Controlli Automatici - Primo Compito
23 Maggio 2002 - Soluzione Esercizi

Compito Nr. $a =$ $b =$

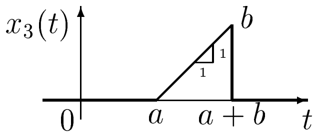
Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 10\, e^{bt} \sin(a\, t) \quad \rightarrow \quad X_1(s) = 10 \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$$

$$x_2(t) = b\, t^4\, e^{-a\, t} \quad \rightarrow \quad X_2(s) = b \frac{24}{(s+a)^5}$$



$$\rightarrow \quad X_3(s) = e^{-as}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-bs} - \frac{b}{s}e^{-bs}\right)$$

b) La risposta impulsiva é la risposta all'impulso di Dirac e coincide con l'antitrasformata della funzione di trasferimento.

b.1) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle funzioni di trasferimento $G_i(s)$;

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(3+b)s + 60 + ab}{(s+20)(s+a)} \quad \rightarrow \quad g_1(t) = 3\, e^{-a\, t} + b\, e^{-20\, t}$$

$$G_2(s) = \frac{20}{(s-a)^2 + b} \quad \rightarrow \quad g_2(t) = \frac{20}{\sqrt{b}}\, e^{at}\, \sin(\sqrt{b}\, t)$$

$$G_3(s) = \frac{5b}{(s+a)^2} \quad \rightarrow \quad g_3(t) = 5\, b\, t\, e^{-at}$$

b.2) Calcolare, in termini di ingresso $x(t)$ e di uscita $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla funzione $G_1(s)$;

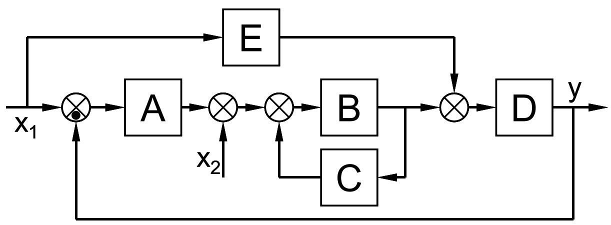
$$[s^2 + (20+a)s + 20a)]Y(s) = [(3+b)s + 60 + ab]X(s)$$

$$\ddot{y}(t) + (20+a)\dot{y}(t) + 20a\, y(t) = (3+b)\dot{x}(t) + (60+ab)x(t)$$

c) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X_1(s)} = \frac{ED(1-BC) + ABD}{1 + ABD - BC}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{X_2(s)} = \frac{BD}{1 + ABD - BC}$$



d) La funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{4\,(s^2 + 40s + 2500)}{s(1+\frac{s}{a})(s+100b)}$$

può essere scritta nella forma poli-zeri:

$$G(s) = \frac{4a\,(s^2 + 40s + 2500)}{s(s+a)(s+100b)}$$

o nella forma a costanti di tempo:

$$G(s) = \frac{100}{b} \frac{(1 + \frac{4s}{250} + \frac{s^2}{2500})}{s(1 + \frac{s}{a})(1 + \frac{s}{100b})}$$

d.1) I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono riportati in Fig.1 per $a = 8$ e $b = 5$. Per la coppia di zeri complessi e coniugati la pulsazione naturale è $\omega_n = 50$ rad/sec e il coefficiente di smorzamento è $\delta = 0.4$. Il guadagno β del diagramma asintotico delle ampiezze in corrispondenza della prima pulsazione critica $\omega_1 = a$ risulta:

