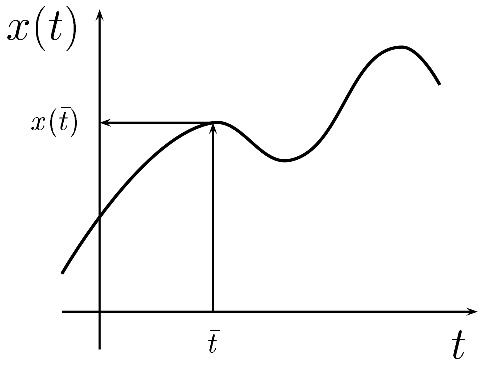
RICHIAMI MATEMATICI

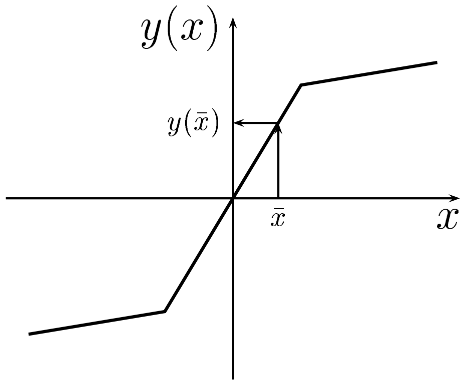
- **Funzioni reali del tempo**:

$$x(t) : t \to x(t)$$



- **Funzioni reali dell'ingresso**:

$$y(x) : x \to y(x)$$



- **Numeri complessi**. Un numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali:

$$(x,\ y)$$

dove x è la parte reale ed y è la parte immaginaria. Vi sono molti modi equivalenti di rappresentare i numeri complessi:

1) Utilizzando il numero immaginario puro j:

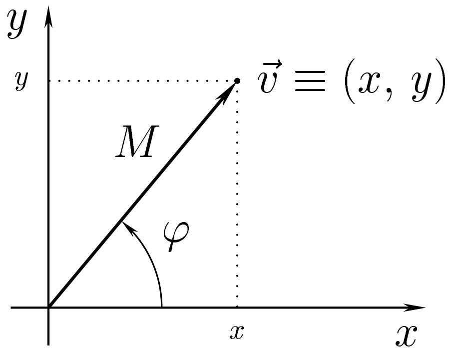
$$(x,\ y) \equiv x + j\,y$$

Il numero j indica qual'è la parte immaginaria. Il numero soddisfa le seguenti relazioni:

$$j = \sqrt{-1}, \qquad j^2 = -1, \qquad j^3 = -j, \qquad j^4 = 1, \qquad j^5 = j$$

2) I numeri complessi $(x,\, y)$ possono essere messi in corrispondenza con i punti di un piano:

$$\vec{v} \equiv (x,\, y) \equiv x + j\, y$$



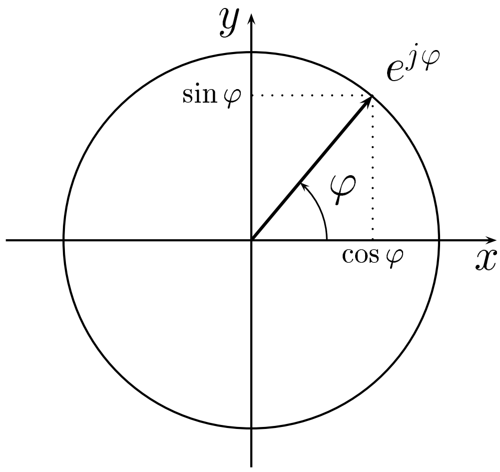
3) I punti del piano, a loro volta, possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i vettori $\vec{v}$ che collegano il punto $(x,\ y)$ all'origine. Il vettore $\vec{v}$ può essere espresso in forma "cartesiana" o in forma "polare":

$$\vec{v} = x + j\, y = M \angle \varphi = M\, e^{j\varphi}$$

Con M si è indicato il e con φ la fase del vettore $\vec{v}$.

