; . \tag{4.28}$$

Se il sistema è di tipo 0, è $K_p = K$, cioè la costante di posizione coincide con il guadagno statico; se esso è di tipo 1 o 2 è $K_p = \infty$ e l'errore di posizione a regime è nullo: ciò è intuitivo perché in tali sistemi il guadagno di anello per pulsazione nulla è infinito.

- Ingresso a rampa:

$$e_r = \frac{R_0}{K_v} \; . \tag{4.31}$$

Se il sistema è di tipo 0, si ha $K_v = 0$ e quindi l' errore a regime nella risposta alla rampa è infinito; se esso è di tipo 1, si ha $K_v = K$ e l'errore è R_0/K, se è di tipo 2, si ha $K_v = \infty$ e l'errore è nullo.

- Ingresso a parabola:

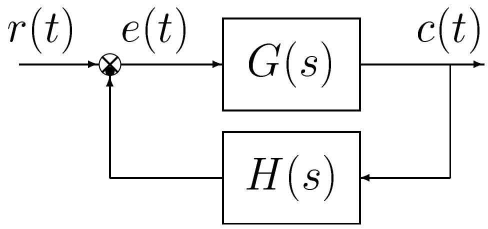
$$e_r = \frac{R_0}{K_a} \; . \tag{4.34}$$

Se il sistema è di tipo 0 o di tipo 1, si ha $K_a = 0$, e quindi l'errore è infinito; se è di tipo 2, si ha $K_a = K$, e quindi l'errore è pari a R_0/K.

- Principio del modello interno: affinché sia neutralizzato (con errore nullo a regime) un modo corrispondente ad un polo nell'origine di ordine h, occorre generare lo stesso modo nel regolatore, che pertanto deve avere un polo nell'origine pure di ordine h o superiore, cioè contenere un modello del sistema elementare $1/s^h$ che genera quel modo.

Il criterio di Nyquist

- Il criterio di Nyquist consente di stabilire se un sistema, del quale si conosce la risposta armonica ad anello aperto, sia stabile o meno una volta chiuso in retroazione:



$$F(s) = G(s)H(s)$$

- Per la sua natura sostanzialmente grafica, esso risulta di notevole ausilio per il progettista perché, oltre a fornire indicazione sulla stabilità del sistema in retroazione costituisce anche un'utile guida per giudicare dell'efficacia di possibili interventi che migliorino il comportamento dinamico del sistema in retroazione.

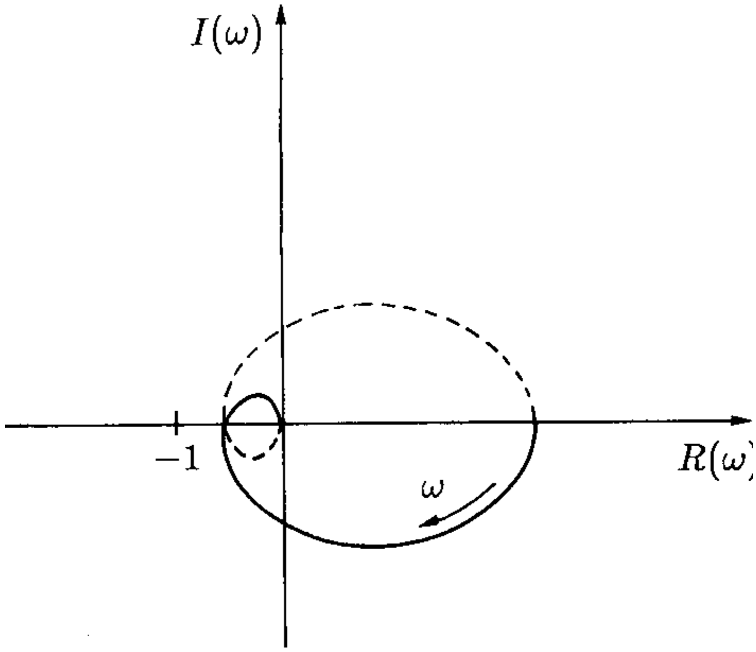
- **Criterio di Nyquist: sistemi stabili ad anello aperto.** *Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ non circondi né tocchi il punto critico $-1+j0$.*

