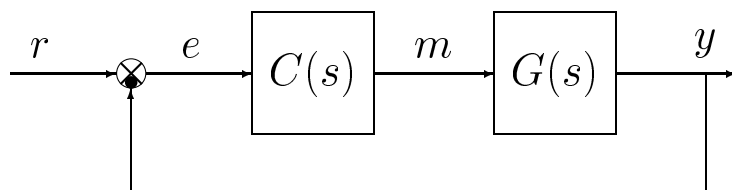


## Progetto delle reti correttrici

- Si consideri il seguente sistema retroazionato:



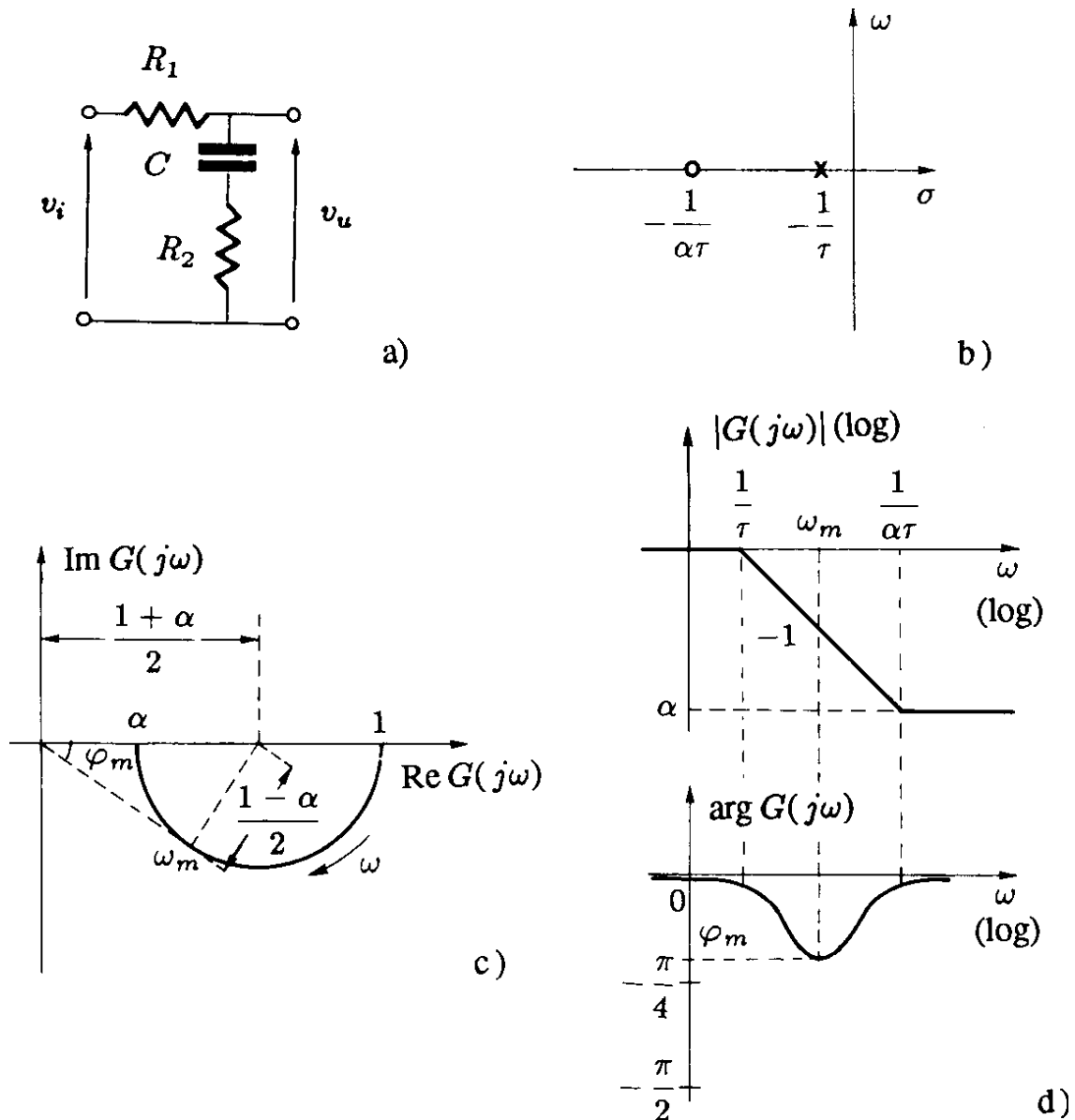
- I dati di specifica sui quali si basa il progetto del controllore  $C(s)$  riguardano:
  - la **precisione**: gli errori a regime in risposta ai segnali tipici e il comportamento a regime in presenza di disturbi e di variazioni parametriche;
  - la **stabilità** (“comportamento dinamico soddisfacente”): massima sovraelongazione nella risposta al gradino, il picco di risonanza, i margini di ampiezza e di fase e il coefficiente di smorzamento dei poli dominanti;
  - **velocità di risposta**: il tempo di ritardo, il tempo di salita, il tempo di assestamento, la banda passante.
- Poiché il progetto del sistema di controllo si effettua normalmente considerando la risposta armonica, **occorre convertire i parametri “temporali” in parametri “frequenziali”**: tale operazione non è in generale possibile in modo rigoroso e tipicamente si basa sull’ipotesi che il sistema in retroazione si comporti approssimativamente come un sistema del secondo ordine a poli dominanti.
- **Il primo parametro che si determina** in fase di progetto, è la **costante di guadagno**: guadagno statico nei sistemi di tipo 0, costante di velocità nei sistemi di tipo 1.
- **Successivamente si analizza se il sistema in retroazione soddisfa le specifiche di stabilità e di velocità di risposta**. Se tali specifiche non sono soddisfatte, occorre progettare una opportuna rete correttiva che modifichi le caratteristiche dinamiche del sistema.

## Rete ritardatrice

La funzione di trasferimento di una rete ritardatrice è:

$$G(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} \quad \text{oppure} \quad G(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

dove  $\alpha < 1$  oppure  $\tau_1 < \tau_2$ . Diagrammi frequenziali di Bode e Nyquist:



La rete attenua il modulo e ritarda la fase per tutte le pulsazioni finite. Il massimo ritardo di fase  $\varphi_m$  si ottiene in corrispondenza della pulsazione  $\omega_m$ , media geometrica delle pulsazioni  $1/\tau$  e  $1/(\alpha\tau)$ :

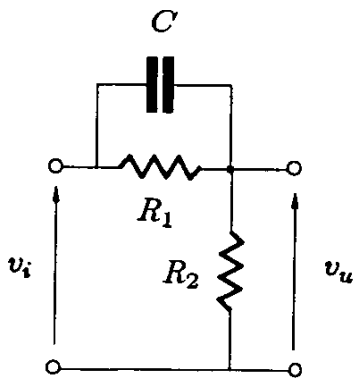
$$\varphi_m = -\arcsen \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad \omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

## Rete anticipatrice

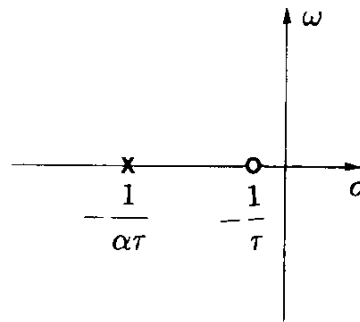
La funzione di trasferimento di una rete anticipatrice è:

$$G(s) = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad \text{oppure} \quad G(s) = \alpha \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

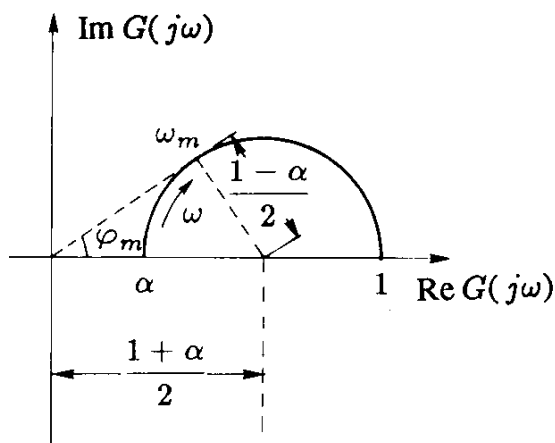
dove  $\alpha < 1$  oppure  $\tau_1 > \tau_2$ . Diagrammi frequenziali di Bode e Nyquist:



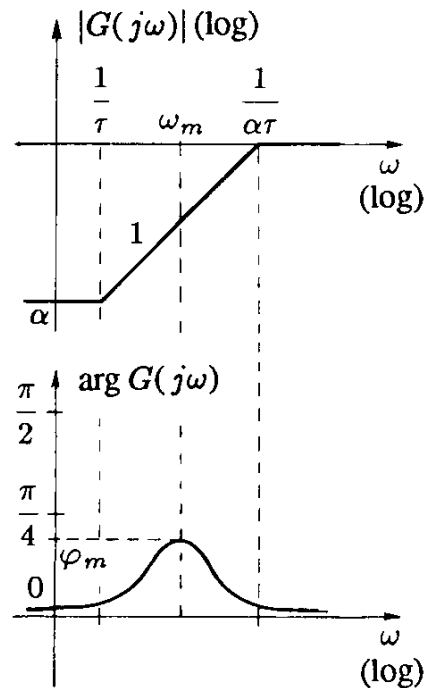
a)



b)



c)



d)

Dopo aver compensato con un guadagno aggiuntivo  $1/\alpha$  l'attenuazione  $\alpha$  a basse frequenze, si ottiene una rete che **amplifica il modulo e anticipa la fase per tutte le pulsazioni finite**. Il massimo anticipo di fase  $\varphi_m$  si ottiene in corrispondenza della pulsazione  $\omega_m$ :

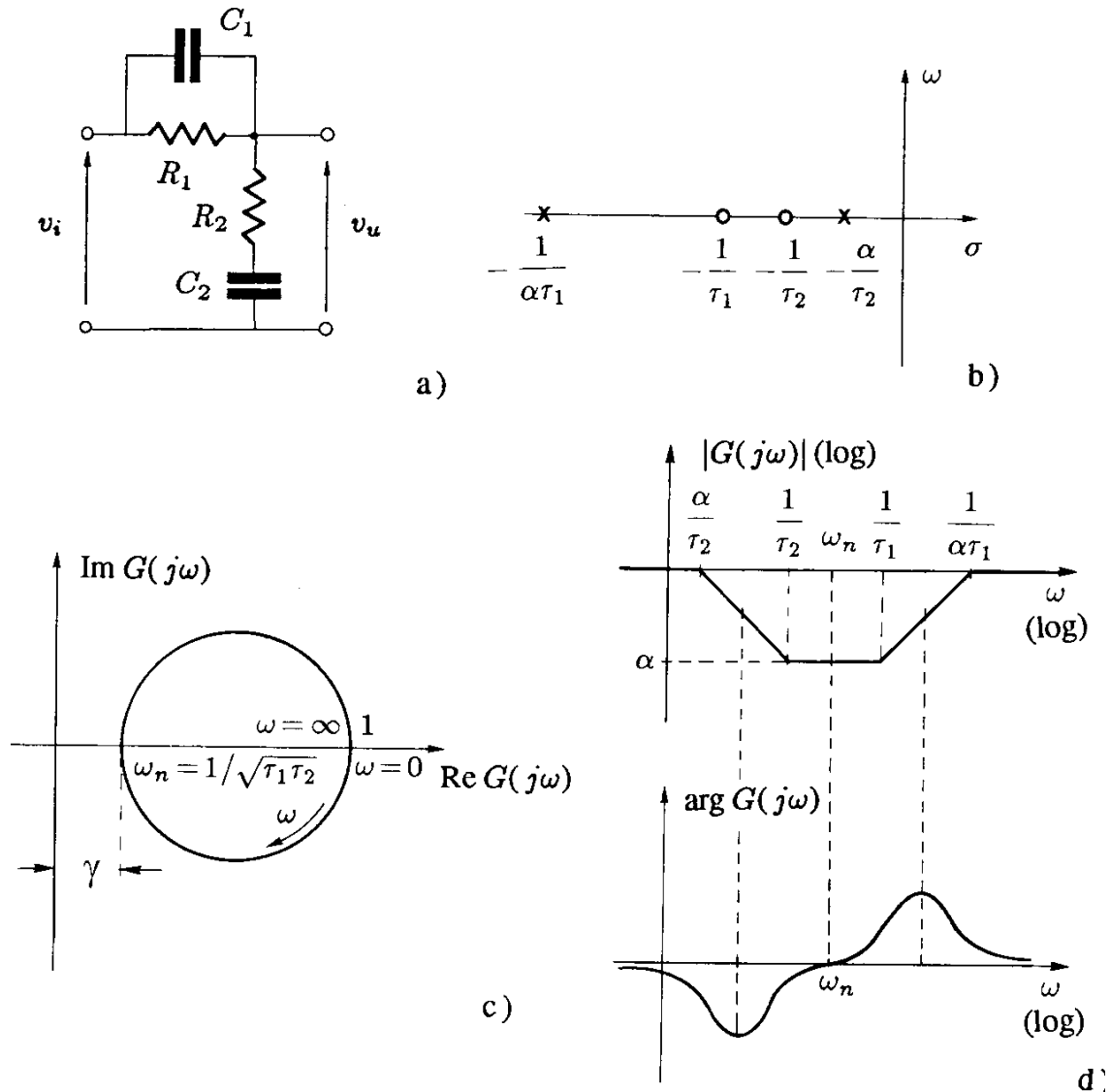
$$\varphi_m = \arcsen \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad \omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

