19 Aprile 2001 - Esercizi

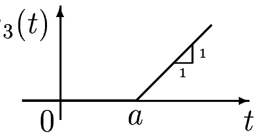
Compito Nr. $a =$

Nr. Mat.	
Firma:	

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a il valore assegnato e si risponda alle domande.

a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 5\, e^{-3t} \cos(a\, t), \qquad x_2(t) = 2\, t^3\, e^{a\, t},$$



b) Date le seguenti funzioni di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{20}{(s+30)(s+a)}, \qquad G_2(s) = \frac{12}{(s+a)^2+9}, \qquad G_3(s) = \frac{a^2}{s^2(s+a)}$$

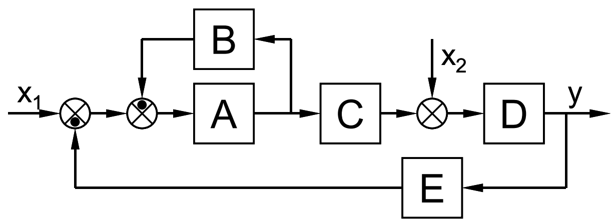
b.1) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle funzioni di trasferimento $G_i(s)$;

b.2) Calcolare, in termini di ingresso $x(t)$ e di uscita $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla funzione $G_1(s)$;

c) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X_1(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{X_2(s)}$$



d) Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1000\, a(s+3)}{s(10\, s+a)(s^2+20\, s+400)}$$

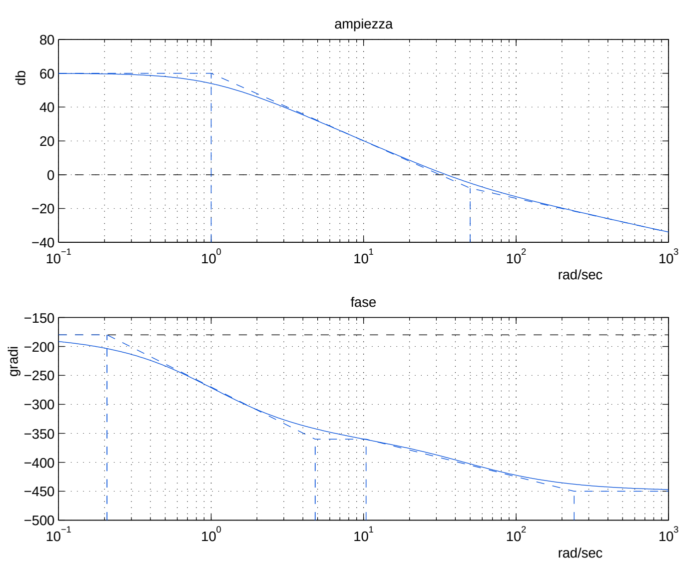
d.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$;

d.2) Tracciare in modo qualitativo il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$ (ricordarsi di chiudere il diagramma all'infinito). Calcolare con precisione la posizione σ_a di un eventuale asintoto;

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura.

e.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale $x(t) = 2 + \sin(a\, t)$;

e.2) Aiutandosi con i diagrammi asintotici di Bode riportati in figura (calcolare le pendenze dei diagrammi), determinare la funzione di trasferimento $G(s)$;



1. Per $\omega > 0$, il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1+j\tau\omega}{1-j\tau\omega}$ coincide con il diagramma "asintotico"

   ○ in nessun punto al finito
   ○ in un solo punto al finito $\omega = 1/\tau$
   ⊗ per tutti i valori di ω

2. Un sistema $G(s)$ a fase minima presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze una pendenza di $-40\,db/decade$ quando $\omega \to \infty$. La fase φ del sistema per $\omega \to \infty$ è

   ○ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
   ⊗ $\varphi = -\pi$
   ○ $\varphi = -2\pi$

3. Per $\omega = 1/\tau$, il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega}$

   ○ ha guadagno unitario
   ○ vale $1/2$
   ⊗ vale $1/\sqrt{2}$
   ○ vale $\simeq 3$ db.