- Il criterio di Nyquist fa riferimento ai diagrammi polari "completi", cioè tracciati per ω variabile da $-\infty$ a $+\infty$. Essendo

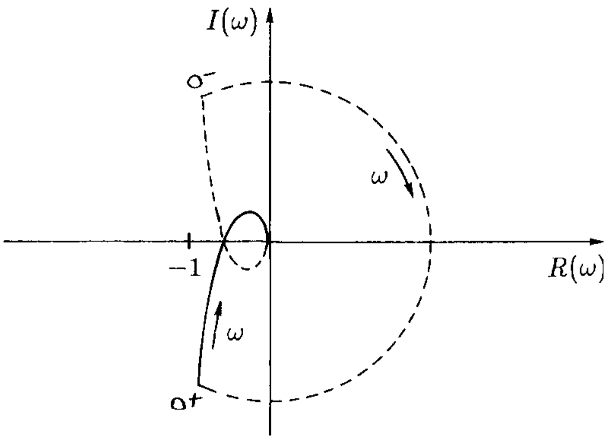
$$F(-j\omega) = F^*(j\omega)$$

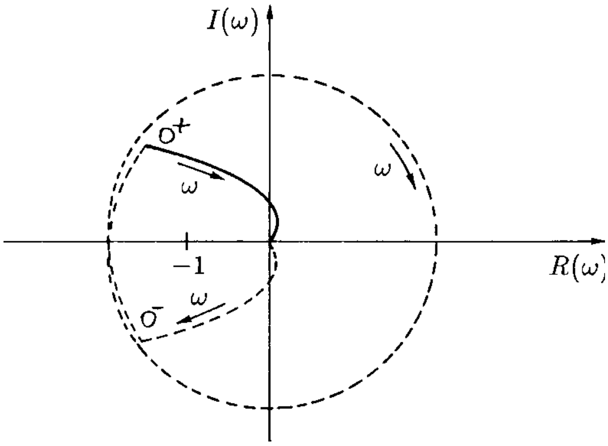
il diagramma per pulsazioni negative si ottiene per ribaltamento intorno all'asse delle ascisse di quello tracciato per pulsazioni positive.

- Nel caso di un sistema di tipo 0, il diagramma polare competo è una curva chiusa;



- Nei casi di sistemi di tipo 1 o di tipo 2 (che presentano rami all'infinito) si conviene di completare i diagrammi, rispettivamente, con una semicirconferenza e con una circonferenza all'infinito percorsa in senso orario che parte da $\omega = 0_-$ ed arriva ad $\omega = 0_+$



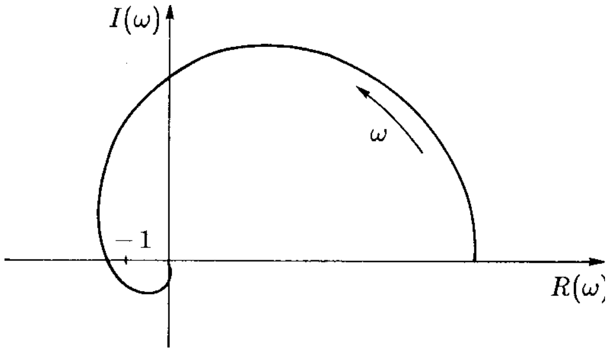


- Il precedente enunciato del criterio di Nyquist è quello che copre la maggior parte dei casi di interesse. Si può dare tuttavia il seguente enunciato più generale, che si applica anche al caso in cui il sistema in esame sia instabile ad anello aperto.