$$\beta = \frac{100}{b\,a}$$

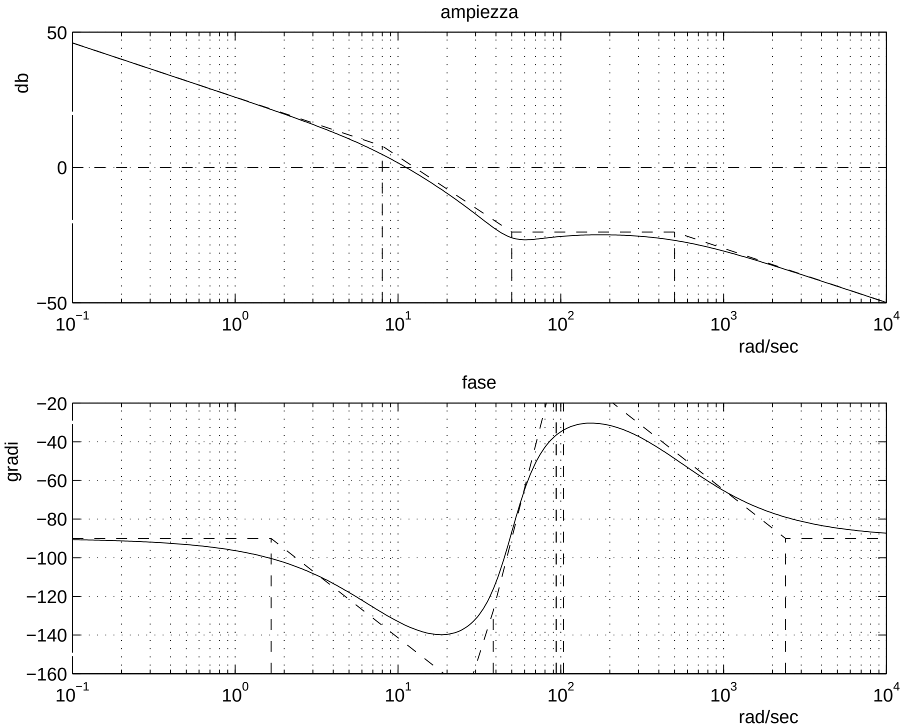


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G(s)$ per $a = 8$ e $b = 5$

d.2) Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in Fig.2 per i parametri $a = 8$ e $b = 5$. La somma delle costanti di tempo risulta:

$$\Delta_a = \frac{4}{250} - \frac{1}{a} - \frac{1}{100b}$$