4. I diagrammi di Bode si definiscono

   ⊗ solo per sistemi lineari stazionari
   ○ anche per sistemi lineari non stazionari
   ○ anche per sistemi non lineari

5. Per $\omega > 0$, il diagramma "reale" di Bode delle fasi della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode

   ○ in nessun punto al finito
   ⊗ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$
   ○ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$ e $\omega_b = 4.81\omega_n$

6. L'asintoto verticale σ_a per $\omega \to 0^+$ del diagramma di Nyquist del sistema $G(s) = 4\frac{(1+2s)}{s(2+s)}$ vale

   ○ $\sigma_a = -3$
   ○ $\sigma_a = -2$
   ○ $\sigma_a = +2$
   ⊗ $\sigma_a = +3$

7. Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s+1)}{s^2(s+3)}$

   ○ ha un asintoto verticale
   ○ ha un asintoto orizzontale
   ○ per $\omega = 0^+$ ha una fase iniziale $\varphi \in]0,\, \pi[$
   ⊗ per $\omega = 0^+$ ha una fase iniziale $\varphi \in]\pi,\, 2\pi[$

8. Nel diagramma di Nyquist del sistema $G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$, la fase iniziale per $\omega \to 0^+$

   ⊗ è positiva
   ○ è negativa

a) Si ottengono le seguenti trasformate di Laplace

$$X_1(s) = \frac{5(s+3)}{(s+3)^2+a^2}, \qquad X_2(s) = \frac{12}{(s-a)^4}, \qquad X_3(s) = \frac{e^{-a\,t}}{s^2}$$

b.1) Antitrasformando le funzioni $G_i(s)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{20}{a-30}\left(\frac{1}{s+30} - \frac{1}{s+a}\right)\right] = \frac{20}{a-30}\left(e^{-30\,t} - e^{-a\,t}\right) \\ g_2(t) &= 4\,e^{-a\,t}\sin 3\,t \\ g_3(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a}\right] = a\,t - 1 + e^{-a\,t} \end{aligned}$$

b.2) L'equazione differenziale è la seguente:

$$\ddot{y}(t) + (30+a)\dot{y}(t) + 30\,a y(t) = 20\,x(t)$$

c) La funzione di trasferimento $G(s)$ che descrive il sistema tra l'ingresso $x(t)$ e l'uscita $y(t)$ è la seguente

$$Y(s) = \frac{A\,C\,D}{1+A\,B+A\,C\,D\,E}X_1(s) + \frac{D\,[1+A\,B]}{1+A\,B+A\,C\,D\,E}X_2(s)$$

d.1) La funzione di trasferimento assegnata $G(s)$ può essere messa nella forma polo-zeri:

$$G(s) = \frac{100\,a(s+3)}{s(s+\frac{a}{10})(s^2+20\,s+400)}$$

o nella forma a costanti di tempo:

$$G(s) = \frac{15}{2}\,\frac{(1+\frac{s}{3})}{s(1+\frac{10}{a}\,s)(1+\frac{1}{20}\,s+\frac{s^2}{400})}$$

I diagrammi asintotici di Bode della funzione $G(s)$ per $a = 10$ e per $a = 60$ sono mostrati in Fig. 1 e Fig. 2. Per i due poli complessi coniugati la pulsazione naturale è di ω_n=20 rad/sec ed il coefficiente di smorzamento è $\delta = 0.5$.

