Scomposizione in fratti semplici

- La determinazione dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata di un sistema lineare stazionario richiedono l'antitrasformazione di una funzione razionale fratta:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} := \frac{b_m\, s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- La differenza $n-m$ fra i gradi del denominatore e del numeratore prende il nome di *grado relativo* della funzione razionale $F(s)$.

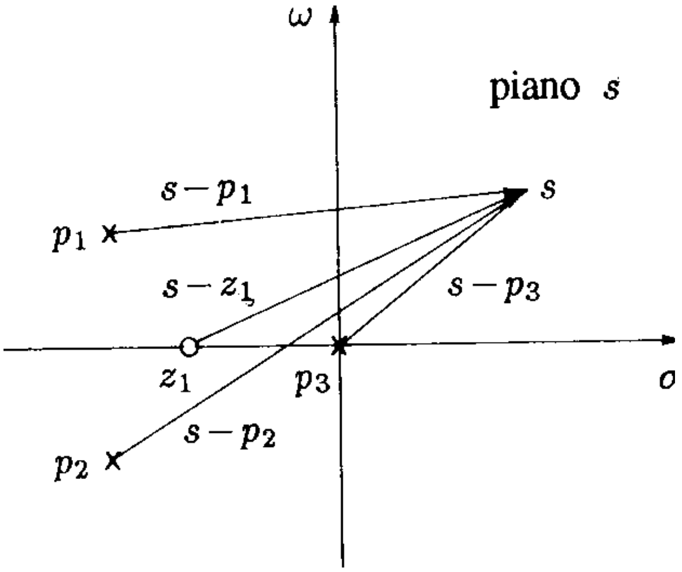
- La funzione $F(s)$ può essere *scomposta in fratti semplici* se è strettamente propria, cioè se presenta una grado relativo almeno pari ad uno.

- La funzione $F(s)$ può essere espressa anche in forma fattorizzata

$$F(s) = K\, \frac{(s-z_1)\,(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

- Le costanti complesse $z_1, \ldots, z_m$ e $p_1, \ldots, p_n$ vengono dette, rispettivamente, *zeri* e *poli* della funzione $F(s)$.

- Valutazione grafica della funzione $F(s)$:



- In relazione all'antitrasformazione si distinguono due casi:
  - *i)* tutti i poli sono *semplici*;
  - *ii)* si hanno poli *multipli*.

- Nel caso di *poli semplici* la funzione può essere scomposta come segue:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\ldots(s-p_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i}$$

- Le costanti K_i (dette *residui*) sono reali in corrispondenza dei poli reali, complesse coniugate in corrispondenza delle coppie di poli complessi coniugati. Esse si ricavano utilizzando la formula:

$$\boxed{K_i = (s-p_i)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=p_i}}$$

- Una volta che la funzione $F(s)$ è stata scomposta in fratti semplici, è immediato antitrasformarla:

$$\boxed{f(t) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} K_i\, e^{p_i t}}$$

- Esempio. Sia

$$F(s) := \frac{5\,s+3}{(s+1)\,(s+2)\,(s+3)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

I residui si calcolano nel modo seguente:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{5\,(-1)+3}{(-1+2)\,(-1+3)} = -1 \\ K_2 &= \frac{5\,(-2)+3}{(-2+1)\,(-2+3)} = 7 \\ K_3 &= \frac{5\,(-3)+3}{(-3+1)\,(-3+2)} = -6 \end{aligned}$$

per cui si può scrivere

$$F(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

e quindi

$$f(t) = -e^{-t} + 7\,e^{-2t} - 6\,e^{-3t}$$

Quando si hanno coppie di <u>*poli complessi coniugati*</u>

$$p_1 = \sigma_1 + j\,\omega_1 \;, \quad p_2 = \sigma_1 - j\,\omega_1$$

anche i residui sono complessi coniugati

$$K_1 = u_1 + j\,v_1 \;, \quad K_2 = u_1 - j\,v_1$$

La somma di fratti semplici ad essi relativa è

$$\frac{u_1 + j\,v_1}{s - \sigma_1 - j\,\omega_1} + \frac{u_1 - j\,v_1}{s - \sigma_1 + j\,\omega_1}$$