- **Criterio di Nyquist: sistemi instabili ad anello aperto, con un eventuale polo nell'origine semplice o doppio.** *Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.*

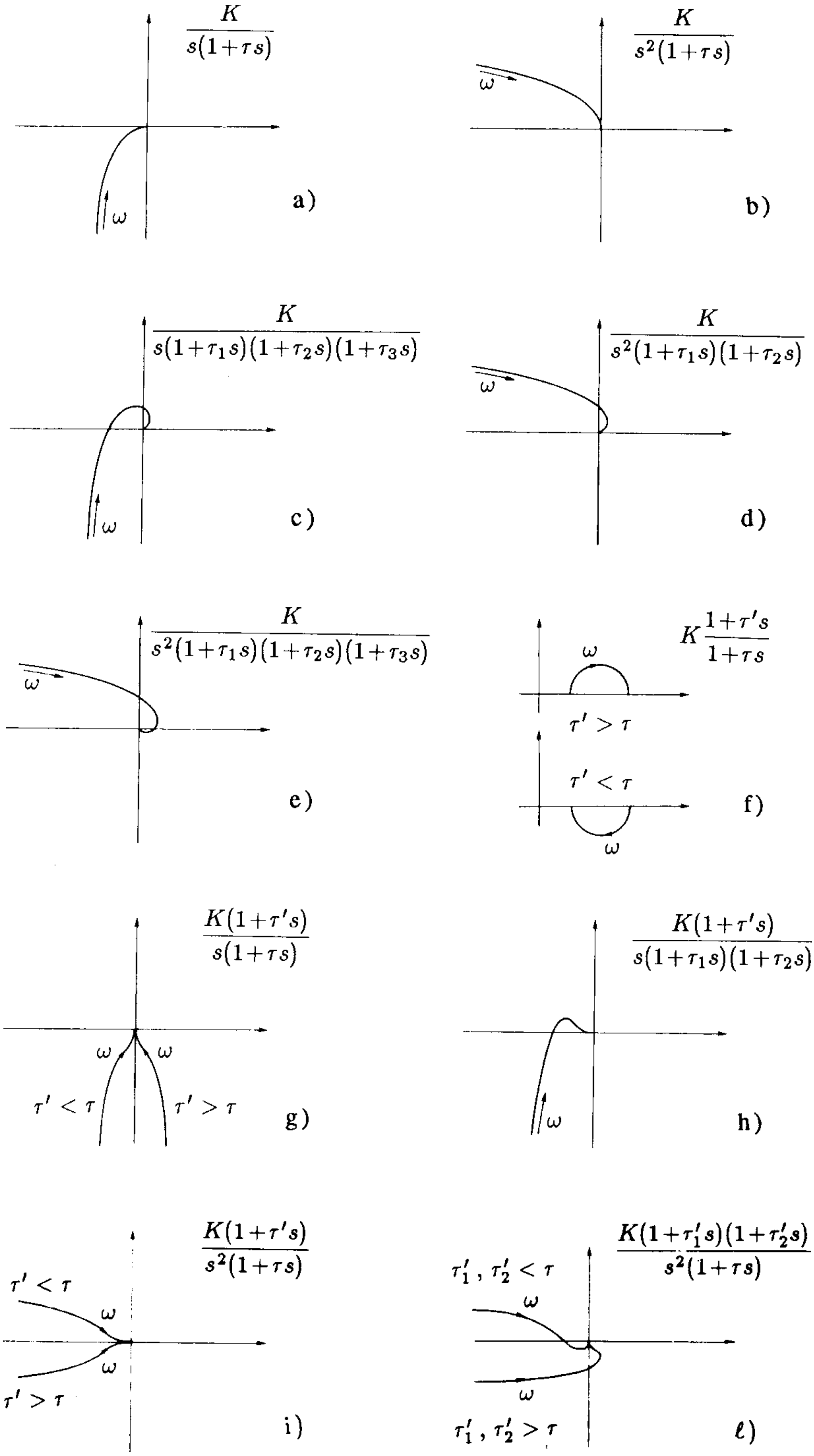
- Ogni giro in meno in senso antiorario o ogni giro in più in senso orario corrisponde alla presenza, nel sistema in retroazione, di un polo con parte reale positiva.