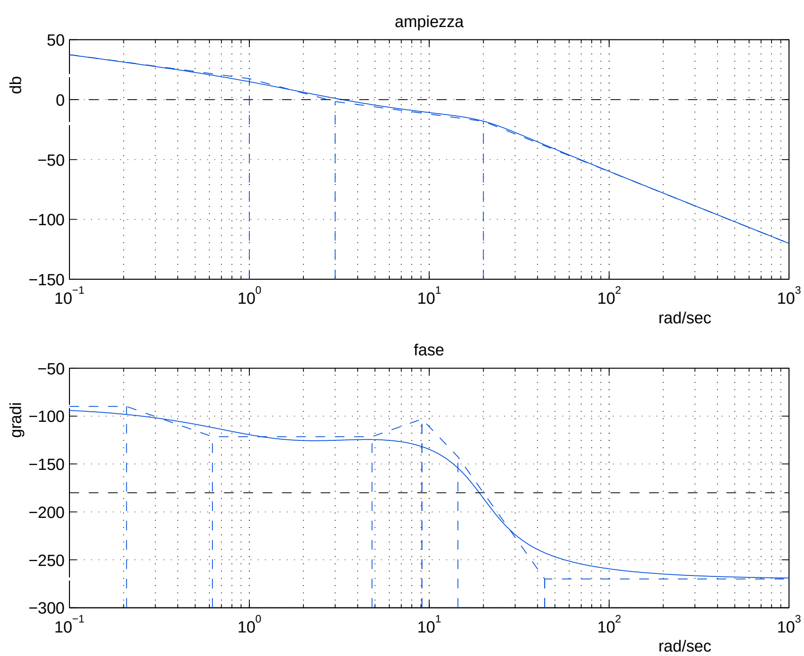


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G(s)$ per $a = 10$.

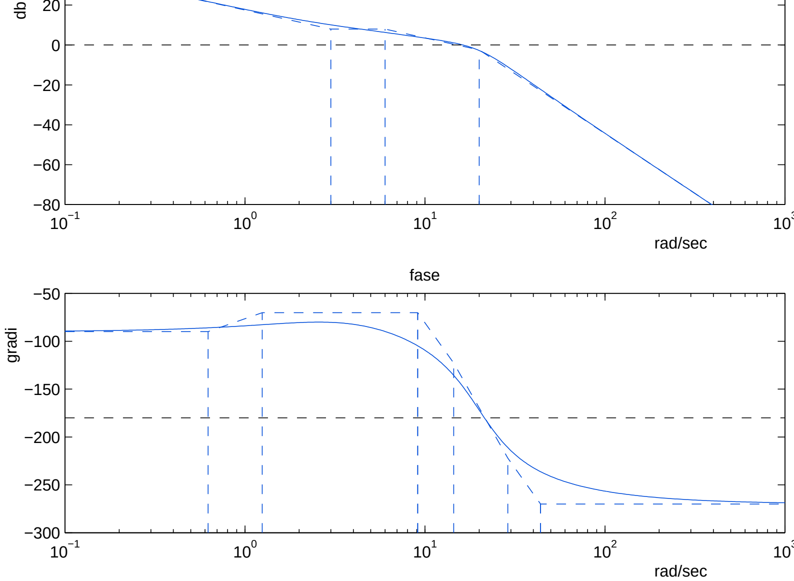


Figura 2: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G(s)$ per $a = 60$.

Il guadagno β del diagramma asintotico delle ampiezze in corrispondenza della prima pulsazione critica ω_1 è il seguente:

$$\beta = \frac{1000\,a\,3}{\omega_1 a\,400} = \frac{15}{2\omega_1} = \begin{cases} \dfrac{5}{2} = 7.96 \text{ db} & \text{per} \qquad \omega_1 = 3 \quad (a > 50) \\[2ex] \dfrac{75}{a} & \text{per} \qquad \omega_1 = \dfrac{a}{10} \quad (a \leq 20) \end{cases}$$

d.2) I diagrammi di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 10$ e per $a = 60$ sono mostrati in Fig. 3 e Fig. 4.

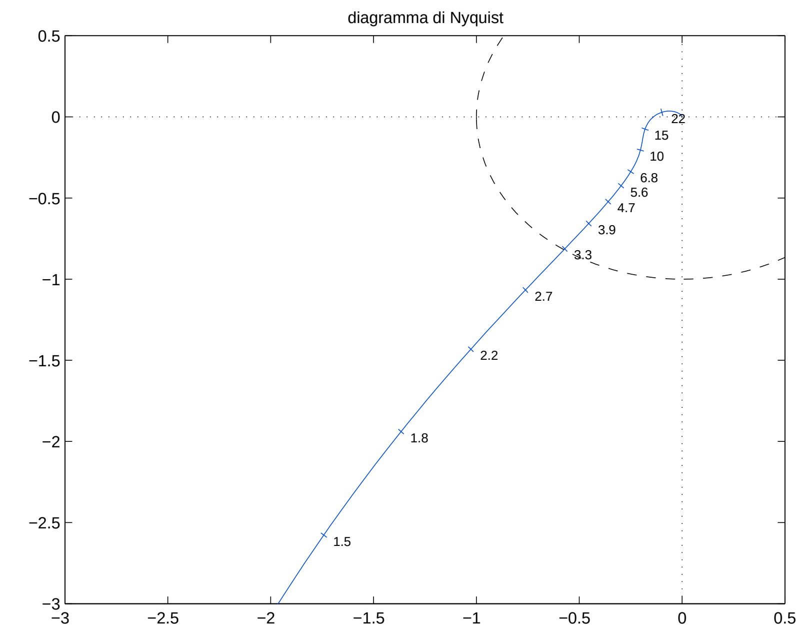


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 10$.