Posto

$$M_1 := 2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}\;, \quad \varphi_1 := \arg\left(u_1 + j\,v_1\right)\;,$$

si può scrivere

$$\frac{M_1}{2}\left(\frac{e^{j\varphi_1}}{s - \sigma_1 - j\,\omega_1} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - \sigma_1 + j\,\omega_1}\right)\;,$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$\frac{M_1}{2}\left(e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)}\right)\;,$$

funzione che può essere posta nella forma

$$M_1\, e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) = M_1\, e^{\sigma_1 t}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t + \varphi_1 + \pi/2)$$

Esempio. Sia:

$$F(s) := \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1 - j2} + \frac{K_3}{s + 1 + j2}$$

I residui sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{7\cdot 0 - 8\cdot 0 + 5}{(0 + 1 - j2)\,(0 + 1 + j2)} = 1\\
K_2 &= \frac{7\,(-1 + j2)^2 - 8\,(-1 + j2) + 5}{(-1 + j2)\,(-1 + j2 + 1 + j2)} = 3 + j4\\
K_3 &= \frac{7\,(-1 - j2)^2 - 8\,(-1 - j2) + 5}{(-1 - j2)\,(-1 - j2 + 1 - j2)} = 3 - j4
\end{aligned}$$

e pertanto

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3 + j4}{s + 1 - j2} + \frac{3 - j4}{s + 1 + j2}\;,$$

da cui, antitrasformando,

$$f(t) = 1 + 10\,e^{-t}\cos\left(2t + \varphi\right)\;,$$

in cui è $\varphi = \arctan(4/3) = 53,13°$.

- **Esempio.** Si calcoli la risposta al gradino unitario del seguente sistema:

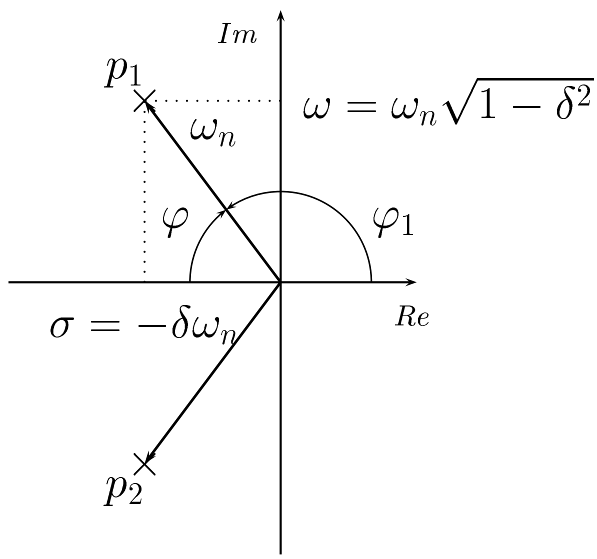
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Occorre antitrasformare la seguente funzione di uscita:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Essendo $\delta = \cos\varphi$, i poli del sistema sono:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \sigma \pm j\omega \\ &= -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ &= -\omega_n \cos\varphi \pm j\omega_n \sin\varphi \\ &= \omega_n e^{\pm j(\pi-\varphi)} \\ &= \omega_n e^{\pm j\varphi_1} \end{aligned}$$



La funzione $Y(s)$ può essere fattorizzata nel modo seguente:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s-\omega_n e^{j\varphi_1})(s-\omega_n e^{-j\varphi_1})}$$

Usando la scomposizione in fratti semplici si ottiene:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s-\omega_n e^{j\varphi_1}} + \frac{K_2^*}{s-\omega_n e^{-j\varphi_1}} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s-\sigma-j\omega} + \frac{K_2^*}{s-\sigma+j\omega} \end{aligned}$$