Dato che $G(s)$ ha un polo nell'origine, il diagramma di Nyquist presenta un asintoto verticale la cui ascissa σ_a è:

$$\sigma_a = K\,\Delta_a = \frac{100}{b}\left(\frac{4}{250} - \frac{1}{a} - \frac{1}{100b}\right)$$

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ il cui diagramma di Nichols é mostrato in figura.

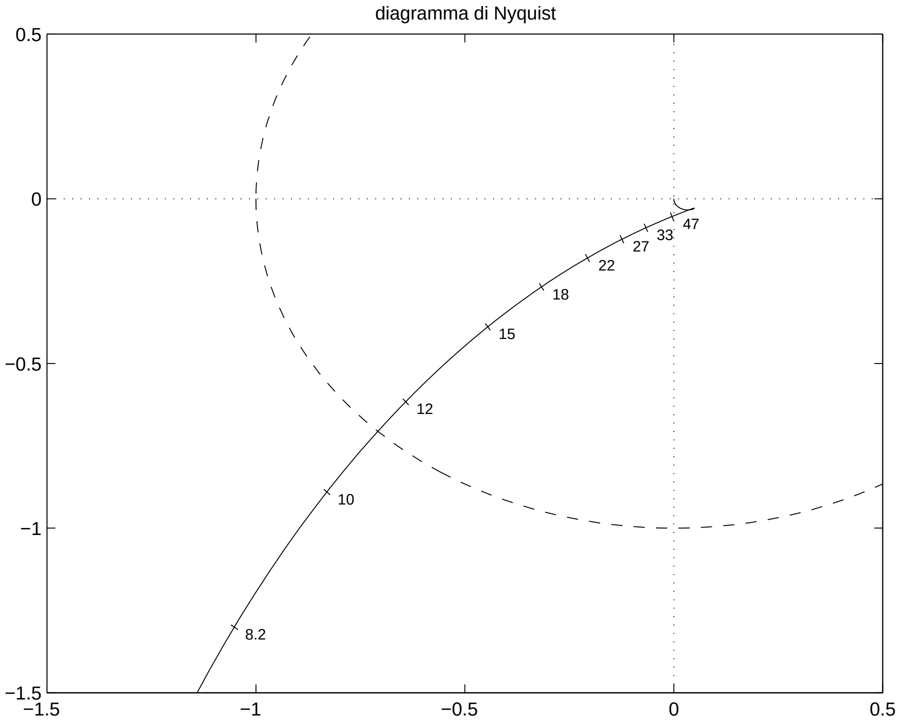
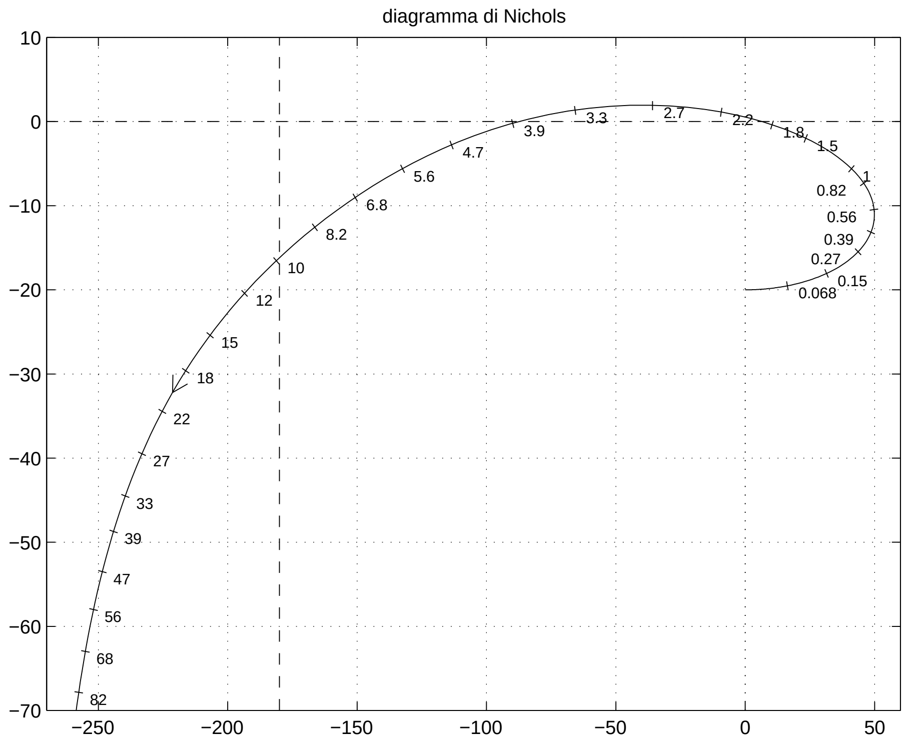