La somma delle costanti di tempo è:

$$\Delta_a = \frac{1}{3} - \frac{10}{a} - \frac{1}{20} = \frac{17a - 600}{60\,a}$$

La posizione σ_a dell'asintoto verticale è la seguente:

$$\sigma_a = K\,\Delta_a = \frac{17\,a - 600}{8\,a}$$

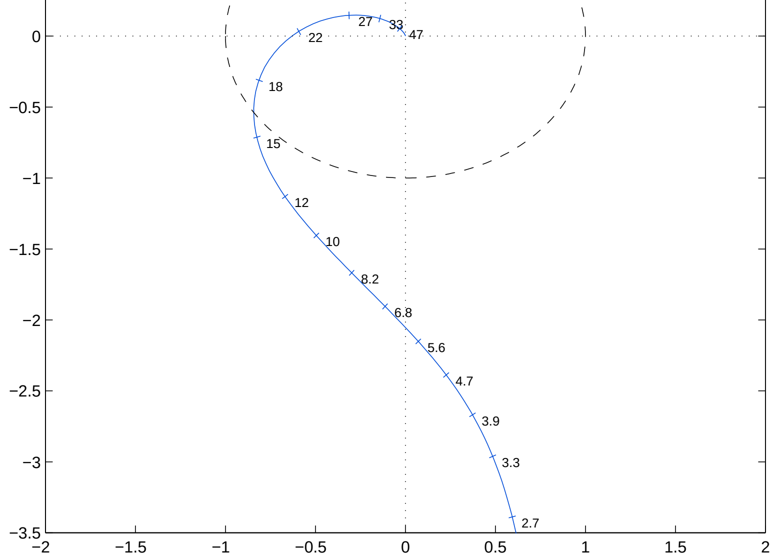


Figura 4: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 60$.

e.1) Per trovare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale $x(t) = 2 + \sin(a\,t)$ si usa la sovrapposizione degli effetti. Il guadagno statico del sistema è $G(0) = -1000$ in quanto, dalla funzione di risposta armonica riportata a fianco, per $\omega = 0$ il modulo è 60 db e la fase è $-\pi$. Per cui al termine $x_1(t) = 2$ corrisponde in uscita il termine $y_\infty(t) = -2000$.

Alla sinusoide $x_2(t) = \sin(a\,t)$ in ingresso corrisponde, a regime, una sinusoide in uscita la cui ampiezza e il cui sfasamento si determinano leggendo sui diagrammi di Bode il guadagno $|G(j\,a)|$ e lo sfasamento $\arg G(j\,a)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = a$:

$$y_\infty(t) = |G(j\,a)| \sin(a\,t + \arg G(j\,a))$$

Per esempio, per a=3 si ha:

$$y_\infty(t) \simeq 100\,\sin(3\,t - 315^o)$$

e.2) La funzione cercata è la seguente:

$$G(s) = \frac{20(s-50)}{(s+1)^2}$$

Infatti:

- il suo guadagno statico è $G(0) = -1000$;
- in corrispondenza di $\omega = 1$ agiscono due poli stabili in quanto la pendenza diventa -40 db/dec e la fase diminuisce di circa 180^o; i due poli sono reali coincidenti in quanto dal diagramma delle fase si ha che $\omega_a \simeq \frac{1}{4.81}$;
- alla pulsazione $\omega = 50$ agisce uno sero instabile in quanto la pendenza del diagramma dei moduli passa da -40 db/dec a -20 db/dec mentre la fase continua a diminuire.