- Il numero complesso $e^{j\varphi}$ rappresenta un vettore a modulo unitario e fase φ. Vale la relazione:

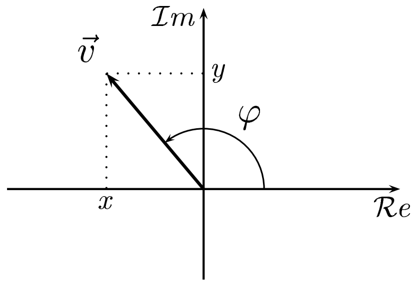
$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\, \sin\varphi$$



- In qualsiasi momento è possibile passare da una rappresentazione "cartesiana" $(x,\, y)$ ad una rappresentazione "polare" (e viceversa) del numero complesso utilizzando le seguenti relazioni:

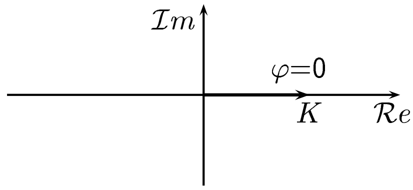
$$\left\{ \begin{array}{rcl} M & = & \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi & = & \arctan \dfrac{y}{x} \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & M\cos\varphi \\ y & = & M\sin\varphi \end{array} \right.$$

1) La fase φ di un vettore $\vec{v}$ del piano, e quindi la fase φ del corrispondente numero complesso $x + j\,y$, si misura in senso **antiorario** rispetto al **semiasse reale positivo**.



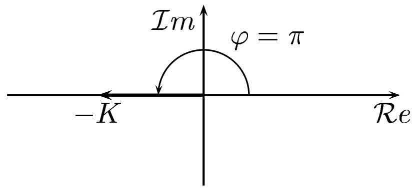
2) La fase dei numeri reali positivi $K > 0$ è nulla:

$$\varphi = \arg[K] = 0$$



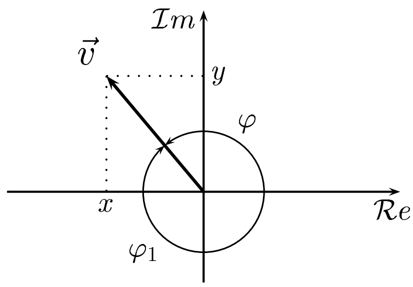
3) La fase dei numeri reali negativi $-K < 0$ è $\varphi = \pi$:

$$\varphi = \arg[-K] = \pi$$



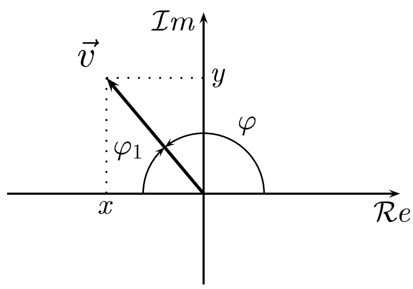
4) La fase φ di un vettore $\vec{v}$ del piano è definita a meno di un multiplo intero di 2π:

$$\arg[\vec{v}] = \varphi + 2K\pi, \qquad \forall K \in \mathcal{Z}$$



5) Per calcolare la fase φ di un vettore $\vec{v} = x + jy$ con pare reale negativa, $x < 0$, utilizzare la formula:

$$\varphi = \arg[\vec{v}] = \pi - \arctan\left[\frac{y}{|x|}\right]$$



6) Il modulo del prodotto di numeri complessi è uguale al **prodotto dei moduli**. Esempio:

$$\left|\frac{(1+3j)}{(2-5j)(-4+j)}\right| = \frac{|1+3j|}{|2-5j|\,|-4+j|} = \frac{\sqrt{1^2+3^2}}{\sqrt{2^2+5^2}\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{29}\sqrt{17}}$$

7) La fase del prodotto di numeri complessi è uguale alla **somma delle fasi** dei singoli elementi. Esempio:

$$\arg\left[\frac{(1+3j)}{(2-5j)(-4+j)}\right] = \arctan\frac{3}{1} - \left[\arctan\frac{-5}{2} + \pi - \arctan\frac{1}{4}\right]$$

- **Funzioni complesse di variabile reale**. Si consideri, per esempio, la seguente funzione $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{100}{(4+j\,\omega)(13-\omega^2+j\,4\omega)} = M(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)}$$

La funzione $F(\omega)$ associa ad ogni valore reale di ω un numero complesso avente modulo $M(\omega) = |F(\omega)|$ e fase $\varphi(\omega) = \arg[F(\omega)]$.