- **Esempio** Si consideri un sistema in retroazione:



$$F(s) = \frac{K\,(1+\tau\, s)}{(1-\tau_1\, s)\,(1-\tau_2\, s)}$$

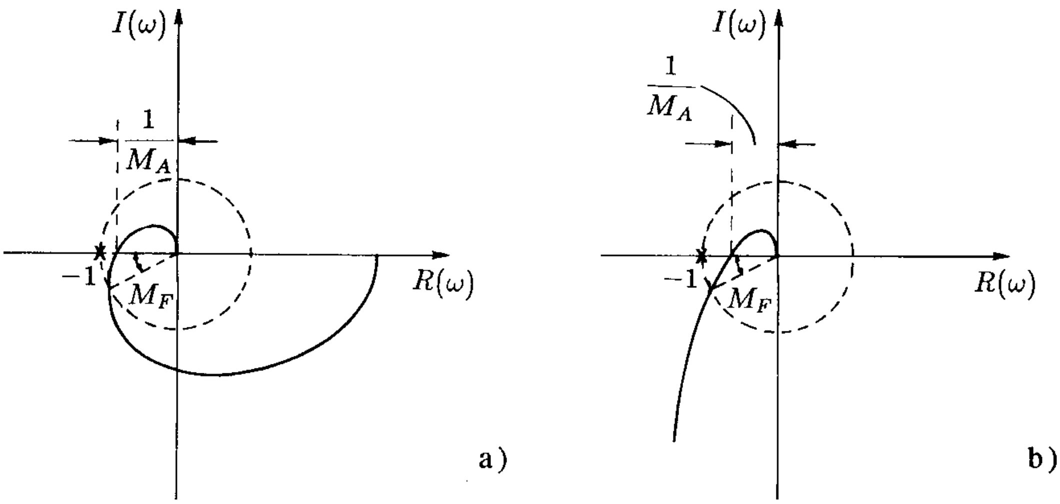
Se il punto critico viene circondato (due volte in senso antiorario), il che avviene per valori elevati della costante K, il sistema in retroazione è stabile, dato che il guadagno di anello presenta due poli con parte reale positiva. Se invece il punto critico non viene circondato, il che avviene per valori relativamente bassi della costante K, il sistema in retroazione è instabile.


$\frac{K}{s(1+\tau s)}$
ω
a)
$\frac{K}{s^2(1+\tau s)}$
ω
b)
$\frac{K}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$
ω
c)
$\frac{K}{s^2(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$
ω
d)
$\frac{K}{s^2(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$
ω
e)
$K\frac{1+\tau' s}{1+\tau s}$
ω
$\tau' > \tau$
$\tau' < \tau$
ω
f)
$\frac{K(1+\tau' s)}{s(1+\tau s)}$
ω
ω
$\tau' < \tau$
$\tau' > \tau$
g)
$\frac{K(1+\tau' s)}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$
ω
h)
$\frac{K(1+\tau' s)}{s^2(1+\tau s)}$
$\tau' < \tau$
ω
ω
$\tau' > \tau$
i)
$\frac{K(1+\tau_1' s)(1+\tau_2' s)}{s^2(1+\tau s)}$
$\tau_1', \tau_2' < \tau$
ω
ω
$\tau_1', \tau_2' > \tau$
ℓ)

Margini di ampiezza e di fase

- Quando il diagramma di Nyquist di un sistema in retroazione ha un andamento regolare, con ampiezza funzione monotòna decrescente della pulsazione ω, si può dedurre da esso informazione non solo sulla stabilità del sistema, ma anche sulla sua maggiore o minore criticità o tendenza all'instabilità.