## Rete a ritardo e anticipo

La funzione di trasferimento di una rete a ritardo e anticipo è:

$$G(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \frac{\tau_2}{\alpha} s)(1 + \alpha \tau_1 s)}$$

dove  $\alpha < 1$  e  $\tau_1 < \tau_2$ . Diagrammi frequenziali di Bode e Nyquist:



Questa rete attenua all'interno della banda frequenziale  $\frac{\alpha}{\tau_2} < \omega < \frac{1}{\alpha\tau_1}$ . In corrispondenza della pulsazione  $\omega = \omega_n$  la rete attenua di un fattore  $\gamma$ :

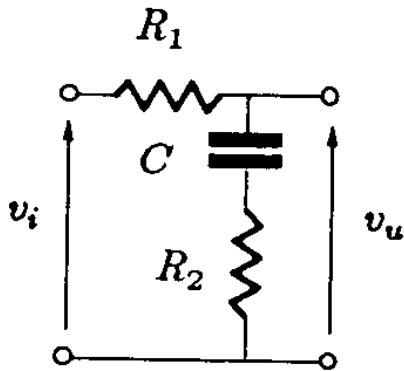
$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}, \quad \gamma = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\alpha\tau_1 + \frac{\tau_2}{\alpha}}$$

Per  $\omega = \omega_n$ , l'attenuazione reale  $\gamma$  è maggiore dell'attenuazione asintotica:  $\gamma > \alpha$ .

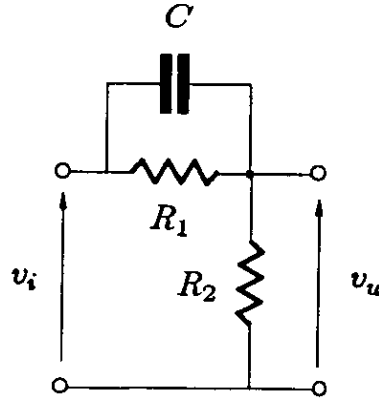
## Calcolo delle reti correttrici

Facendo l'ipotesi di corrente nulla fornita al carico, la funzione di trasferimento  $G(s)$  delle reti correttrici può essere determinata utilizzando le impedenze complesse e la regola del partitore di tensione.

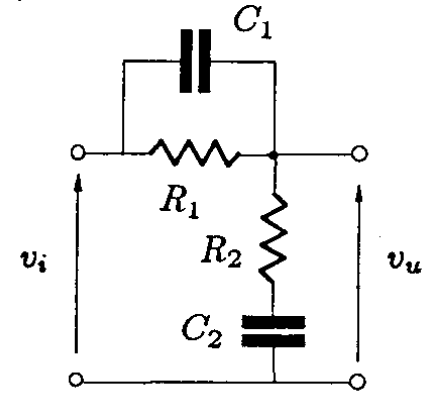
1) Rete ritardatrice:



2) Rete anticipatrice:



3) Rete ritardo-anticipo:



1) Rete ritardatrice:

$$G(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{1 + R_2 C s}{1 + (R_1 + R_2) C s} = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}$$

in cui si è posto  $\tau := (R_1 + R_2) C$      $\alpha := \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$ .

2) Rete anticipatrice:

$$G(s) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{(1/R_1) + Cs}} = \frac{R_2 (1 + R_1 C s)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s} = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

in cui si è posto  $\tau := R_1 C$  ,     $\alpha := \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$  .

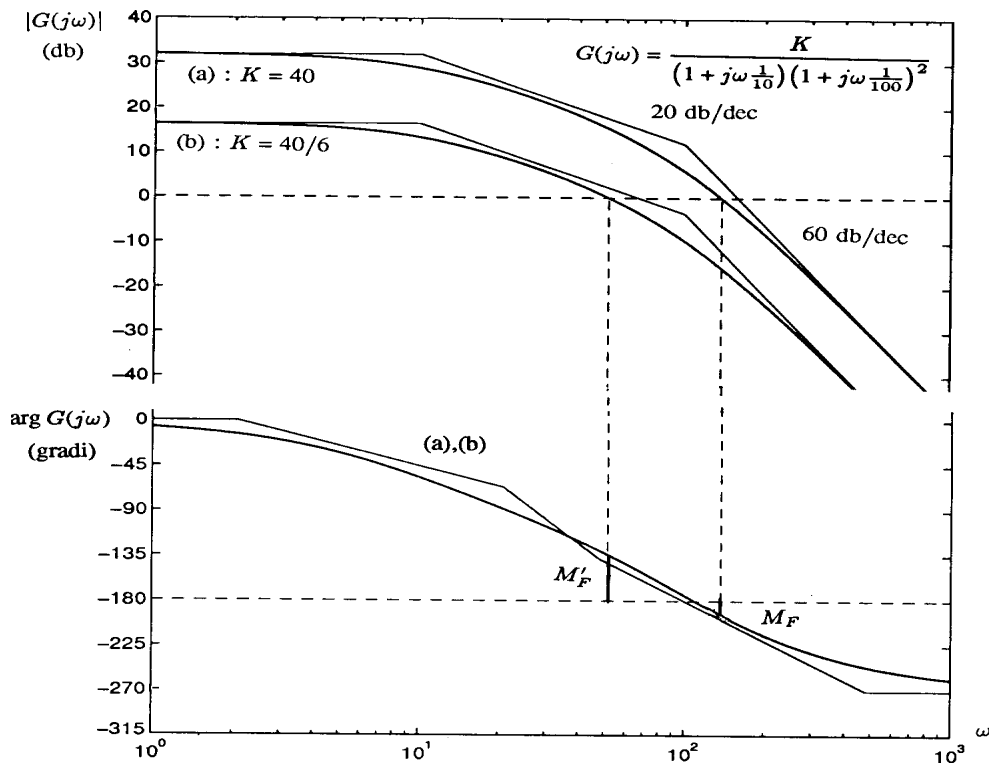
3) Rete ritardo-anticipo:

$$G(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{(1/R_1) + C_1 s}} = \frac{(1 + \tau_1 s) (1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s) (1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s}$$

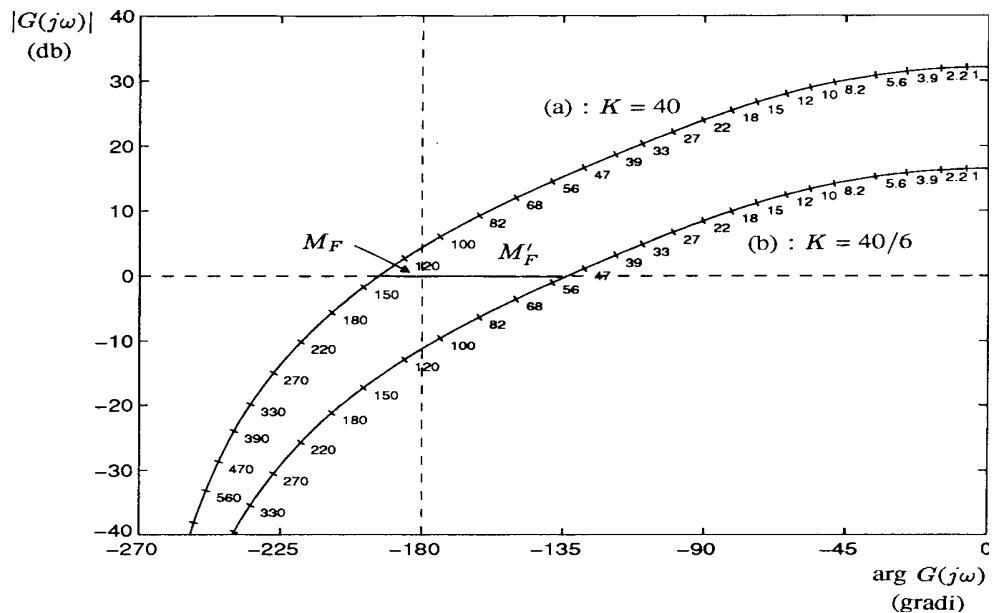
in cui si è posto  $\tau_1 := R_1 C_1$  ,  $\tau_2 := R_2 C_2$  ,  $\tau_{12} := R_1 C_2$ .

## Stabilizzazione mediante riduzione del guadagno

- Diagrammi di Bode:



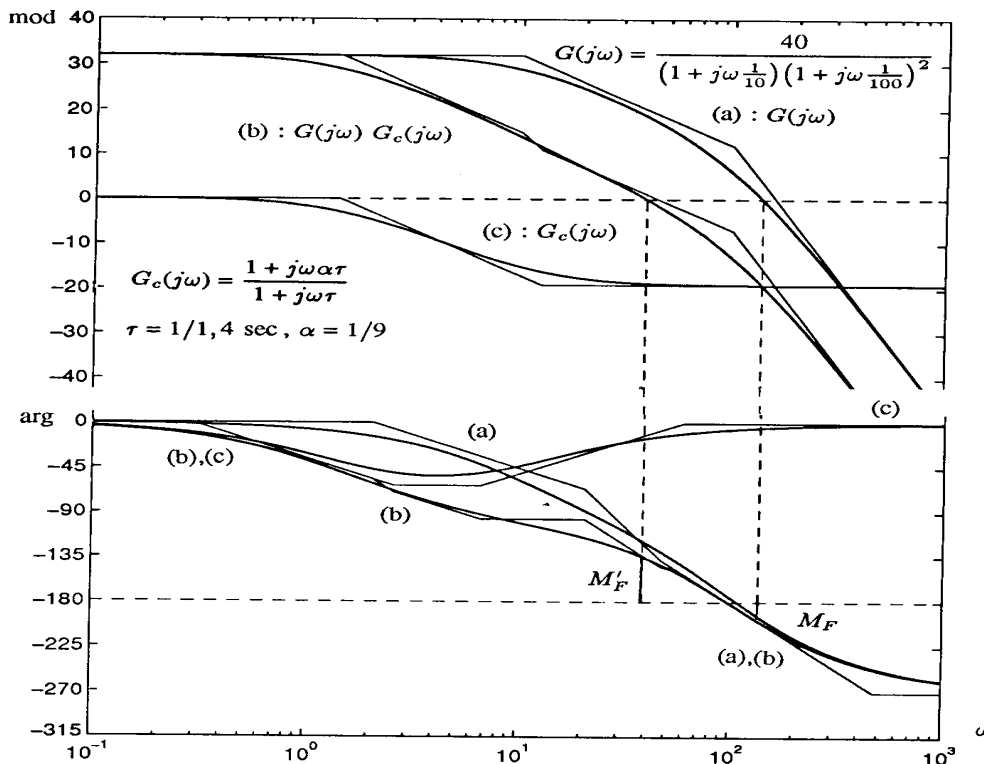
- Diagrammi di Nichols:



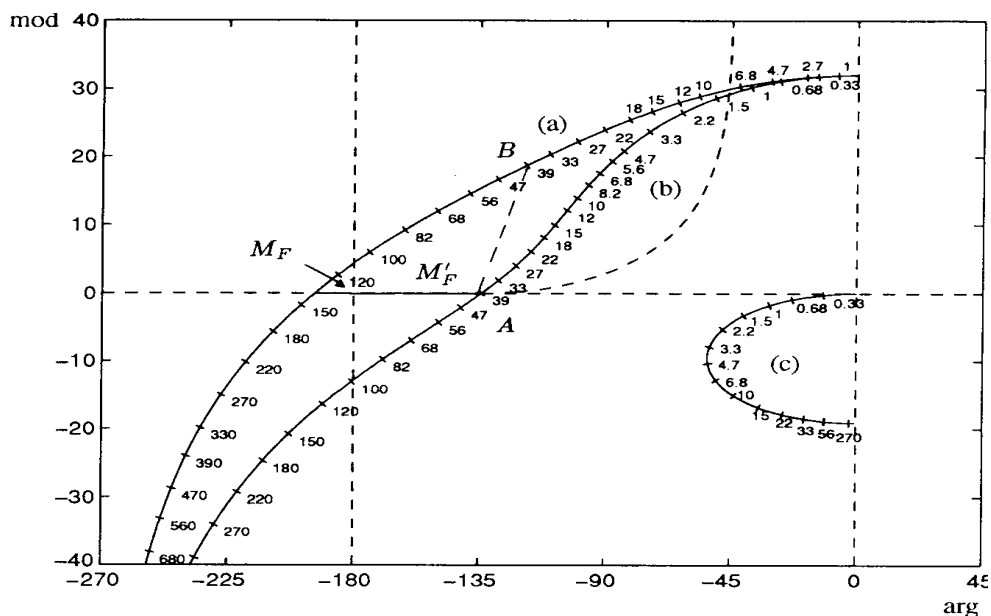
- Intervento sconsigliabile, in quanto i sistemi in retroazione funzionano tanto meglio, come prontezza e insensibilità ai disturbi, quanto più elevato è il guadagno di anello.