- Il calcolo dei residui è immediato:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \lim_{s\to 0} \frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2} = 1\\
K_2 &= \lim_{s\to \omega_n e^{j\varphi_1}} \frac{\omega_n^2}{s(s-\omega_n e^{-j\varphi_1})}\\
&= \frac{\omega_n^2}{\omega_n e^{j\varphi_1}(\omega_n e^{j\varphi_1}-\omega_n e^{-j\varphi_1})}\\
&= \frac{1}{e^{j\varphi_1}(e^{j\varphi_1}-e^{-j\varphi_1})} = \frac{e^{-j\varphi_1}}{2j\sin\varphi_1}\\
K_2^* &= -\frac{e^{j\varphi_1}}{2j\sin\varphi_1}
\end{aligned}
$$

- Quindi, la funzione $Y(s)$ è esprimibile come:

$$
Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{2j\sin\varphi_1(s-\sigma-j\omega)} - \frac{e^{j\varphi_1}}{2j\sin\varphi_1(s-\sigma+j\omega)}
$$

- Antitrasformando si ottiene:

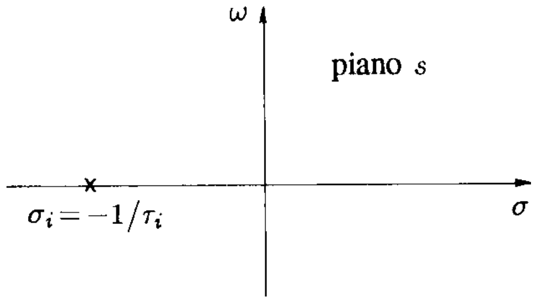
$$
\begin{aligned}
y(t) &= 1+\frac{e^{-j\varphi_1}e^{(\sigma+j\omega)t}}{2j\sin\varphi_1} - \frac{e^{j\varphi_1}e^{(\sigma-j\omega)t}}{2j\sin\varphi_1}\\
&= 1+\frac{e^{\sigma t}}{\sin\varphi_1}\left[\frac{e^{j(\omega t-\varphi_1)}-e^{-j(\omega t-\varphi_1)}}{2j}\right]\\
&= 1+\frac{e^{\sigma t}}{\sin\varphi_1}\sin(\omega t-\varphi_1)\\
&= 1+\frac{e^{\sigma t}}{\sin\varphi_1}\sin(\omega t-\pi+\varphi)\\
&= 1-\frac{e^{\sigma t}}{\sin\varphi_1}\sin(\omega t+\varphi)\\
&= 1-\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\sin\left[\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t+\arctan\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right]
\end{aligned}
$$

Se si mantengono unite le coppie di poli complessi coniugati, la funzione $F(s)$ può anche essere scomposta in fratti semplici nel modo seguente:

$$F(s) = \frac{K_0'}{s} + \sum_{i=1}^{h} \frac{K_i'}{1+\tau_i\, s} + \sum_{i=1}^{k} \frac{K_i''\, \omega_{ni}^2\,(1+T_i\, s)}{s^2 + 2\,\delta_i\,\omega_{ni}\, s + \omega_{ni}^2}$$

dove con τ_i si è indicata la <u>*costante di tempo*</u> associata al polo reale $p_i = \sigma_i$:

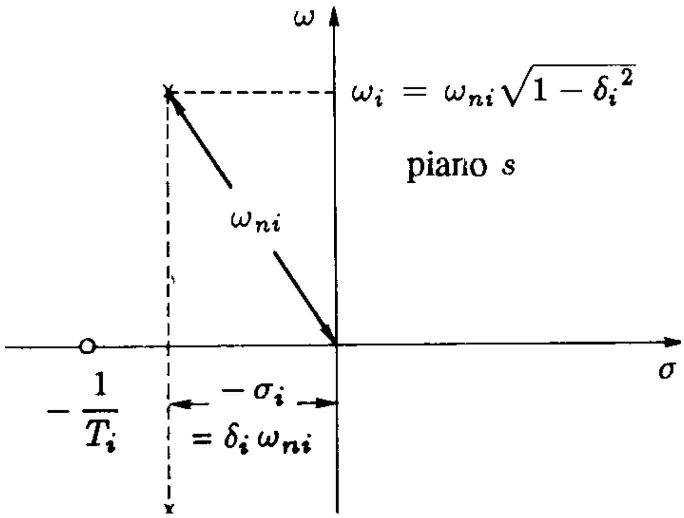
$$\boxed{\tau_i = -\frac{1}{\sigma_i}}$$