- È infatti evidente che, quanto più il diagramma di Nyquist di un sistema stabile ad anello aperto si svolge lontano dal punto critico, tanto più lontano dall' instabilità è il sistema: la vicinanza del diagramma di Nyquist al punto critico è normalmente associata ad un comportamento dinamico non soddisfacente.

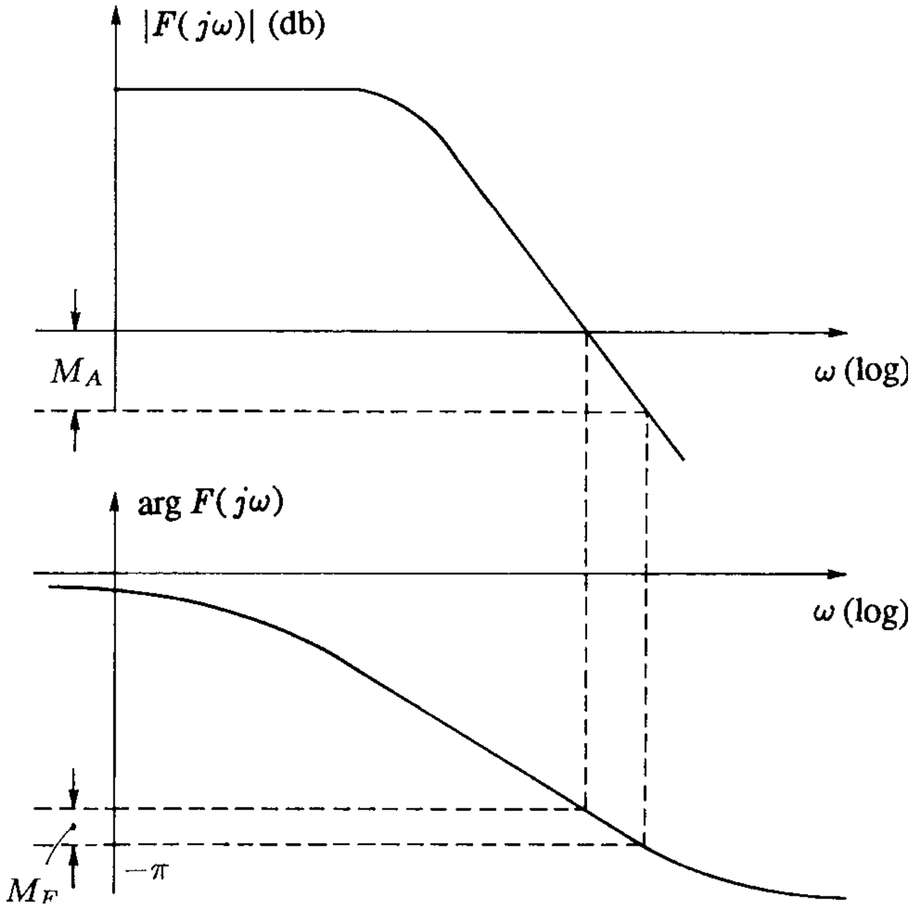


- Per quantificare la "distanza" di $G(j\omega)$ dal punto critico -1, si utilizzano due parametri, detti *margini di stabilità*, che misurano la cosiddetta "stabilità relativa" dei sistemi in retroazione:

  – *Margine di ampiezza* M_A: è l'inverso del modulo del guadagno di anello alla pulsazione corrispondente alla fase $-\pi$;

  – *Margine di fase* M_F: è l'angolo che occorre sottrarre alla fase (normalmente negativa) del guadagno di anello alla pulsazione corrispondente al valore unitario del modulo (detta *pulsazione di intersezione* pulsazione di intersezione o *di incrocio*) per ottenere il valore $-\pi$.

- Margini di ampiezza e fase nei diagrammi di Bode



- Margini di ampiezza e fase nei diagrammi di Nichols