Controlli Automatici - Primo Compito
19 Aprile 2001 - Domande Teoriche

Nr. Mat.:	
Firma:	

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati il coefficiente di smorzamento δ rimane costante al variare della posizione dei poli

   ⊗ su di una retta uscente dall'origine
   ○ su di una retta parallela all'asse immaginario
   ○ su di una circonferenza con centro nell'origine

2. Il diagramma di Bode delle ampiezze della funzione $G(s) = e^{-Ts}$

   ⊗ è una retta orizzontale;
   ○ è una retta dipendenza -20db/decade;
   ○ ha un andamento di tipo esponenziale;
   ○ non è definito;

3. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{s^2+3s+4}{s^3-s^2+2s+2}$ vale

   ○ $g(0^+) = 0$
   ⊗ $g(0^+) = 1$
   ○ $g(0^+) = 2$
   ○ non può essere calcolato utilizzando il teorema del valore iniziale;

4. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{(s-2)^2}{s(s+1)(s+4)}$, il valore finale $g_\infty(t)$ della risposta impulsiva $g(t)$ vale:

   ○ $g_\infty(t) = 0$
   ⊗ $g_\infty(t) = 1$
   ○ $g_\infty(t) = 2$
   ○ non può essere calcolato utilizzando il teorema del valore finale;

5. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha guadagno unitario per $\omega = \omega_n$

   ○ se $\delta = 0$
   ⊗ se $\delta = 0.5$
   ○ se $\delta = 1/\sqrt{2}$
   ○ se $\delta = 1$

6. Il diagramma di Nyquist del sistema $G(s) = e^{-3s}\frac{(s-2)}{s(s+5)}$

   ○ parte dall'asse reale per $\omega = 0_+$;
   ⊗ tende all'origine per $\omega \to \infty$;
   ○ effettua un mezzo giro in senso orario attorno all'origine;
   ⊗ effettua infiniti giri in senso orario attorno all'origine;

7. Per un sistema $G(s)$ del 2^o ordine stabile e privo di zeri, il legame che lega la massima sovraelongazione S al coefficiente di smorzamento δ è:

   ○ $S = 100e^{\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\pi\delta}}$
   ○ $S = 100e^{-\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\pi\delta}}$
   ○ $S = 100e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$
   ⊗ $S = 100e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$

- ○ $\delta = \frac{\sigma}{\omega}$
- ⊗ $\delta = \frac{\sigma}{\omega_n}$
- ○ $\delta = \frac{\omega}{\omega}$
- ○ $\delta = \frac{\omega}{\omega_n}$

9. Siano $g(t)$ ed $f(t)$ le risposte impulsive delle funzioni di trasferimento proprie $G(s)$ ed $F(s)$. Sia $g(t) * f(t)$ l'integrale di convoluzione di $g(t)$ ed $f(t)$.
   - ○ $g(t) * f(t) = \int_0^t g(t+\tau)f(\tau)d\tau$
   - ⊗ $g(t) * f(t) = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$
   - ⊗ $g(t) * f(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)F(s)]$
   - ○ $g(t) * f(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)+F(s)]$

10. Il tempo di assestamento T_a (al 5%) di un sistema del primo ordine $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ è
    - ○ $T_a = \tau$;
    - ○ $T_a = \frac{1}{\tau}$;
    - ⊗ $T_a = 3\tau$;
    - ○ $T_a = \frac{3}{\tau}$;

11. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema lineare $G(s)$ asintoticamente stabile
    - ⊗ determina univocamente la risposta all'impulso $g(t)$
    - ⊗ è determinata univocamente dalla risposta all'impulso $g(t)$
    - ○ non definita se $G(s)$ presenta degli zeri a parte reale positiva

12. La formula di Bode per il calcolo della fase di un sistema a partire dal diagramma delle ampiezze
    - ⊗ è una formula esatta
    - ○ è una formula approssimata
    - ○ è valida per tutti sistemi lineari stabili
    - ⊗ è valida per tutti i sistemi lineari a fase minima

13. Il diagramma di Nichols della funzione $G(s) = \frac{-10}{s^2}$
    - ○ è un punto
    - ⊗ è una retta verticale
    - ○ è una retta orizzontale
    - ○ è una curva

14. Un sistema a poli dominanti è un sistema che presenta una coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$
    - ○ che hanno la parte reale σ molto più negativa rispetto a tutti gli altri poli;
    - ○ che hanno la parte immaginaria ω molto più grande rispetto a tutti gli altri poli;
    - ⊗ che sono molto più vicini all'asse immaginario rispetto a tutti gli altri poli;