## Stabilizzazione mediante rete ritardatrice

- Diagrammi di Bode:



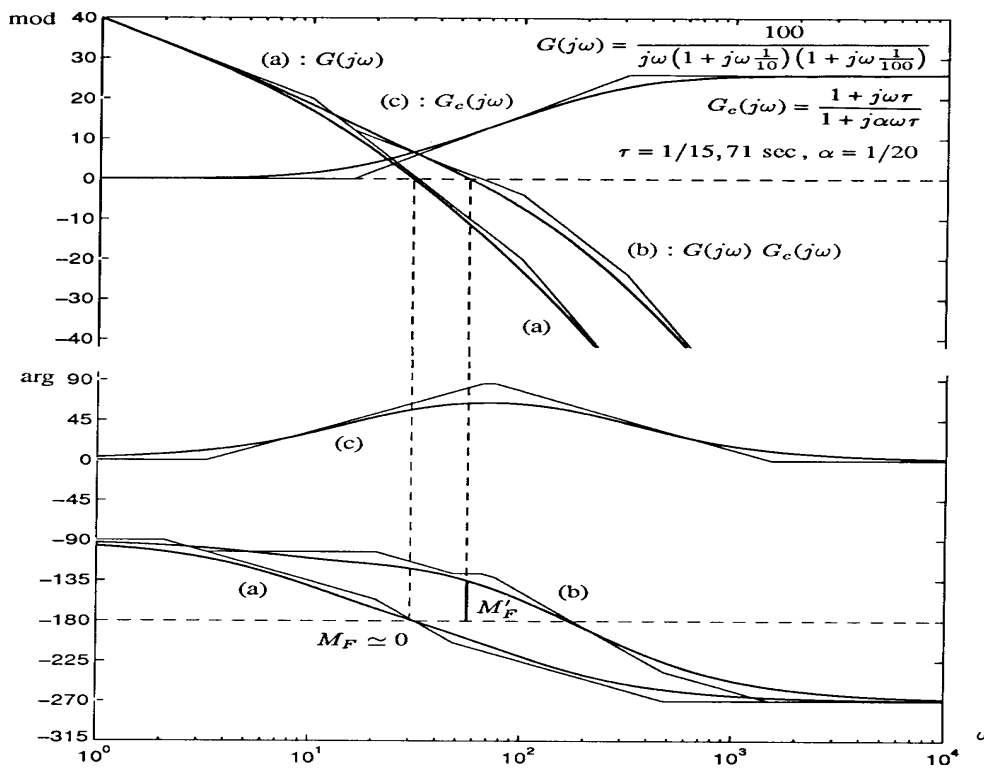
- Diagrammi di Nichols:



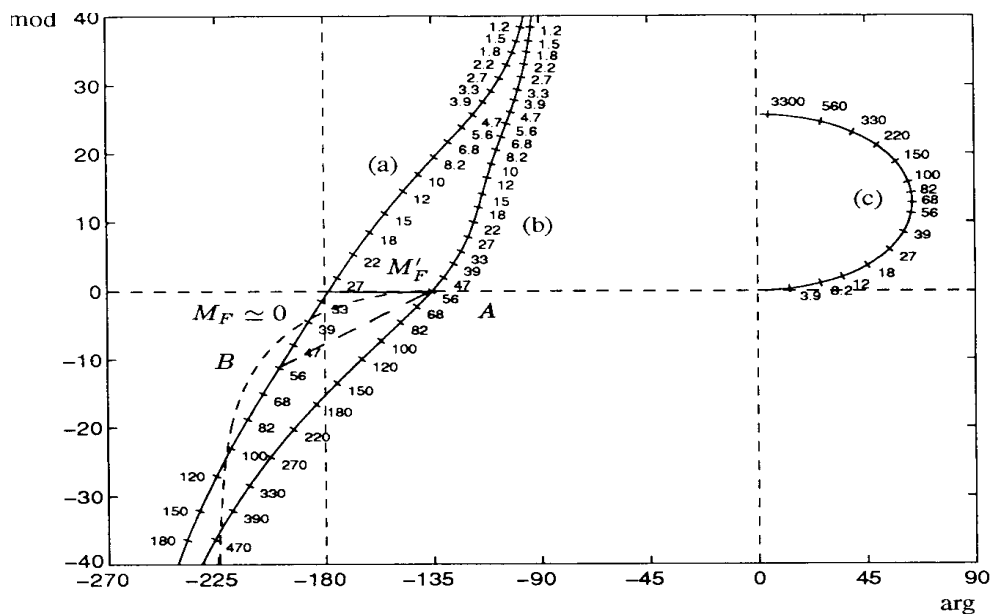
- Si usa per stabilizzare sistemi che abbiamo un margine di fase fortemente negativo (per esempio gli amplificatori operazionali). L'inconveniente principale è la riduzione della banda passante: risposta transitoria meno pronta e neutralizzazione meno efficace dei disturbi ad alta frequenza.

## Stabilizzazione mediante rete anticipatrice

- Diagrammi di Bode:



- Diagrammi di Nichols:



- La rete anticipatrice ha l'effetto di aumentare sia il margine di fase (diminuzione dell'overshoot) che il guadagno alle alte frequenze (la risposta più pronta perchè aumenta la banda passante).

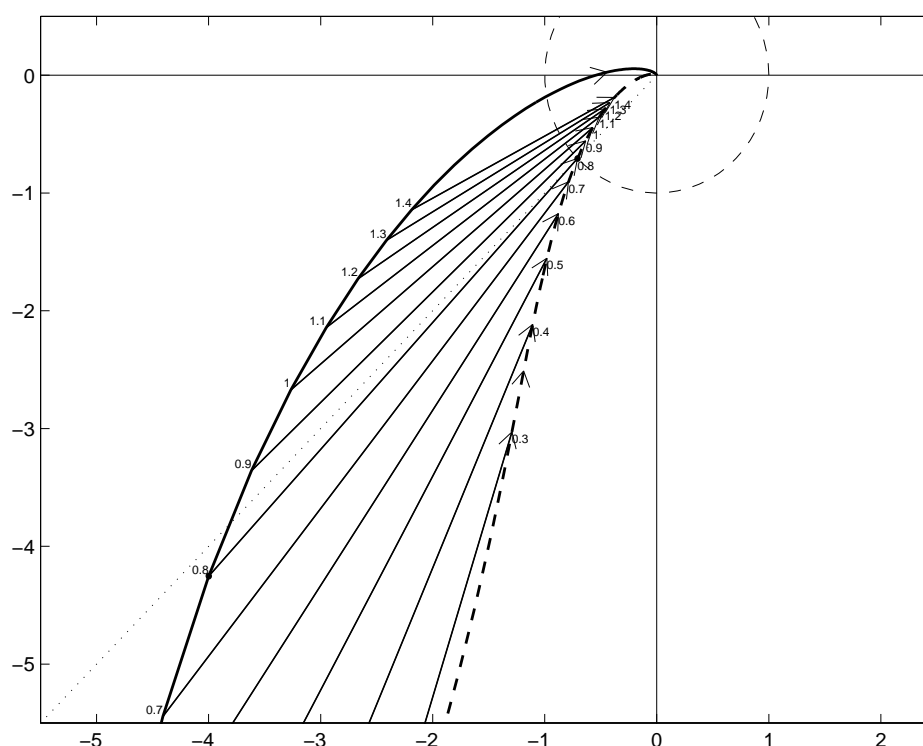


## Azione stabilizzante di una rete rete ritardatrice

- Una rete ritardatrice attenua e sfasa a tutte la pulsazioni

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} \quad \text{con} \quad \tau_1 < \tau_2$$

- Azione stabilizzante di una rete rete ritardatrice è essenzialmente data dall'attenuazione alle alte pulsazioni.
- Esempio di sintesi sul piano di Nyquist:



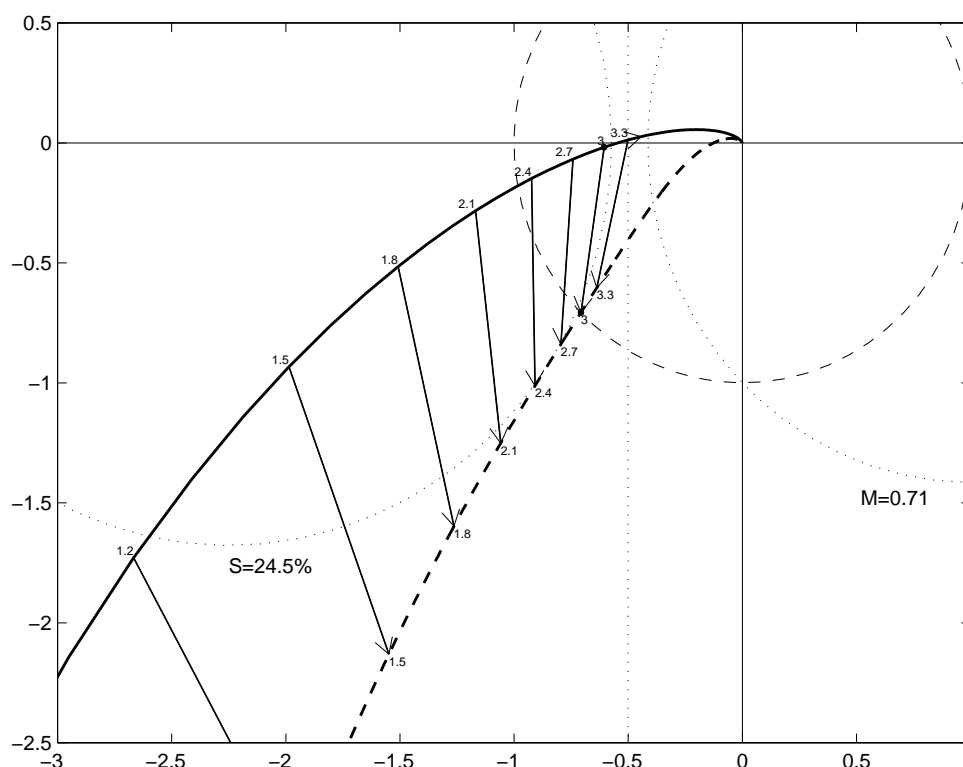
- L'attenuazione alle alte frequenze ha come effetto negativo la riduzione della banda passante del sistema.
- Nell'esempio riportato sopra, il sistema non retroazionato ha larghezza di banda  $\omega_f = 2.3$ , quello retroazionato  $\omega_f = 0.8$ . Il sistema retroazionato avrà un tempo di salita più lungo.
- Un vantaggio della rete ritardatrice rispetto a quella anticipatrice è la capacità di poter stabilizzare anche sistemi con margini di fase fortemente negativi.

## Azione stabilizzante di una rete rete anticipatrice

- Una rete anticipatrice amplifica e anticipa a tutte la pulsazioni

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} \quad \text{con} \quad \tau_1 > \tau_2$$

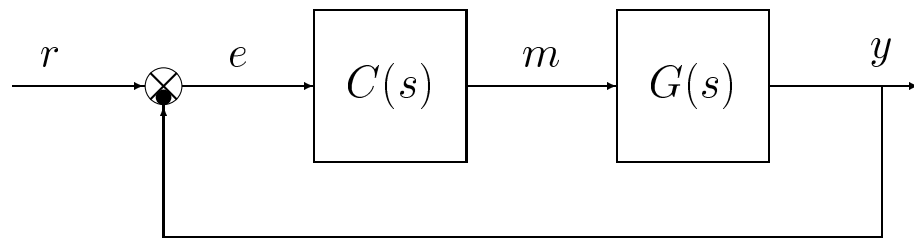
- Azione stabilizzante di una rete rete anticipatrice è essenzialmente data dall'anticipo di fase.
- Esempio di sintesi sul piano di Nyquist:



- L'azione amplificatrice ha come effetto positivo l'allargamento della banda passante.
- Nell'esempio riportato sopra, il sistema non retroazionato ha larghezza di banda  $\omega_f = 2.3$ , quello retroazionato  $\omega_f = 3$ .
- Il massimo anticipo di fase  $\varphi_m$  che può essere fornito da una rete anticipatrice è  $\varphi_m = \frac{\pi}{2}$ , per cui una rete anticipatrice può essere utilizzata solamente per migliorare il transitorio di sistemi già stabili o per stabilizzare sistemi con margini di fase negativi ma piccoli.