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 8$ e $b = 5$



e.1) La risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = b + 3\sin(a\,t + \pi/4)$ si ottiene sfruttando la sovrapposizione degli effetti. Il guadagno statico del sistema è $G(0) = -20db = 0.1$. Per $\omega = a$ dal diagramma si ricavano i valori $|G(j\,a)|$ e $\arg[G(j\,a)]$. Risulta quindi:

$$y_\infty(t) = G(0)b + 3|G(j\,a)|\,\sin(a\,t + \pi/4 + \arg[G(j\,a)])$$

Per esempio per a=8:

$$y_\infty(t) \simeq 0.1b + 3 \cdot 0.25\,\sin(8\,t + \pi/4 - 165^o)$$

e.2) $|G(j\,0)| = 0.1$
$\arg[G(j\,0)] = 0$
$|G(j\,\infty)| = 0$
$\arg[G(j\,\infty)] = -270^o$

e.3) Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è riportato in Fig. 3.

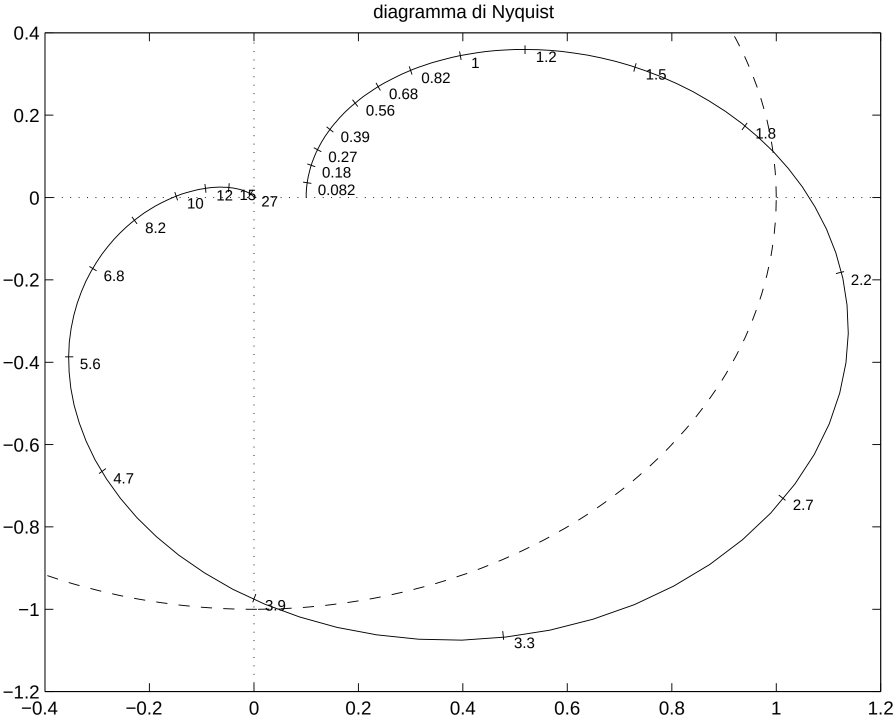


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ dell'esercizio e

f) Si consideri la risposta al gradino unitario del sistema a poli dominanti $G(s)$ (ignoto) riportata sotto. La scala dei tempo per alcuni compiti era tra 0 e 30 secondi, tra parentesi si riportano le risposte in questo secondo caso.

f.1) Il guadagno statico è $G_0 = 10$;

f.2) la massima sovraelongazione percentuale $S\% = 38\%$;

f.3) il coefficiente di smorzamento $\delta \simeq 0.3$;

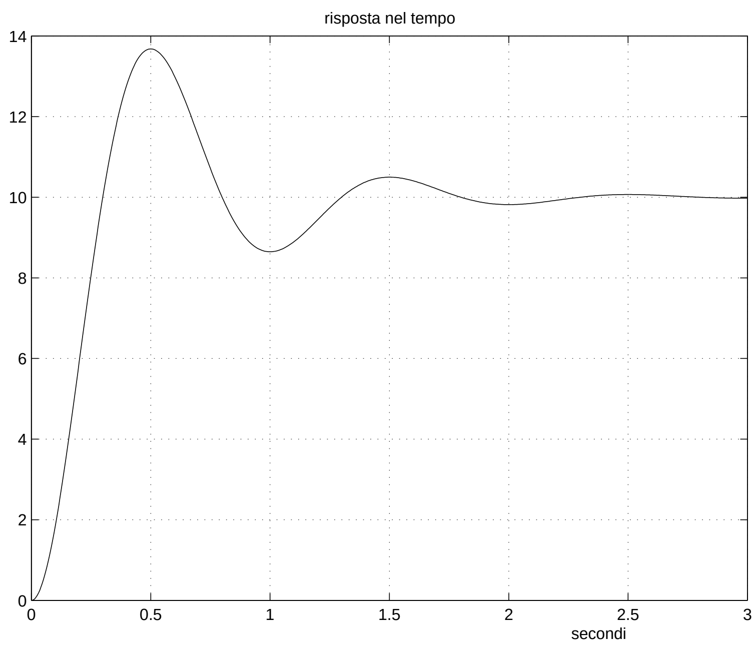
f.4) il periodo dell'oscillazione smorzata è $T = 1s$ ($T = 10s$) pertanto $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ ($\omega = 2\pi/10$);

f.5) la pulsazione naturale ω_n si calcola come $\omega_n = \frac{\omega}{\sqrt{1-\delta^2}} = 6.59$ ($\omega_n = 0.659$);

f.6) il tempo di assestamento $T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = 1.5s$ ($T_a = 15s$);

f.7) La parte reale della coppia di poli complessi e coniugati è $\sigma = \delta\omega_n = 2$ ($\sigma = 0.2$), la posizione dei poli dominanti risulta quindi $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -2 \pm j\,2\pi$ ($p_{1,2} = -0.2 \pm j\,2\pi/10$);

Risposta del sistema al gradino unitario:



Controlli Automatici - Primo Compito
23 Maggio 2002 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. L'equazione differenziale $\ddot{y}(t) = -3y^2(t) + x(t)$ (dove $x(t)$ è l'ingresso e $y(t)$ è l'uscita)

   ○ è lineare
   ⊗ è stazionaria (cioè tempo-invariante)

2. In un sistema del 2^o ordine, la distanza dei poli dall'origine (a parità di direzione) influisce sui seguenti parametri del sistema:

   ○ coefficiente di smorzamento δ
   ⊗ pulsazione naturale ω_n
   ○ massima sovraelongazione $S\%$
   ⊗ tempo di assestamento T_a

3. Il diagramma di Nyquist del sistema $G(s) = \frac{1-\tau s}{1+\tau s}$ è:

   ○ un tratto di retta orizzontale
   ○ un tratto di retta verticale
   ⊗ un tratto di circonferenza