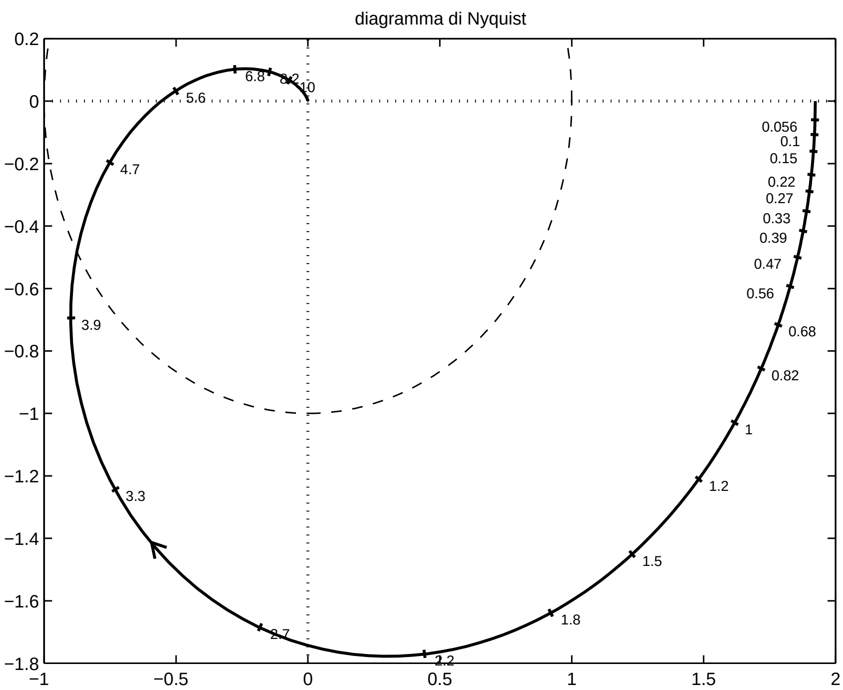
$$F(\omega)\ :\ \ \omega \to F(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

La funzione $F(\omega)$ può rappresentare, per esempio, la funzione di risposta armonica di un sistema lineare:

$$x(t) = X\,\sin\omega t \longrightarrow \boxed{F(\omega)} \longrightarrow y(t) = \underbrace{M(\omega)\,X}_{Y(\omega)}\,\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

In questo caso il modulo $M(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}$ ha il significato di “guadagno” del sistema alla pulsazione ω, mentre $\varphi(\omega)$ rappresenta lo sfasamento della sinusoide di uscita $y(t) = Y(\omega)\,\sin[\omega t+\varphi(\omega)]$ rispetto a quella di ingresso $x(t) = X\,\sin\omega t$.

- Funzioni di questo tipo possono essere rappresentate, al variare del parametro ω, come curve sul piano complesso:



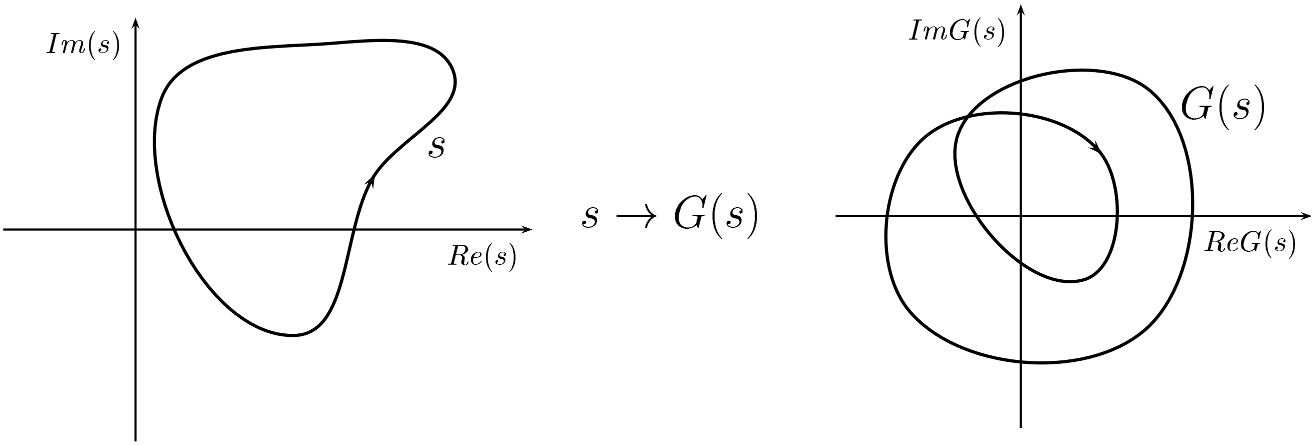
- <u>**Funzioni complesse di variabile complessa**</u>. Ad esempio la trasformata di Laplace $G(s)$ di un segnale continuo $g(t)$:

$$g(t) \qquad \leftrightarrow \qquad G(s) = \int_0^\infty g(t) e^{-s\,t}\, dt$$

- Per ogni valore della variabile complessa s, la funzione $G(s)$ fornisce un altro numero complesso:

$$G(s):\ s \to G(s)$$

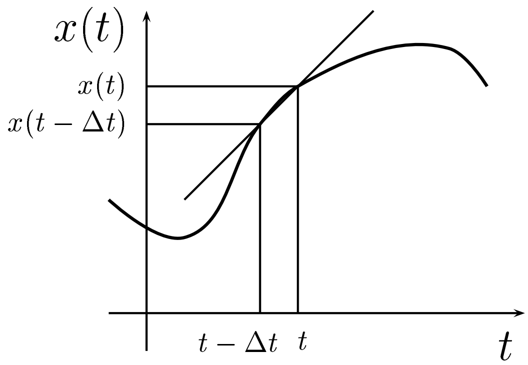
Ad ogni curva chiusa del piano complesso s è associata una curva chiusa nel piano complesso $G(s)$:



- Una funzione di questo tipo è in grado di descrivere una “trasformazione” del piano complesso.

- <u>**Derivata di una funzione**</u>. Data la funzione $x(t)$, con $\dot{x}(t)$ si indica la derivata di $x(t)$ rispetto al parametro t, definita come segue:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$



- La derivata $\dot{x}(t)$ descrive la “pendenza” funzione $x(t)$ nell'intorno del punto t.

Equazioni differenziali

- **Equazioni differenziali**. Sono dei legami algebrici tra una o più funzioni, per esempio $x(t)$, $y(t)$, ecc., e le loro derivate $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, ecc.

- Le equazioni differenziali possono essere:

  1) non lineari:

$$f(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \dots) = 0$$

  2) lineari tempo varianti (i coefficienti $a_i(t)$ e $b_i(t)$ variano nel tempo):

$$b_2(t)\ddot{y}(t) + b_1(t)\dot{y}(t) + b_0(t)y(t) = a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t)$$

  3) lineari tempo-invarianti (i coefficienti a_i e b_i sono costanti):

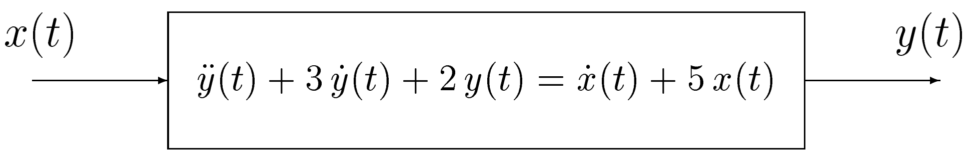
$$b_2\ddot{y}(t) + b_1\dot{y}(t) + b_0 y(t) = a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t)$$

- Nel seguito si farà riferimento solamente ad equazioni differenziali lineari tempo-invarianti. Esempio:

$$\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = \dot{x}(t) + 5\,x(t)$$

- Vengono utilizzate per descrivere il comportamento dinamico di un sistema fisico. Conoscere l'equazione differenziale che descrive un sistema dinamico vuol dire conoscere completamente il sistema stesso.