## Sintesi di reti correttrici: formule di inversione

- Si consideri il seguente sistema retroazionato:



dove  $G(s)$  è il sistema da controllare e  $C(s)$  è un'opportuna rete corretttrice aventi la seguente struttura:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

- Si ha una rete anticipatrice quando  $\tau_1 > \tau_2$ :

$$C(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad \text{dove} \quad \tau = \tau_1, \quad \alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1} < 1$$

- Si ha una rete ritardatrice quando  $\tau_1 < \tau_2$ :

$$C(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} \quad \text{dove} \quad \tau = \tau_2, \quad \alpha = \frac{\tau_1}{\tau_2} < 1$$

- Le specifiche dinamiche relative ad un sistema retroazionato vengono date in termini di margine di fase  $M_\varphi$  e di margine di ampiezza  $M_\alpha$ .
- I parametri  $\tau_1$  e  $\tau_2$  di una rete corretttrice che introduce una amplificazione  $M$  ed un anticipo di fase  $\varphi$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega$  si determinano utilizzando le seguenti formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

## Calcolo delle formule di inversione

- Problema di progetto: Determinare i valori  $\tau_1$  e  $\tau_2$  della rete corretttrice  $C(s)$  in modo che

$$C(j\omega) = \frac{1 + j \tau_1 \omega}{1 + j \tau_2 \omega} = M e^{j\varphi}$$

cioè in modo che la rete amplifichi di  $M$  ed anticipi di  $\varphi$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega$ .

- Il problema di progetto è risolto dalle seguenti formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

- Le formule di inversione si ottengono riscrivendo l'equazione

$$C(j\omega) = \frac{1 + j \tau_1 \omega}{1 + j \tau_2 \omega} = M e^{j\varphi} = M \cos \varphi + j M \sin \varphi$$

nella forma

$$(M \cos \varphi + j M \sin \varphi)(1 + j \tau_2 \omega) = 1 + j \tau_1 \omega,$$

trasformando tale equazione nel sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & -M \cos \varphi \\ 0 & M \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \omega \\ \tau_2 \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \sin \varphi \\ M \cos \varphi - 1 \end{bmatrix}$$

e risolvendo rispetto alle variabili  $\tau_1$  e  $\tau_2$

$$\tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} M \sin \varphi & -M \cos \varphi \\ M \cos \varphi - 1 & M \sin \varphi \end{vmatrix}}{\omega M \sin \varphi} = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}$$

$$\tau_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & M \sin \varphi \\ 0 & M \cos \varphi - 1 \end{vmatrix}}{\omega M \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

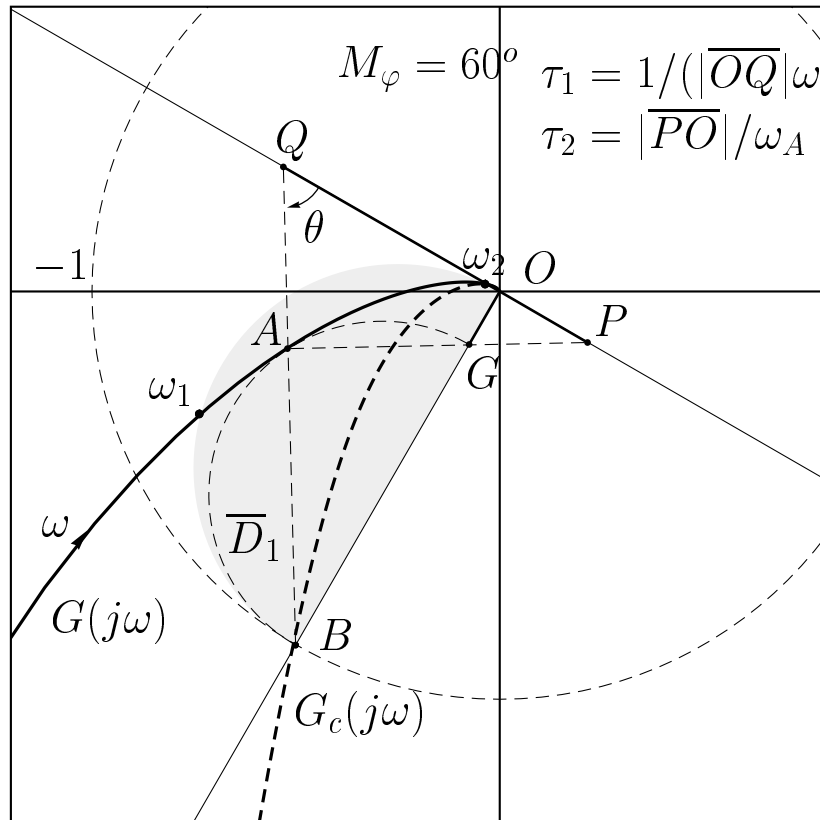
- Forma unificata per la sintesi di reti correttrici:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{\omega \sin \varphi + (M - \cos \varphi) s}{\omega \sin \varphi + (\cos \varphi - \frac{1}{M}) s}$$

- Tale formula è valida sia per reti anticipatrici ( $M > 1$  e  $\varphi > 0$ ) che ritardatrici ( $M < 1$  e  $\varphi < 0$ ).

## Sintesi sul piano di Nyquist

a) Sintesi di una rete anticipatrice. Specifica: margine di fase  $M_\varphi = 60^\circ$ .



- Sistema  $G(s)$  e rete corretttrice  $C(s)$ :

$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+0.806s)}{(1+0.117s)}$$

- Per portare il punto  $A$

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A}, \quad \rightarrow \quad M_A = 0.538 \quad \varphi_A = 194.9^\circ$$

nel punto  $B$

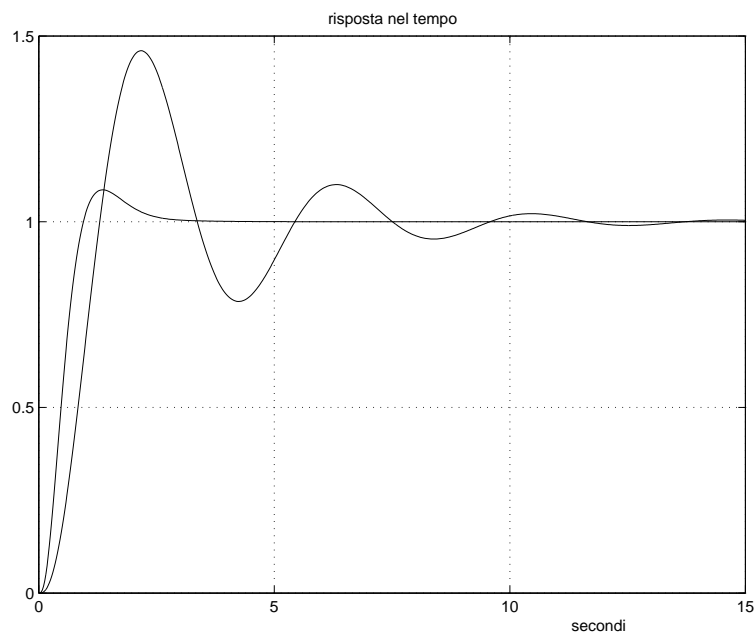
$$B = e^{j(\pi+M_\varphi)} \quad \rightarrow \quad M_B = 1, \quad \varphi_B = \pi + M_\varphi = 240^\circ$$

la rete anticipatrice deve amplificare e anticipare di

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{0.538} = 1.8587, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 45.1^\circ$$

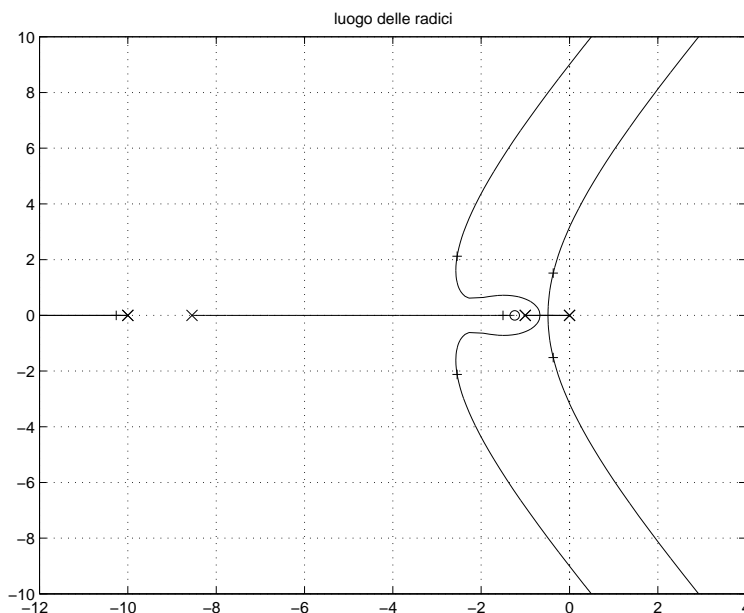
- Sostituendo i parametri  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega_A = 2.02$  nelle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri cercati:  $\tau_1 = 0.806$  e  $\tau_2 = 0.117$ .

- Risposte temporali dei sistemi  $G(s)$  e  $C(s)G(s)$  retroazionati:



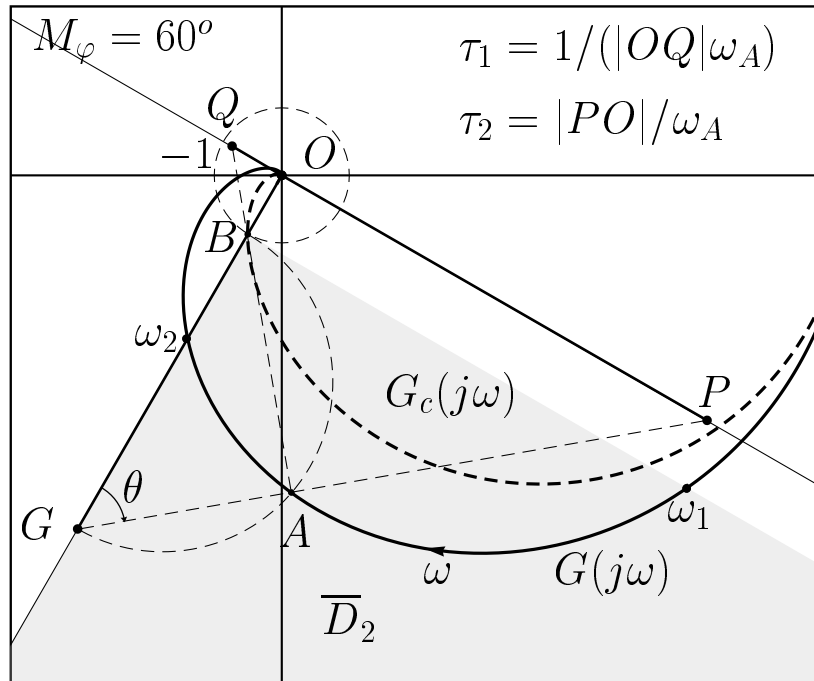
L'utilizzo di una rete anticipatrice ha migliorato sia il transitorio (diminuendo la sovravelongazione) che la prontezza del sistema (il tempo di salita è più basso).

- Il luogo delle radici dei due sistemi retroazionati:



La presenza della rete anticipatrice ha sensibilmente spostato verso il semipiano negativo i poli dominanti del sistema retroazionato.

b) Sintesi di una rete ritardatrice. Specifica: margine di fase:  $M_\varphi = 60^\circ$ .