mentre si è indicato con δ_i il <u>*coefficiente di smorzamento*</u> e con ω_{ni} la <u>*pulsazione naturale*</u>

$$\delta_i := -\frac{\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}}, \qquad \omega_{ni} := \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}$$

relativi ad ogni coppia di poli complessi coniugati $p_{i(1,2)} = \sigma_i \pm j\omega_i$.
La rappresentazione grafica dei parametri σ_i, ω_i, δ_i e ω_{ni} è la seguente:



Si noti che il valore del coefficiente δ è compreso fra 0 e 1: se infatti fosse $\delta \geq 1$ le radici sarebbero reali;

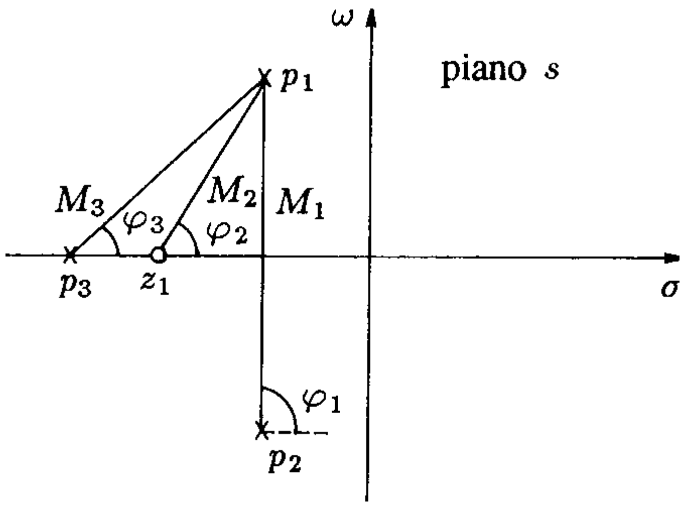
- Tabella delle antitrasformate dei termini del primo e del secondo ordine:

$F(s)$	$f(t)$
$\dfrac{1}{s}$	$1 \quad (u(t))$
$\dfrac{1}{1+\tau s}$	$\dfrac{1}{\tau} e^{-\frac{\tau}{\tau}}$
$\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin \omega_n t \sqrt{1-\delta^2}$
$\dfrac{\omega_n^2(1+Ts)}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\omega_n \sqrt{\dfrac{1-2T\delta\omega_n+T^2\omega_n^2}{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1-\delta^2}+\varphi)$ $\varphi := \arg(1-\delta\omega_n T = j\omega_n T\sqrt{1-\delta^2})$

- Determinazione grafica dei residui nel caso di poli semplici:

$$F(s) = K \,\frac{s-z_1}{(s-p_1)\,(s-p_2)\,(s-p_3)} = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \frac{K_3}{s-p_3}$$

- La disposizione grafica dei poli-zeri è la seguente:



- Il residuo K_1 si calcola con la formula

$$K_1 = \frac{K\,(p_1-z_1)}{(p_1-p_2)\,(p_1-p_3)} = K\,\frac{M_2}{M_1\,M_3}\; e^{\,j(\varphi_2-\varphi_1-\varphi_3)}$$

dove M_1, M_2, M_3, φ_1, φ_2 e φ_3 sono le distanze e gli angoli dei vettori mostrati in figura.

Antitrasformazione: il caso di *poli multipli*

- Si suppone che la funzione razionale $F(s)$ abbia h poli distinti p_i $(i = 1, \ldots, h)$, ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità $r_i \geq 1$ $(\sum_{i=1}^{h} r_i = n)$:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p_1)^{r_1}\,(s-p_2)^{r_2}\ldots(s-p_h)^{r_h}}$$
$$= \sum_{i=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^{r_i-\ell+1}}$$

- Le costanti $K_{i\ell}$ si ricavano mediante la formula

$$K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell-1)!}\,\frac{d^{\,\ell-1}}{ds^{\,\ell-1}}(s-p_i)^{r_i}\,\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=p_i}$$

dove $(i = 1, \ldots, h; \ell = 1, \ldots, r_i)$. Antitrasformando la $F(s)$ si ottiene:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(r_i-\ell)!}\,t^{r_i-\ell}\,e^{p_i t}$$

- I coefficienti $K_{i\ell}$ sono complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati. I termini complessi coniugati corrispondono a prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche, e si ottengono con un procedimento del tutto analogo a quello seguito nel caso di poli distinti.