4. In scala logaritmica naturale (relativamente alla pulsazione), la pendenza γ del diagramma di Bode delle fasi della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{1-j\tau\omega}$ nel punto $\omega = \frac{1}{\tau}$ è

   ○ $\gamma = 1$
   ⊗ $\gamma = \frac{1}{2}$
   ○ $\gamma = 4.81$

5. Nel diagramma di Nyquist del sistema $G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$, la fase iniziale per $\omega \to 0^+$

   ⊗ è positiva
   ○ è negativa

6. Il sistema dinamico $G(s) = \frac{3(s+1)}{s+3}$

   ⊗ ha un guadagno statico unitario
   ○ ha guadagno unitario alle elevate frequenze ($\omega \to \infty$)
   ⊗ ha una fase positiva per tutte le pulsazioni

7. Si ponga la funzione $\sin 2t$ in ingresso al sistema $G(s) = \frac{1}{s+1}$. A regime, l'ampiezza A della sinusoide $A\sin(2t+\varphi)$ in uscita vale

   ○ $A = 2/5$
   ○ $A = 2/\sqrt{5}$
   ⊗ $A = 1/\sqrt{5}$

8. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli

   ⊗ su di una retta parallela all'asse immaginario
   ○ su di una circonferenza con centro nell'origine
   ○ su di una retta uscente dall'origine
   ○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine

9. La massima sovraelongazione in % del sistema $G(s) = \frac{1}{1+s^2}$ in risposta ad un gradino unitario è

   ○ $S = 0\,\%$
   ○ $S = 10\,\%$
   ⊗ $S = 100\,\%$

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze una pendenza di $-40\,db/decade$ quando $\omega \to \infty$. La fase φ del sistema per $\omega \to \infty$ è

   ○ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
   ⊗ $\varphi = -\pi$
   ○ $\varphi = -2\pi$

11. Per $\omega > 0$, il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega}$ coincide con il diagramma "asintotico"

   ⊗ per nessun valore di ω al finito
   ○ in un solo punto al finito $\omega = 1/\tau$
   ○ per tutti i valori di ω

12. Un sistema del secondo ordine privo di zeri e caratterizzato da una coppia di poli complessi coniugati con coefficiente di smorzamento nullo ($\delta = 0$):

   ⊗ ha un picco di risonanza infinito $M_R \to \infty$
   ○ ha un picco di risonanza unitario $M_R = 1$
   ⊗ ha un guadagno statico finito

13. Calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y} + 2\ddot{y} + 5\dot{y} + 4\,y = \ddot{x} + 3\,x \qquad \to \qquad G(s) = \frac{s^2+3}{s^3+2s^2+5s+4}$$

14. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione della coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ corrispondente all'andamento temporale $g_1(t) = 8\,e^{-2t}\sin(7t+0.6)$:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -2 \pm j7$$

15. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente ad un ritardo puro t_0:

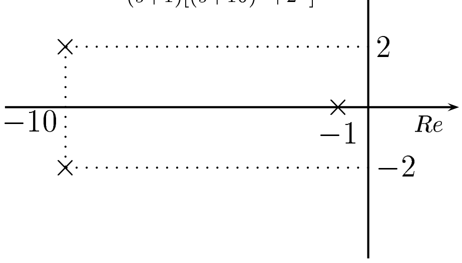
$$G(s) = e^{-t_0 s}$$

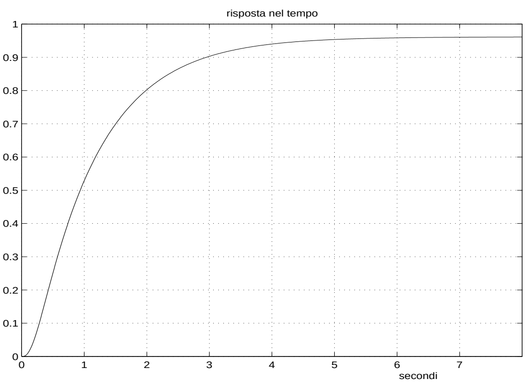
16. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+}$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{3s^2+4s+1}{s(s^2+5s+7)} \qquad \to \qquad y_0 = 3; \qquad y_\infty = \frac{1}{7};$$

17. Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G_1(s)$. Calcolare il guadagno statico $K_0 = 0.9615$ e fornire una stima del tempo di assestamento $T_a = 3$ s.