- Sistema  $G(s)$  e rete corretttrice  $C(s)$ :

$$G(s) = \frac{5000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+30)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+1.04s)}{(1+6.25s)}$$

- Per portare il punto  $A$

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A}, \quad \rightarrow \quad M_A = 4.672, \quad \varphi_A = 271.82^\circ$$

nel punto  $B$

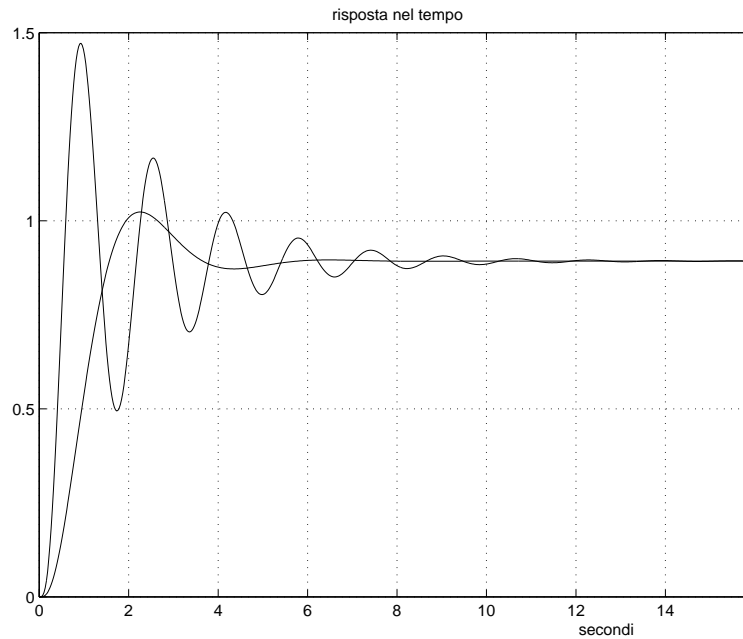
$$B = e^{j(\pi+M_\varphi)} \quad \rightarrow \quad M_B = 1, \quad \varphi_B = \pi + M_\varphi = 240^\circ$$

la rete corretttrice deve attenuare e ritardare di

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{4.672} = 0.214, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -31.82^\circ$$

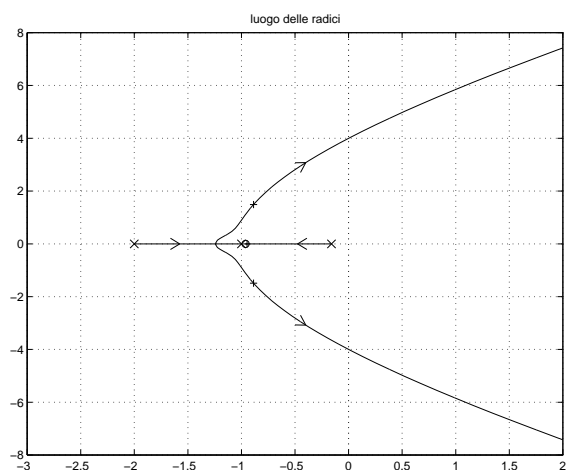
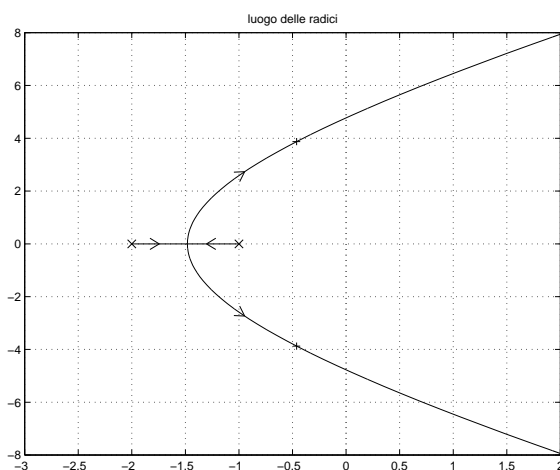
- Sostituendo i parametri  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega_A = 1.16$  nelle formule di inversione si ottengono i seguenti valori dei parametri cercati:  $\tau_1 = 1.04$  e  $\tau_2 = 6.25$ .

- Risposte temporali dei sistemi  $G(s)$  e  $C(s)G(s)$  retroazionati:



L'utilizzo di una rete ritardatrice ha migliorato il transitorio diminuendo la sovraelongazione, però ha reso il sistema meno pronto (tempo di salita più elevato).

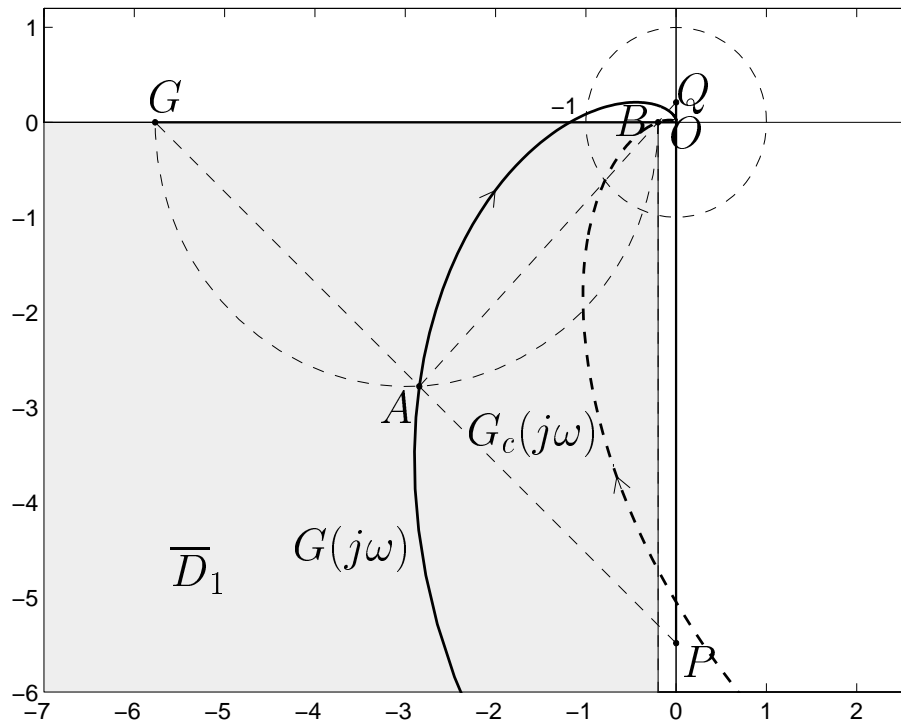
- Il luogo delle radici dei due sistemi retroazionati:



La presenza della rete corretttrice ha spostato verso il semipiano negativo i poli dominanti del sistema retroazionato aumentando contemporaneamente il coefficiente di smorzamento  $\delta$ .



c) Sintesi di una rete ritardatrice. Specifica: margine di ampiezza  $M_\alpha = 5$ .



- Sistema  $G(s)$  e rete corretttrice  $C(s)$ :

$$G(s) = \frac{10000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+30)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+0.396s)}{(1+11.42s)}$$

- Per portare il punto  $A$

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A} \quad \rightarrow \quad M_A = 3.978, \quad \varphi_A = 224.4^\circ$$

nel punto  $B$

$$B = -\frac{1}{M_\alpha} \quad \rightarrow \quad M_B = \frac{1}{M_\alpha} = \frac{1}{5}, \quad \varphi_B = -\pi$$

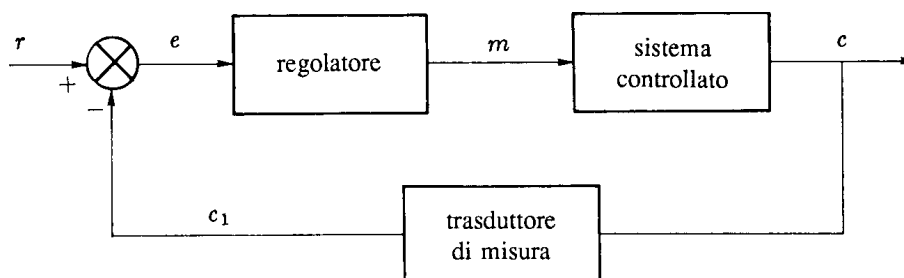
la rete corretttrice deve attenuare e ritardare di

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{M_A M_\alpha} = 0.0503, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -44.4^\circ$$

- Sostituendo i parametri  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega_A = 2.4$  nelle formule di inversione si ottengono i seguenti valori dei parametri cercati:  $\tau_1 = 0.396$  e  $\tau_2 = 11.42$ .

## Regolatori standard PID

- Schema a blocchi di un controllo in retroazione:



- Nel controllo di molti processi industriali le caratteristiche dinamiche dei sistemi controllati possono variare entro ampi limiti: risulta economicamente conveniente unificare gli apparati di controllo.
- Tipicamente si utilizzano apparati di controllo standard, ma provvisti di dispositivi di correzione con parametri regolabili entro ampi limiti, così da poter essere adattati al particolare sistema di regolazione in cui vengono inseriti.
- Posto  $G_c(s) = M(s)/E(s)$ , si distinguono i seguenti tipi standard:

1. *Regolatore proporzionale (P)* :

$$G_c(s) = K_p ;$$

2. *Regolatore integrale (I)* :

$$G_c(s) = \frac{K_p}{T_i s} ;$$

3. *Regolatore proporzionale-integrale (PI)* :

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) ;$$

4. *Regolatore proporzionale-derivativo (PD)* :

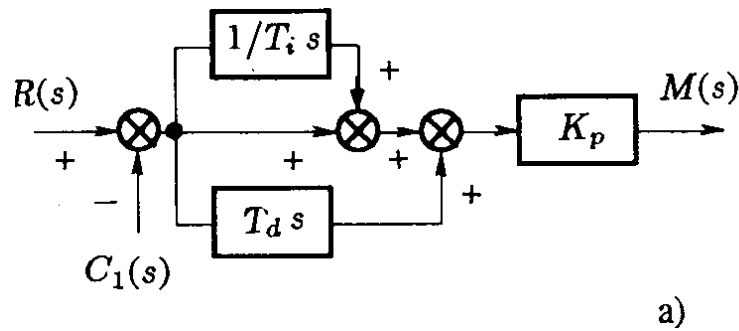
$$G_c(s) = K_p (1 + T_d s) ;$$

5. *Regolatore proporzionale-integrale-derivativo (PID)* :

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) .$$

La costante  $K_p$  si dice *sensibilità proporzionale*,  $T_d$  *costante di tempo dell'azione derivativa*,  $T_i$  *costante di tempo dell'azione integrale*.

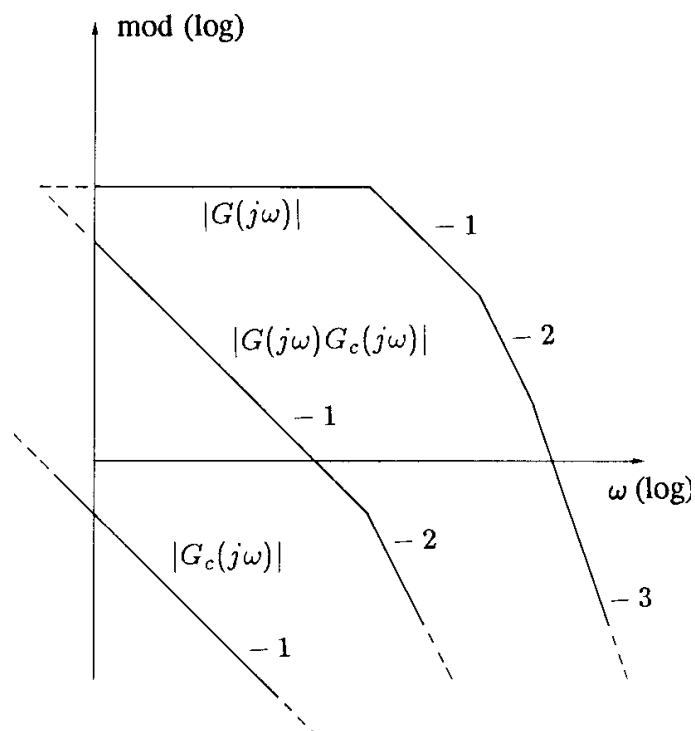
- Struttura generale del regolatore PID:



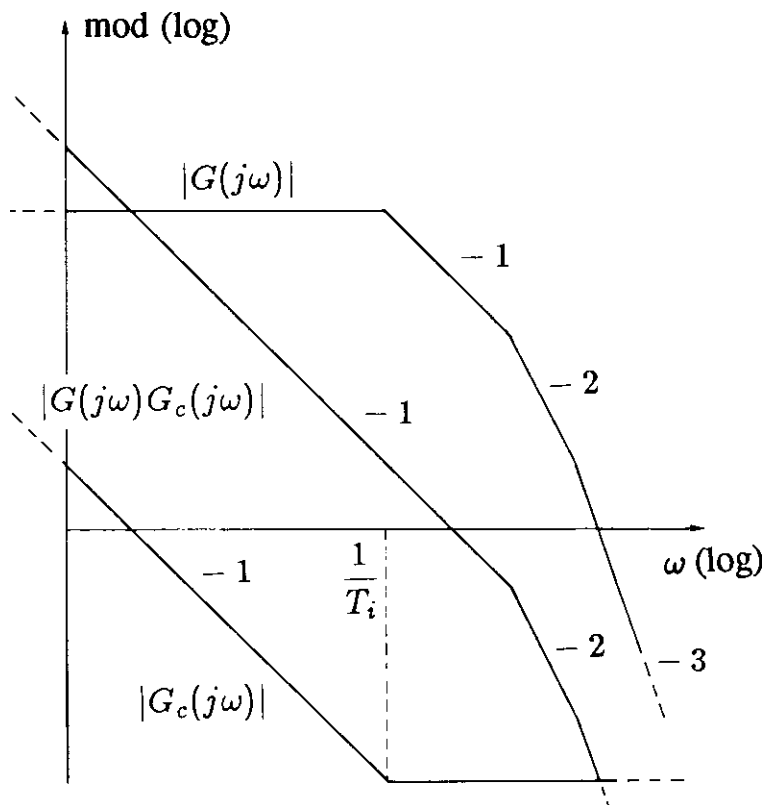
Per ciò che riguarda i vantaggi relativi e le particolarità di impiego dei vari tipi di regolatori precedentemente citati, valgono considerazioni analoghe a quelle sviluppate per le reti correttrici.