- Esempio:

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)\,(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{s+2} + \frac{K_{22}}{s+1} + \frac{K_{21}}{(s+1)^2}$$

dove

$$\begin{aligned}
K_{11} &= (s+2)\,F(s)\big|_{s=-2} = 1\ , \\
K_{22} &= \tfrac{d}{ds}\,(s+1)^2\,F(s)\Big|_{s=-1} = -1\ , \\
K_{21} &= (s+1)^2\,F(s)\big|_{s=-1} = 1
\end{aligned}$$

Antitrasformando si ottiene

$$f(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t\,e^{-t}$$

Sviluppi in somme di fratti semplici

- Si consideri il rapporto di polinomi

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- Valgono le seguenti proprietà:

  – *i)* se è $n=m+1$, la somma dei residui di $F(s)$ è $\frac{b_m}{a_n}$;

  – *ii)* se è $n \geq m+2$, la somma dei residui di $F(s)$ è zero.

  Si ricorda che, nello sviluppo in fratti, i residui di $F(s)$ sono i coefficienti dei termini con polinomio a denominatore di primo grado.

- Esempio 1:

$$F(s) = \frac{s - z_1}{(s-p_1)\,(s-p_2)\,(s-p_3)} = \frac{A}{s-p_1} + \frac{B}{s-p_2} + \frac{C}{s-p_3}$$

Calcolati A e B, il calcolo del residuo C è immediato: $C = -(A+B)$.

- Esempio 2:

$$F(s) = \frac{1}{(s-p_1)^2\,(s-p_2)} = \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{C}{s-p_2}$$

Il coefficiente A e il residuo C si possono calcolare immediatamente:

$$A = \frac{1}{p_1 - p_2}\ , \quad C = \frac{1}{(p_2-p_1)^2}$$

Applicando la proprietà *ii* si deduce: $B = -C$.

- Esempio 3:

$$F(s) = \frac{s - z_1}{(s-p_1)^3\,(s-p_2)} = \frac{A}{(s-p_1)^3} + \frac{B}{(s-p_1)^2} + \frac{C}{s-p_1} + \frac{D}{s-p_2}$$

Il coefficiente A e il residuo D si calcolano immediatamente. Applicando la proprietà *ii* si deduce: $C = -D$. Moltiplicando ambo i membri dello sviluppo per $(s-p_1)$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{s - z_1}{(s-p_1)^2\,(s-p_2)} &= \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + C + D\,\frac{s-p_1}{s-p_2} \\
&= \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{E}{s-p_2}
\end{aligned}$$

da cui si calcola

$$E = \frac{p_2 - z_1}{(p_2-p_1)^2}$$

Applicando la proprietà *ii* al nuovo sviluppo, si ottiene $B = -E$.

- L'unica difficoltà nell'antitrasformazione delle funzioni razionali fratte è la fattorizzazione del polinomio a denominatore.

- Il comportamento dell'antitrasformata per t tendente all' infinito è legato alla posizione dei poli in rapporto all'asse immaginario. Infatti, nel caso di poli semplici si hanno termini ($modi$) del tipo:

$$K \;, \quad K\, e^{\sigma t} \;, \quad K\, e^{\sigma t}\, \mathrm{sen}\,(\omega\, t + \varphi)$$

  in cui σ e ω sono le parti reale e immaginaria dei poli considerati, mentre nel caso di poli multipli si hanno termini ($modi$) del tipo:

$$K\, t^h \;, \quad K\, t^h\, e^{\sigma t} \;, \quad K\, t^h\, e^{\sigma t}\, \mathrm{sen}\,(\omega\, t + \varphi)$$

  in cui h è un intero compreso fra l'unità e $r-1$, essendo r l'ordine di molteplicità dei poli considerati.