$G_1(s) = \frac{100}{(s+1)[(s+10)^2+2^2]}$





Controlli Automatici - Primo Compito
23 Maggio 2002 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. Nel diagramma di Nyquist del sistema $G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$, la fase iniziale per $\omega \to 0^+$

   ○ è negativa

   ⊗ è positiva

2. Il sistema dinamico $G(s) = \frac{3(s+1)}{s+3}$

   ⊗ ha un guadagno statico unitario

   ⊗ ha una fase positiva per tutte le pulsazioni

   ○ ha guadagno unitario alle elevate frequenze ($\omega \to \infty$)

3. Si ponga la funzione $\sin 2t$ in ingresso al sistema $G(s) = \frac{1}{s+1}$. A regime, l'ampiezza A della sinusoide $A \sin(2t + \varphi)$ in uscita vale

   ⊗ $A = 1/\sqrt{5}$

   ○ $A = 2/\sqrt{5}$

   ○ $A = 2/5$

4. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli

   ○ su di una retta uscente dall'origine

   ○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine

   ⊗ su di una retta parallela all'asse immaginario

   ○ su di una circonferenza con centro nell'origine

5. L'equazione differenziale $\ddot{y}(t) = -3y(t) + x(t)$ (dove $x(t)$ è l'ingresso e $y(t)$ è l'uscita)

   ⊗ è lineare

   ⊗ è stazionaria (cioè tempo-invariante)

6. In un sistema del 2^o ordine, la distanza dei poli dall'origine (a parità di direzione) influisce sui seguenti parametri del sistema:

   ○ coefficiente di smorzamento δ

   ○ massima sovraelongazione $S\%$

   ⊗ pulsazione naturale ω_n

   ⊗ tempo di assestamento T_a

7. Il diagramma di Nyquist del sistema $G(s) = \frac{1-\tau s}{1+\tau s}$ è:

   ⊗ un tratto di circonferenza

   ○ un tratto di retta verticale

   ○ un tratto di retta orizzontale

8. In scala logaritmica naturale (relativamente alla pulsazione), la pendenza γ del diagramma di Bode delle fasi della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{1-j\tau\omega}$ nel punto $\omega = \frac{1}{\tau}$ è

   ⊗ $\gamma = \frac{1}{2}$

   ○ $\gamma = 1$

   ○ $\gamma = 4.81$

9. Per $\omega > 0$, il diagramma “reale” di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega}$ coincide con il diagramma “asintotico”

   ◯ per tutti i valori di ω

   ⊗ per nessun valore di ω al finito

   ◯ in un solo punto al finito $\omega = 1/\tau$

10. Un sistema del secondo ordine privo di zeri e caratterizzato da una coppia di poli complessi coniugati con coefficiente di smorzamento nullo ($\delta = 0$):

   ⊗ ha un guadagno statico finito

   ⊗ ha un picco di risonanza infinito $M_R \to \infty$

   ◯ ha un picco di risonanza unitario $M_R = 1$

11. La massima sovraelongazione in % del sistema $G(s) = \frac{1}{1+s^2}$ in risposta ad un gradino unitario è

   ◯ $S = 0\,\%$

   ◯ $S = 10\,\%$

   ⊗ $S = 100\,\%$

12. Un sistema $G(s)$ a fase minima presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze una pendenza di $-40\,db/decade$ quando $\omega \to \infty$. La fase φ del sistema per $\omega \to \infty$ è

   ⊗ $\varphi = -\pi$

   ◯ $\varphi = -\frac{3\pi}{2}$

   ◯ $\varphi = -2\pi$

13. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente ad un ritardo puro t_0:

$$G(s) = e^{-t_0 s}$$

14. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+}$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{4s^2+5s+2}{s(s^2+6s+8)} \qquad \to \qquad y_0 = 4; \qquad y_\infty = \frac{1}{4};$$

15. Calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + 6\dot{y} + 5\,y = \ddot{x} + 4\,x \qquad \to \qquad G(s) = \frac{s^2+4}{s^3+3s^2+6s+5}$$

16. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione della coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ corrispondente all’andamento temporale $g_1(t) = 9\,e^{-3t}\sin(8t+0.7)$:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -3 \pm j8$$

17. Disegnare l’andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G_1(s)$. Calcolare il guadagno statico $K_0 = 2$ e fornire una stima del tempo di assestamento $T_a = 3$ s.

$G_1(s) = \frac{100}{(s+10)[(s+1)^2+2^2]}$