- Il regolatore  $P$  si impiega quando il processo consente un'elevata costante di guadagno di anello senza pregiudizio per la stabilità, come i sistemi aventi il comportamento dinamico di un integratore (ad esempio il controllo di un livello mediante la variazione di una portata) o caratterizzati dalla presenza di una sola costante di tempo predominante.

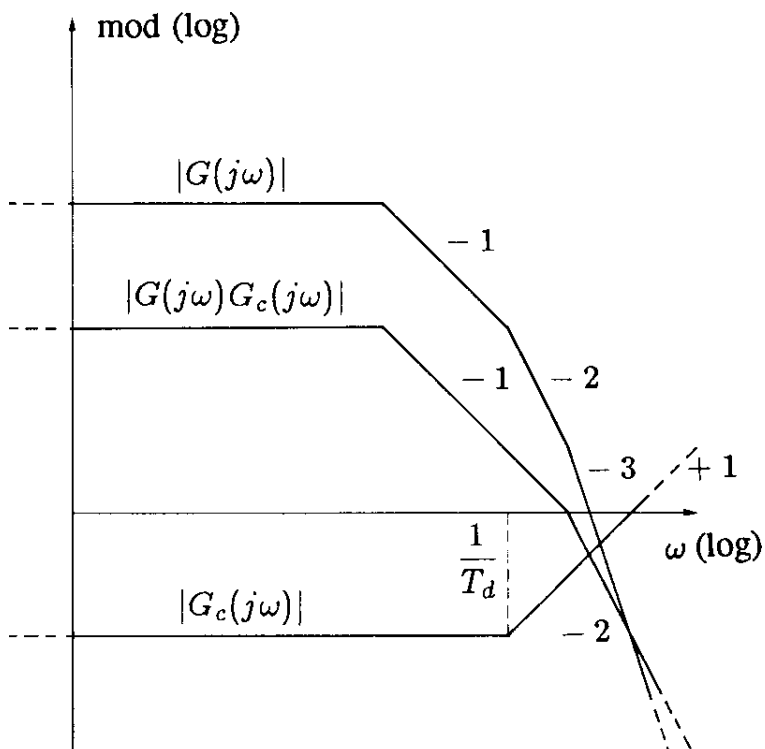
- Il regolatore  $I$  si impiega per sistemi di tipo 0 di difficile stabilizzazione e per sistemi con ritardi finiti dominanti: in quest'ultimo caso infatti un regolatore  $P$  non si può utilizzare perché corrisponde a un errore a regime inaccettabile, mentre un controllo integrale garantisce un comportamento stabile con errore statico nullo.



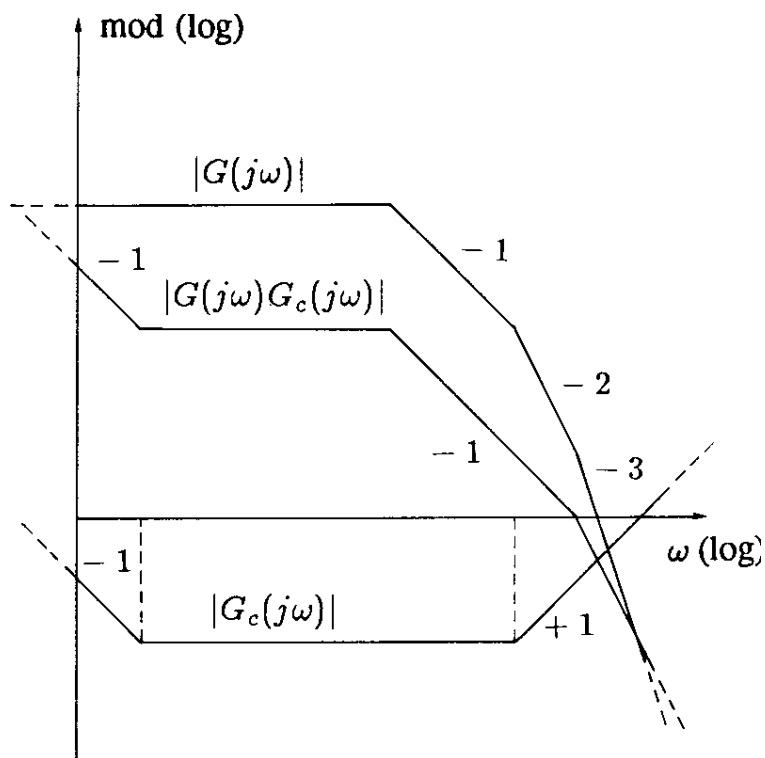
- Il regolatore  $PI$  rispetto al regolatore  $I$  consente di conservare una maggiore banda passante e quindi una maggiore prontezza di risposta.



- Il regolatore  $PD$  si impiega invece per sistemi già intrinsecamente di tipo 1 o per sistemi di tipo 0 per migliorarne la velocità di risposta: il suo intervento è del tutto analogo a quello di una rete anticipatrice.



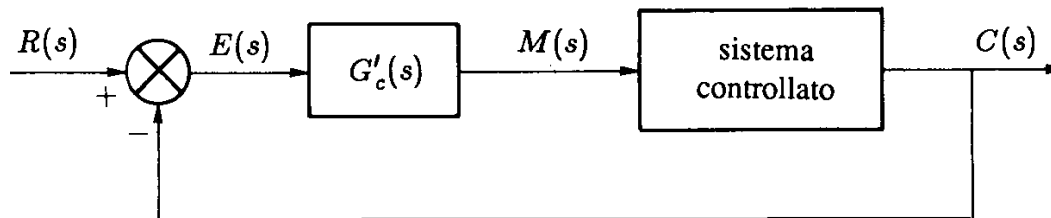
- Il regolatore  $PID$  si può impiegare, in alternativa al  $PD$ , per i sistemi di tipo 0 e presenta il vantaggio di consentire, oltre a una buona prontezza di risposta, anche un errore statico nullo.



Il regolatore a triplice azione è pertanto il più generale: scegliendo opportunamente i valori dei tre parametri che ne caratterizzano il comportamento dinamico si possono infatti ottenere, come casi particolari, le azioni di tutti i tipi di regolatori precedentemente presi in esame.

## Taratura dei regolatori standard

Molti industriali (es. chimici e petrolchimici) sono caratterizzati da modelli fortemente nonlineari. In questi casi la scelta dei parametri dei regolatori si effettua in molti casi con metodi semiempirici.

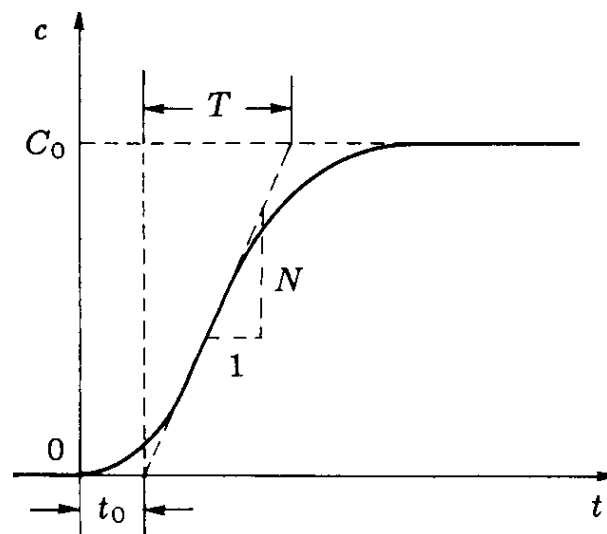


### Metodo di Ziegler-Nichols

Fornisce i valori di primo tentativo dei parametri del regolatore in funzione di alcuni parametri della risposta al gradino (spesso aperiodica) del sistema controllato.

Il sistema fisico può essere approssimato con un sistema del primo ordine:

$$G(s) \simeq \frac{K e^{-t_0 s}}{1 + T s}$$



I valori dei parametri caratteristici si ricavano dalla curva di risposta al gradino nel punto di flesso:

- $t_0$ : tempo di ritardo;
- $T$ : costante di tempo;
- $R := t_0/T = N t_0/C_0$ : rapporto di ritardo;
- $N := C_0/T$ : velocità di risposta;
- $K := C_0/M_0$ : guadagno statico ( $M_0$  è l'ampiezza del gradino applicato).

Posto  $G'_c(s) = M(s)/E(s)$ , i valori dei parametri consigliati da Ziegler e Nichols, modificati da Cohen e Coon, sono:

1. Controllo  $P$ :

$$G'_c(s) = K'_p, \quad \text{con} \quad K'_p = \frac{M_0}{N t_0} \left(1 + \frac{R}{3}\right);$$

2. Controllo  $I$ :

$$G'_c(s) = \frac{K'_p}{T_i s}, \quad \text{con} \quad \frac{K'_p}{T_i} = \frac{4 M_0}{N t_0^2} \frac{R^2}{1 + 5 R};$$

3. Controllo  $PI$ :

$$G'_c(s) = K'_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), \quad \text{con}$$

$$K'_p = \frac{M_0}{N t_0} \left(\frac{9}{10} + \frac{R}{12}\right), \quad T_i = t_0 \frac{30 + 3 R}{9 + 20 R};$$

4. Controllo  $PD$ :

$$G'_c(s) = K'_p (1 + T_d s), \quad \text{con}$$

$$K'_p = \frac{M_0}{N t_0} \left(\frac{5}{4} + \frac{R}{6}\right), \quad T_d = t_0 \frac{6 - 2 R}{22 + 3 R};$$

5. Controllo  $PID$ :

$$G'_c(s) = K'_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right), \quad \text{con}$$

$$K'_p = \frac{M_0}{N t_0} \left(\frac{4}{3} + \frac{R}{4}\right), \quad T_i = t_0 \frac{32 + 6 R}{13 + 8 R}, \quad T_d = t_0 \frac{4}{11 + 2 R}.$$

## Metodo della banda proporzionale di pendolazione

La banda proporzionale di pendolazione è definita come il valore della banda proporzionale  $1/K_0$  che, in assenza delle azioni integrale e derivativa, porta il sistema di regolazione in condizione di stabilità limite, cioè in oscillazione permanente. In tale condizione si determina il periodo di oscillazione  $T_0$  e si applicano le seguenti formule, pure dovute a Ziegler e Nichols:

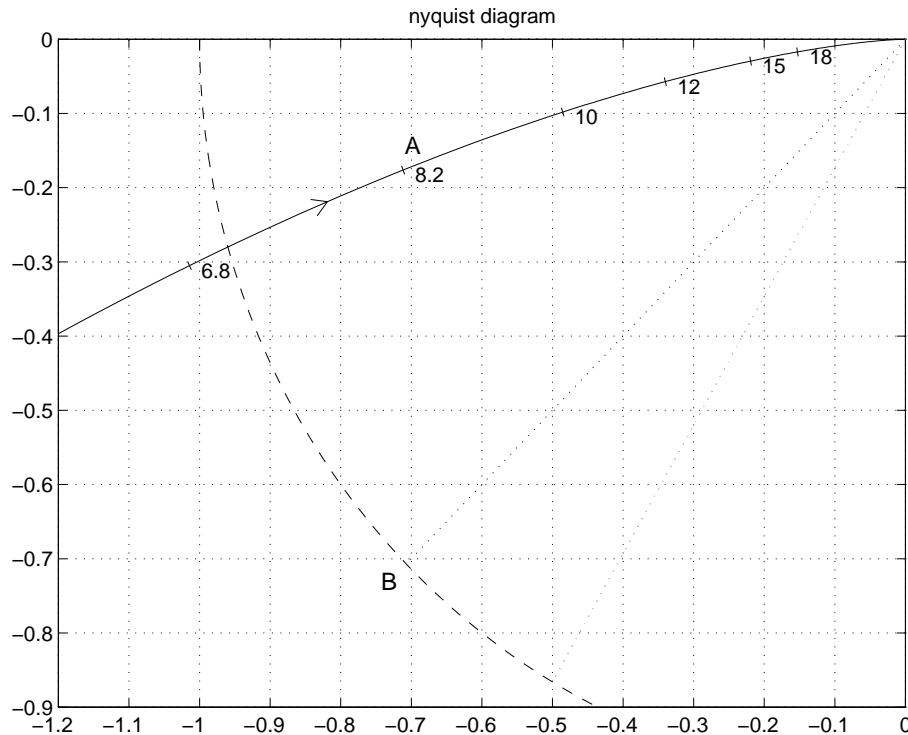
1. Controllo  $P$ :  $K'_p = 0,5 K_0$ ;

2. Controllo  $PI$ :  $K'_p = 0,45 K_0$ ,  $T_i = 0,85 T_0$ ;

3. Controllo  $PD$ :  $K'_p = 0,5 K_0$ ,  $T_d = 0,2 T_0$ ;

4. Controllo  $PID$ :  $K'_p = 0,6 K_0$ ,  $T_i = 0,5 T_0$ ,  $T_d = 0,12 T_0$ .

- *Esempio.* Si consideri il seguente diagramma di Nyquist.