- Utilizzando l'equazione differenziale è possibile prevedere (cioè calcolare) quale sarà l'andamento futuro dell'uscita $y(t)$ del sistema, noto che sia l'andamento dell'ingresso $x(t)$.



- Noto $x(t)$, l'incognita dell'equazione differenziale è la funzione $y(t)$. Eseguire questo calcolo vuol dire "risolvere" l'equazione differenziale del sistema per quel particolare andamento della funzione di ingresso $x(t)$.

- Dall'equazione differenziale è possibile ricavare anche la descrizione "statica" del sistema, basta mettere a zero tutte le derivate ($\dot{y}(t) = 0$, $\ddot{y}(t) = 0$, $\ldots$, $\dot{x}(t) = 0$, $\ddot{x}(t) = 0$, $\ldots$):

$$2\,y(t) = 5\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \frac{5}{2}\,x(t)$$

- È possibile anche tenere conto, eventualmente, delle condizioni iniziali del sistema (cioè dell' energia accumulata nel sistema all'istante iniziale).

- Nei problemi di controllo, le condizioni iniziali vengono spesso trascurate in quanto, per sistemi controllati stabili, la loro influenza tende ad annullarsi per $t \rightarrow \infty$.

- Le equazioni differenziali si possono risolvere in vari modi. Il modo più efficiente, dal punto di vista dei controlli, è quello di utilizzare le **Trasformate di Laplace**.

- Questo metodo si basa sull'utilizzo di funzioni complesse $X(s)$ ed $Y(s)$ della variabile complessa s messe in corrispondenza *biunivoca* con i corrispondenti segnali temporali $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) \qquad \leftrightarrow \qquad X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-s\,t}\,dt$$

$$y(t) \qquad \leftrightarrow \qquad Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-s\,t}\,dt$$

- Il vantaggio che si ha nell'utilizzo delle trasformate di Laplace è che l'equazione differenziale di partenza si trasforma in una semplice equazione algebrica facilmente risolubile.

- Una proprietà importante della trasformata di Laplace è la seguente:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0^-)$$

- Nel caso in cui le condizioni iniziali siano nulle, $x(0^-) = 0$, si ha:

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\,X(s)$$

cioè in ambito trasformato per derivare un segnale basta moltiplicare per "s" la sua trasformata di Laplace.

- Esempio. Applicando la trasformata di Laplace alla seguente equazione differenziale (se le condizioni iniziali sono nulle)

$$\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = \dot{x}(t) + 5\,x(t)$$

si ottiene la seguente relazione algebrica

$$s^2 Y(s) + 3\,s\,Y(s) + 2\,Y(s) = s\,X(s) + 5\,X(s)$$

$$(s^2 + 3\,s + 2)Y(s) = (s+5)X(s)$$

dalla quale si ricava il seguente legame tra la funzione di ingresso $X(s)$ e la funzione di uscita $Y(s)$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(s+5)}{s^2 + 3\,s + 2}}_{G(s)} X(s) = G(s)\,X(s)$$

- La funzione $G(s)$ prende il nome di **funzione di trasferimento** del sistema. Essa caratterizza completamente il sistema in esame e si ricava direttamente e in modo biunivoco dalla corrispondente equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = \dot{x}(t) + 5\,x(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad G(s) = \frac{(s+5)}{s^2 + 3\,s + 2}$$

- La relazione $Y(s) = G(s)X(s)$ indica che la risoluzione di equazioni differenziali in ambito trasformato è molto semplice: la trasformata $Y(s)$ del segnale di uscita si ricava semplicemente moltiplicando la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema per la trasformata di Laplace $X(s)$ del segnale di ingresso:

$$Y(s) = G(s)X(s) \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)X(s)]$$

Per ricavare $y(t)$ sarà sufficiente antitrasformare la funzione $Y(s)$.