- Nel caso di $poli\ semplici$, i termini tendono a zero per t tendente all'infinito se la parte reale del relativo polo è negativa, restano limitati se essa è nulla e divergono se essa è positiva.

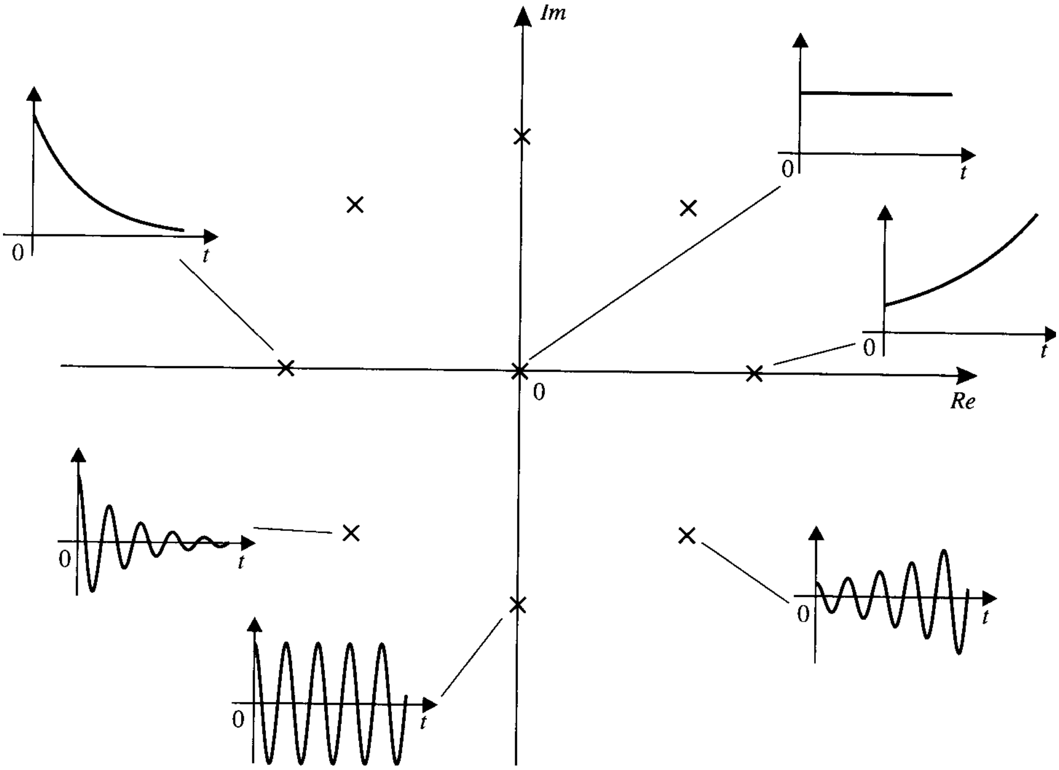
- Nel caso di $poli\ multipli$, i termini tendono a zero se la parte reale del relativo polo è negativa e divergono se essa è nulla o positiva.

- L'antitrasformata di una funzione razionale fratta rimane limitata se e solo se la funzione da antitrasformare non presenta alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici, diverge in caso contrario.

- I poli che caratterizzano la trasformata della risposta del sistema a un segnale di ingresso (come l'impulso di Dirac, il gradino, la sinusoide) sono quelli della funzione di trasferimento, più quelli relativi al segnale di ingresso.

- Il $sistema$ risulta $stabile$ (asintoticamente) quando tutti i suoi poli sono a parte reale negativa: infatti in tal caso le sue variabili tendono a riacquistare asintoticamente per t tendente all'infinito i valori che avevano prima della perturbazione.

- Modi della risposta nel caso di autovalori distinti ($r = 1$):



- Modi della risposta nel caso di autovalori multipli ($r > 1$):