Calcolare i parametri  $\tau_1$  e  $\tau_2$  di una rete anticipatrice ( $\tau_1 > \tau_2$ )

$$T(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da portare il punto  $A$  in  $B$ , cioè in modo da imporre al sistema retroazionato il margine di fase  $M_\varphi = 45^\circ$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 8.2$ .

- L'ampiezza  $M_A$  e la fase  $\varphi_A$  del punto  $A$  si ottengono dal diagramma polare della funzione di risposta armonica  $G(j\omega) = M_A e^{j\varphi_A}$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 8.2$ :

$$M_A \simeq \sqrt{0.71^2 + 0.176^2} = 0.73$$

$$\varphi_A \simeq \arctan \frac{0.176}{0.71} - 180 = 14 - 180 = -166^\circ = 194^\circ$$



- Il guadagno  $M$  e l'anticipo  $\varphi$  che la rete anticipatrice deve introdurre alla pulsazione  $\omega = 8.2$  per portare il punto  $A$  in  $B$  sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{0.73} = 1.37 \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 225^\circ - 194^\circ = 31^\circ$$

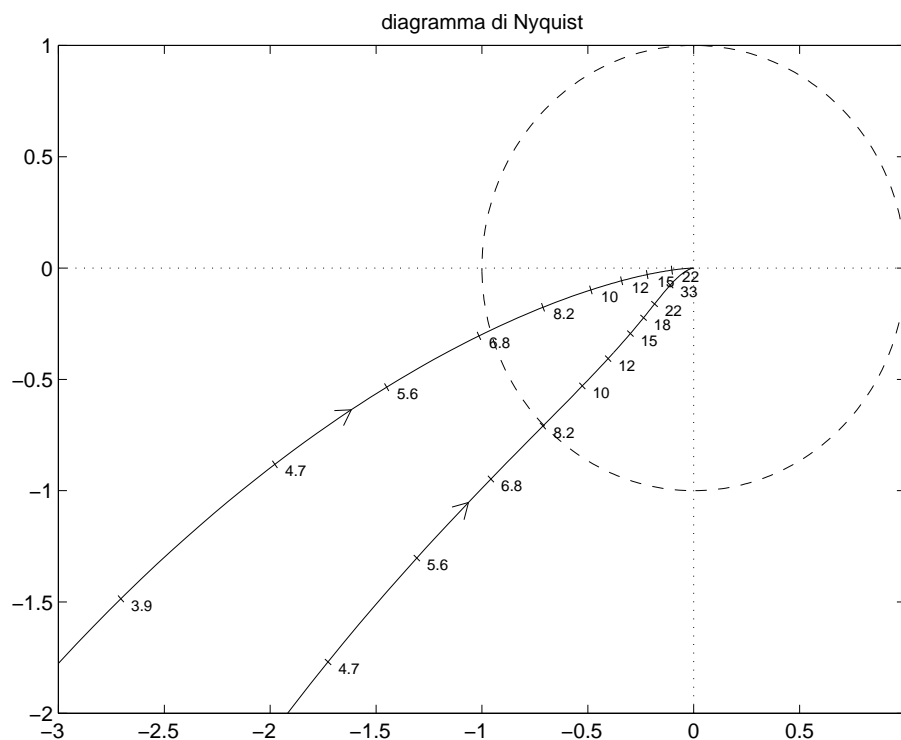
- Sostituendo questi valori nelle formule di inversione si ricava

$$\tau_1 = \frac{1.37 - \cos 31^\circ}{8.2 \sin 31^\circ} = 0.1214, \quad \tau_2 = \frac{\cos 31^\circ - \frac{1}{1.37}}{8.2 \sin 31^\circ} = 0.0301$$

per cui la rete anticipatrice cercata è

$$T(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{1 + 0.1214s}{1 + 0.0301s}$$

- L'andamento del diagramma di Nyquist del sistema originario  $G(s)$  e del sistema compensato  $T(s)G(s)$ .

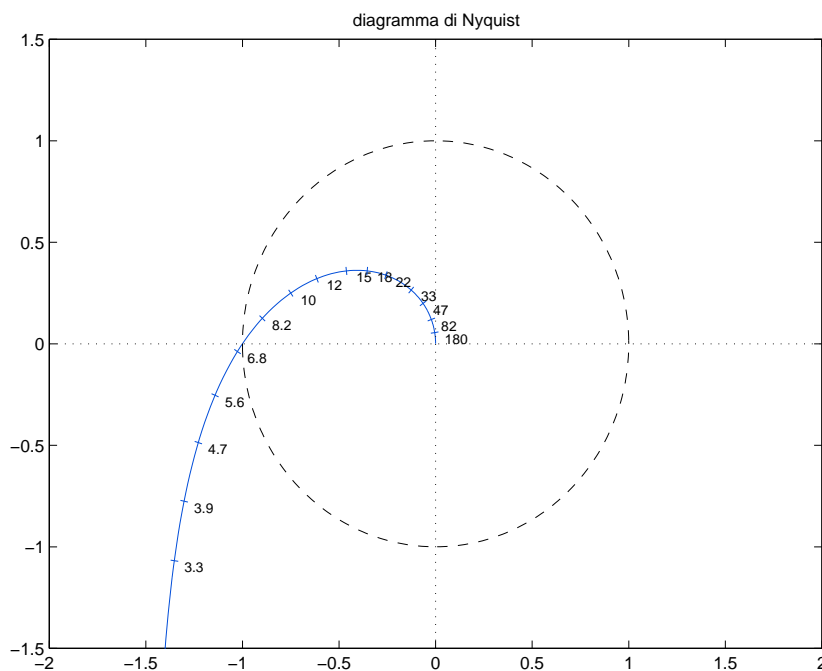


## Progetto di reti ritardatrici: esempi.

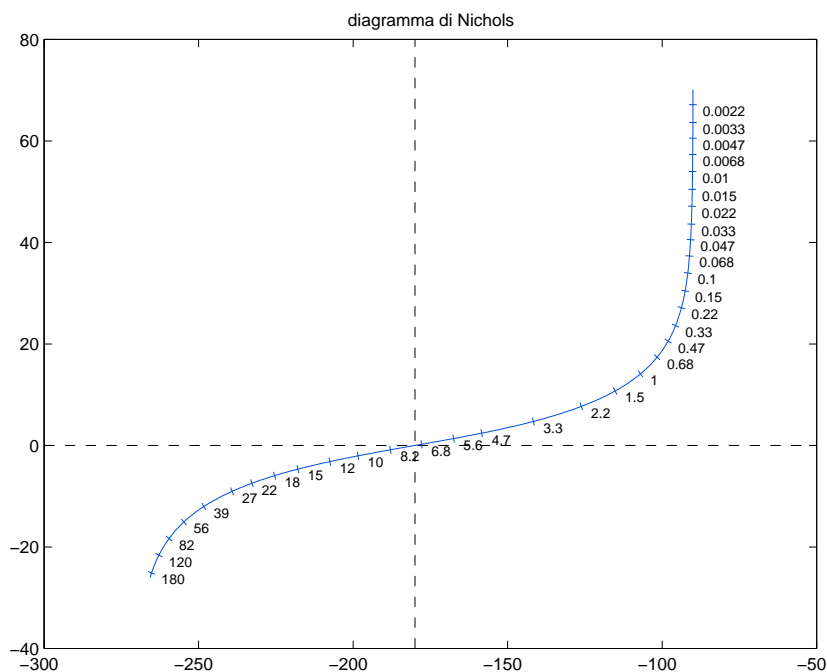
- Consideriamo la funzione di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{10(5 - s)}{s(s + 10)}$$

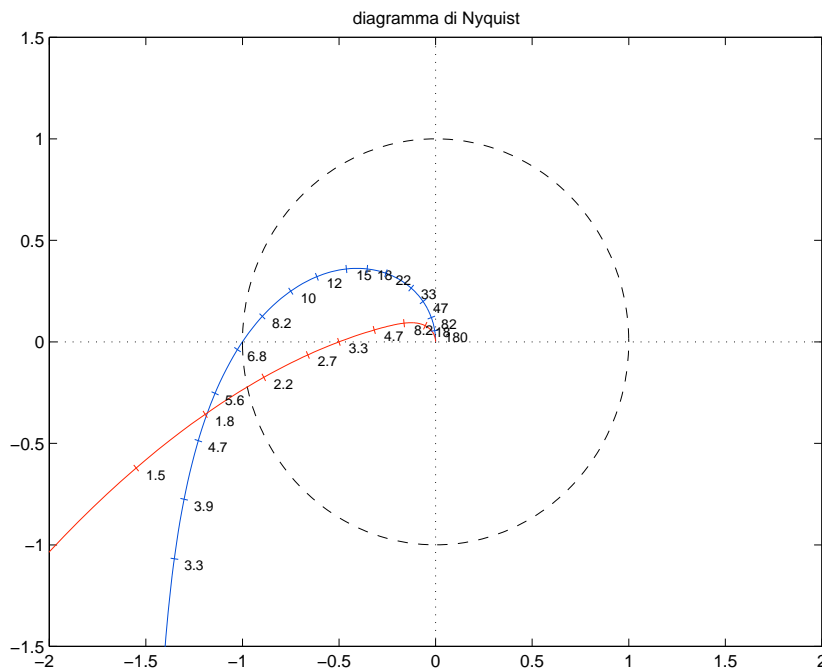
- Diagramma di Nyquist:



- Diagramma di Nichols:



- Progetto con specifica sul margine di ampiezza (piano di Nyquist):



- Determinazione del punto  $B$ :

$$M_a = 2 \quad \rightarrow \quad B : M_B = \frac{1}{M_a} = 0.5 \quad \varphi_B = -180^\circ$$

- Rete ritardatrice: scelta del punto  $A$ :

$$\omega = 3.3 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -1.353 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = -1.069$$

$$M_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 1.724 = 4.731 \text{db}$$

$$\varphi_A = \operatorname{atan2} \left( \frac{y_A}{x_A} \right) = -141.7^\circ$$

- La rete ritardatrice che “porta” il punto  $A$  nel punto  $B$  richiesto è caratterizzata quindi da:

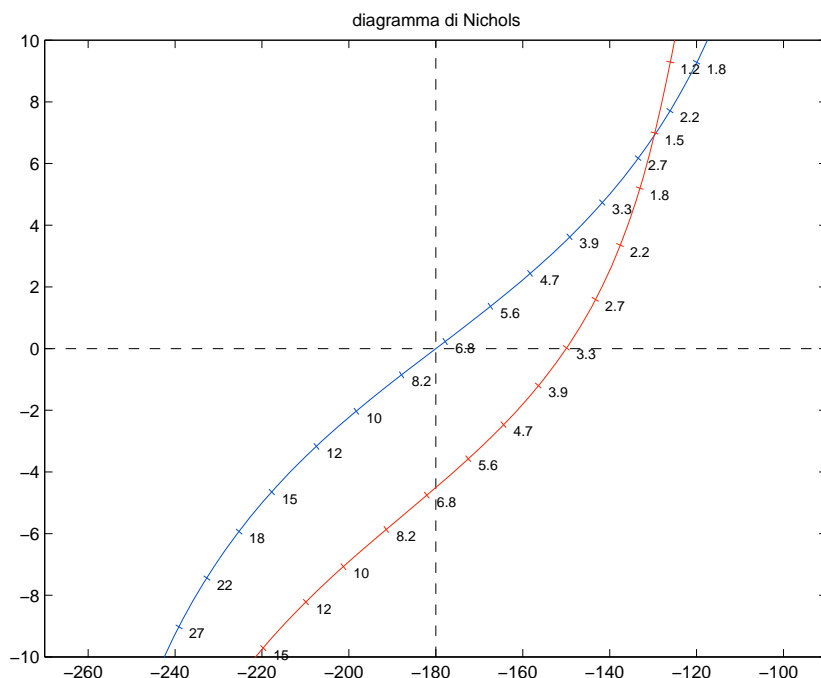
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.29$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -38.3^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.2418$$

$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 1.3022$$

- Progetto con specifica sul margine di fase (piano di Nichols):



- Determinazione del punto  $B$ :

$$M_f = 30^\circ \quad \rightarrow \quad B : M_B = 1 \quad \varphi_B = -150^\circ$$

- Rete ritardatrice: scelta del punto  $A$ :

$$\omega = 3.3 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -1.353 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = -1.069$$

$$M_A = 4.731 \text{db} = 1.724$$

$$\varphi_A = -141.7^\circ$$

- La rete ritardatrice che “porta” il punto  $A$  nel punto  $B$  richiesto è caratterizzata quindi da:

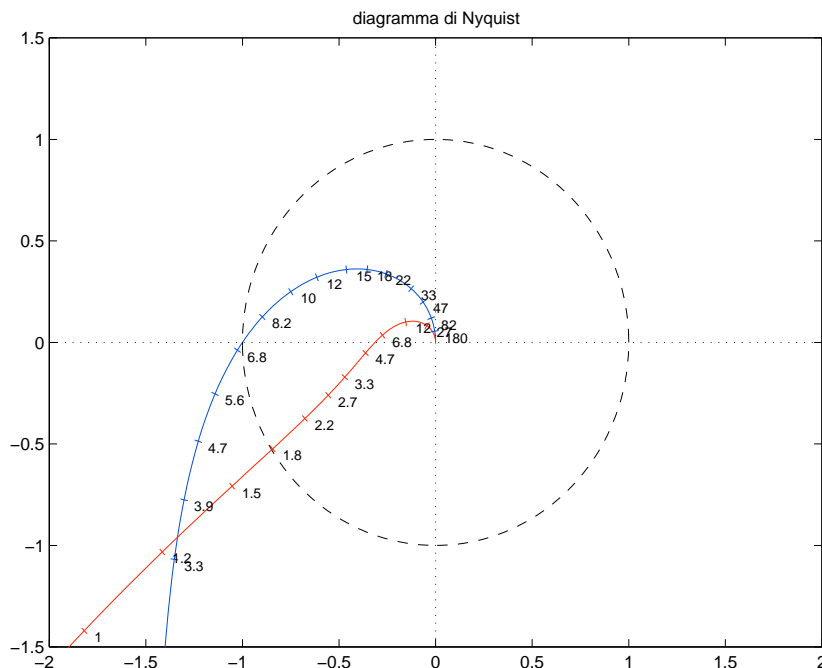
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.58$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -8.31^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.8585$$

$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 1.5404$$

- Progetto con specifica “mista” (piano di Nyquist):



- Determinazione del punto  $B$ :

$$B : M_B = 0.5 \quad \varphi_B = -160^\circ$$

- Rete ritardatrice: scelta del punto  $A$ :

$$\omega = 3.3 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -1.353 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = -1.069$$

$$M_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 1.724 = 4.731 \text{db}$$

$$\varphi_A = \operatorname{atan2} \left( \frac{y_A}{x_A} \right) = -141.7^\circ$$

- La rete ritardatrice che “porta” il punto  $A$  nel punto  $B$  richiesto è caratterizzata quindi da:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.29$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -18.3^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.636$$

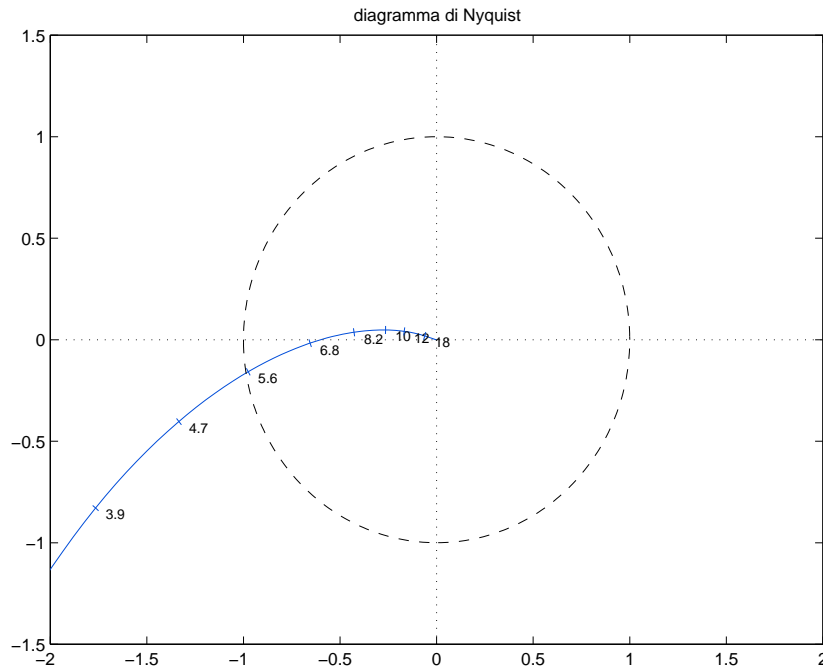
$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 2.41$$

## Progetto di reti anticipatrici: esempi.

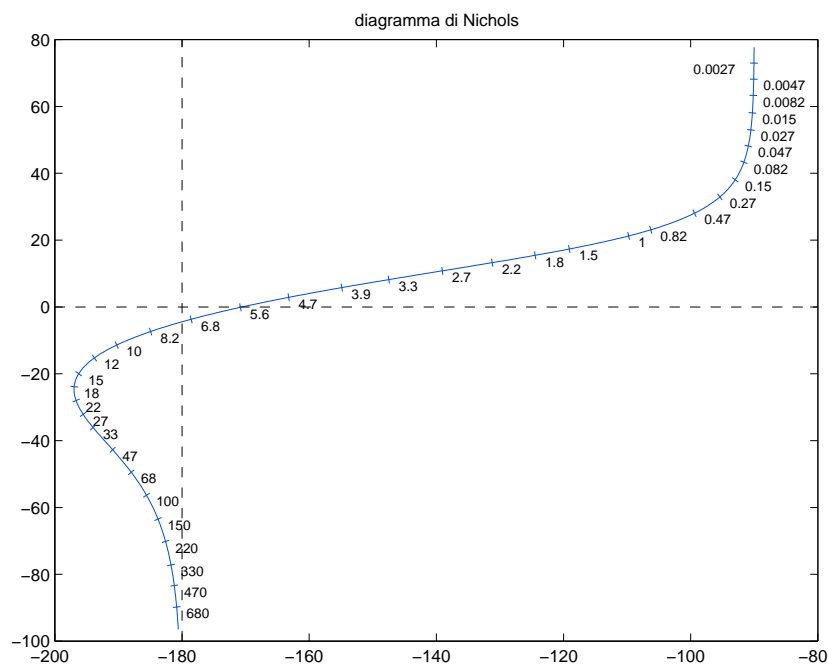
- Consideriamo la funzione di trasferimento:

$$G_2(s) = \frac{15(s + 20)}{s(s + 5)^2}$$

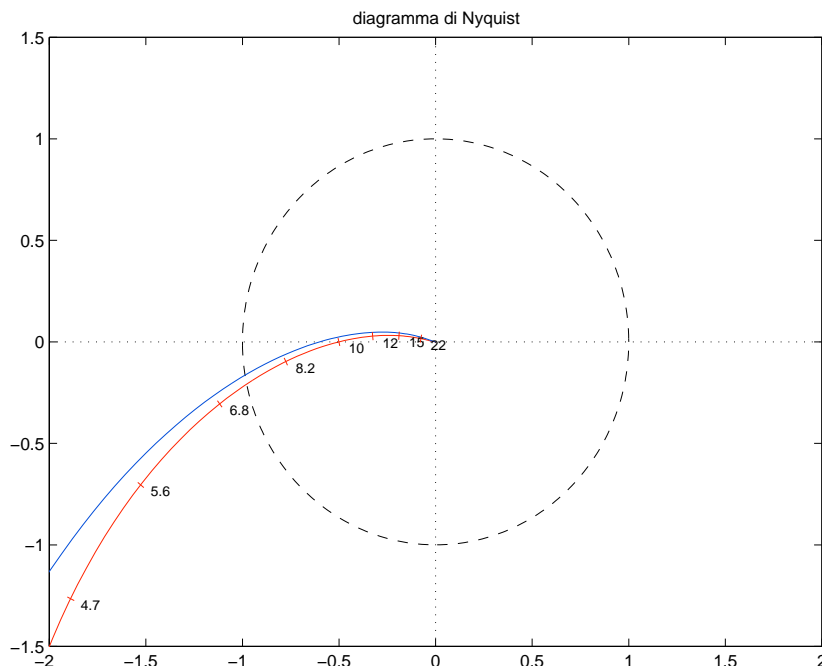
- Diagramma di Nyquist:



- Diagramma di Nichols:



- Progetto con specifica sul margine di ampiezza (piano di Nyquist):



- Determinazione del punto  $B$ :

$$M_a = 2 \quad \rightarrow \quad B : M_B = \frac{1}{M_a} = 0.5 \quad \varphi_B = -180^\circ$$

- Rete anticipatrice: scelta del punto  $A$ :

$$\omega = 10 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -0.264 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = 0.048$$

$$M_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 0.2683 = -11.43\text{db}$$

$$\varphi_A = \operatorname{atan2}\left(\frac{y_A}{x_A}\right) = 169.7^\circ$$

- La rete anticipatrice che “porta” il punto  $A$  nel punto  $B$  richiesto è caratterizzata quindi da:

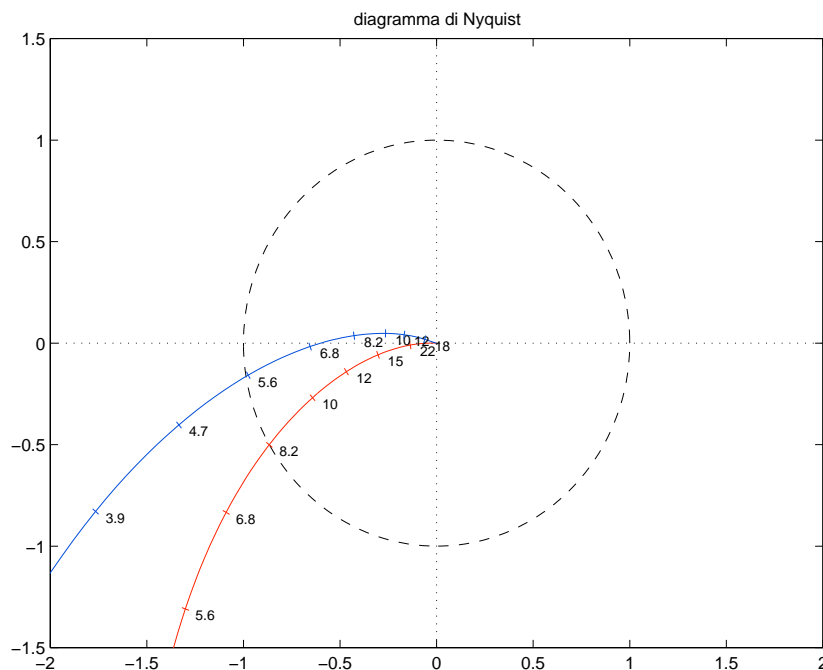
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 1.8634$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = 10.3^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.4917$$

$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 0.25$$

- Progetto con specifica sul margine di fase (piano di Nichols):



- Determinazione del punto  $B$ :

$$M_f = 30^\circ \quad \rightarrow \quad B : M_B = 1 \quad \varphi_B = -150^\circ$$

- Rete anticipatrice: scelta del punto  $A$ :

$$\omega = 8.2 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -0.4271 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = 0.037$$

$$M_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 0.4287 = -7.357 \text{db}$$

$$\varphi_A = \operatorname{atan2} \left( \frac{y_A}{x_A} \right) = 175^\circ$$

- La rete anticipatrice che “porta” il punto  $A$  nel punto  $B$  richiesto è caratterizzata quindi da:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.58$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -8.31^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.8585$$

$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 1.5404$$