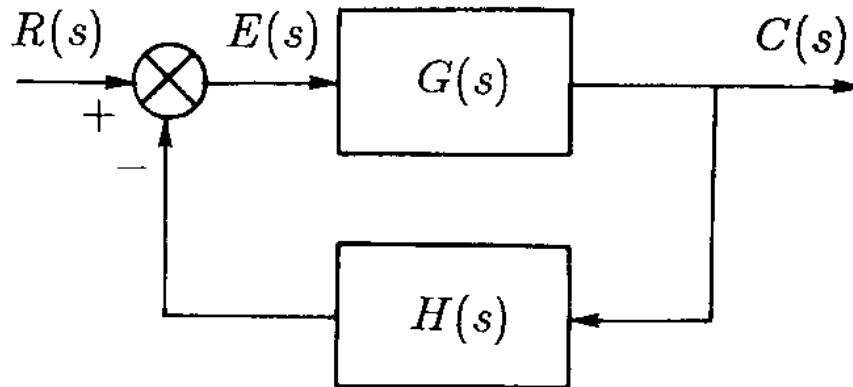


Luogo delle radici

- Si consideri lo schema in retroazione:



- L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$1 + G(s) H(s) = 0$$

- Si suppone che il prodotto $G(s) H(s)$ sia una funzione razionale fratta posta nella forma

$$G(s) H(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad n \geq m$$

e che la costante di guadagno K_1 sia positiva.

- Al variare del parametro K_1 da 0 a ∞ , le radici dell'equazione caratteristica descrivono una curva nel piano s , cui si dà il nome di *luogo delle radici*.
- Il luogo delle radici risulta di grande utilità per giudicare l'effetto di variazioni della costante di guadagno sulla stabilità e sulla risposta del sistema in retroazione.

- Il metodo si può modificare facilmente per ottenere le variazioni delle radici dell'equazione caratteristica in funzione di parametri diversi dalla costante di guadagno di anello, come ad esempio poli o zeri del sistema ad anello aperto: in tali versioni modificate il metodo viene indicato con il nome di *contorno delle radici*.

- Posto

$$G_1(s) := \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

l'equazione caratteristica del sistema può essere riscritta come

$$1 + K_1 G_1(s) = 0$$

- Se la costante K_1 è positiva, si ha che

$$|G_1(s)| = \frac{1}{K_1}, \quad \arg G_1(s) = (2\nu + 1)\pi \quad (\nu \text{ intero})$$

- Se K_1 è negativa, si ha

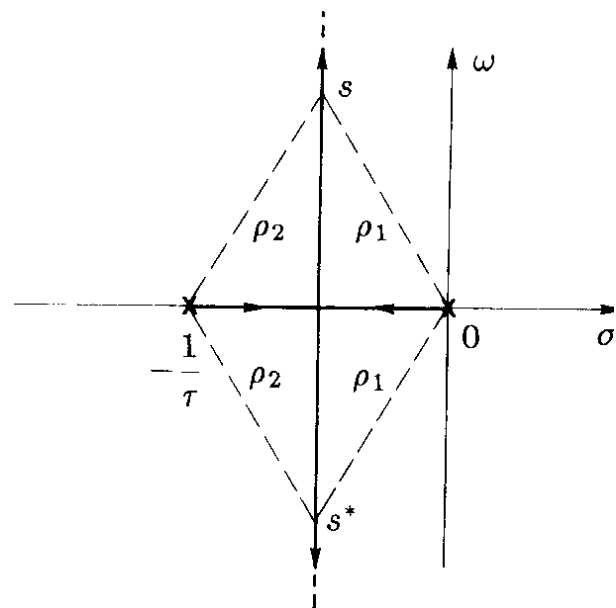
$$|G_1(s)| = -\frac{1}{K_1}, \quad \arg G_1(s) = 2\nu\pi \quad (\nu \text{ intero})$$

- L'equazione relativa agli argomenti è sufficiente per la costruzione del luogo, mentre la prima serve per la graduazione del luogo stesso in funzione di K_1 .

- Esempio. Dato il sistema

$$G(s)H(s) = \frac{K_1}{s \left(s + \frac{1}{\tau} \right)}$$

al variare di K_1 da 0 a ∞ si ottiene l'andamento riportato a fianco.



Proprietà del luogo delle radici

Il luogo delle radici presenta alcune proprietà che ne vincolano l'andamento e ne agevolano la costruzione.

- **Proprietà 1.** Il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della funzione di trasferimento ad anello aperto $K_1 G_1(s)$, che si intersecano sulle radici multiple. Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ e termina in uno zero di $G_1(s)$ o in un punto all'infinito.
- **Proprietà 2.** Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.
- **Proprietà 3.** Se la costante K_1 è positiva, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e poli. Se la costante K_1 è negativa, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e poli.
- **Proprietà 4.** Se la costante K_1 è positiva, l'angolo secondo il quale il luogo delle radici lascia un polo p_i è

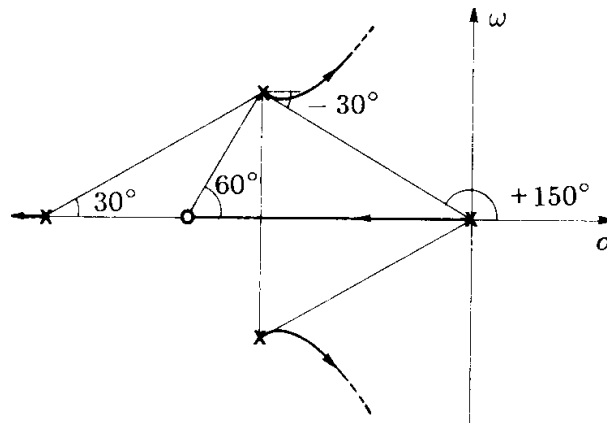
$$(2\nu + 1)\pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \in \mathcal{J}'} \arg(p_i - p_j),$$

in cui è $\mathcal{J}' := \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$; l'angolo secondo il quale il luogo tende a uno zero z_i è

$$(2\nu + 1)\pi - \sum_{j \in \mathcal{J}''} \arg(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^n \arg(z_i - p_j),$$

in cui è $\mathcal{J}'' := \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$. Se la costante K_1 è negativa, nell'enunciato si sostituisce $2\nu\pi$ a $(2\nu+1)\pi$.

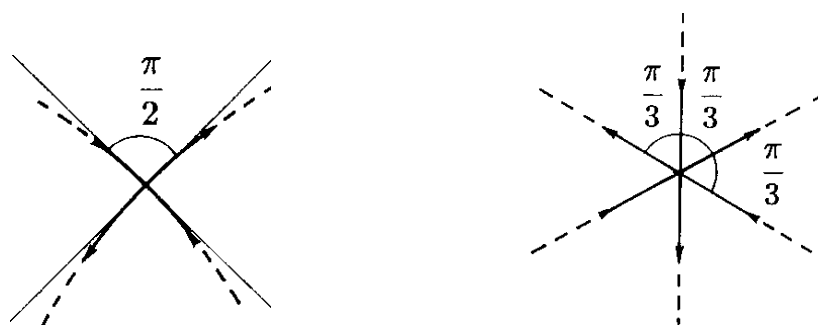
- Esempio:



- **Proprietà 5.** Una radice multipla di ordine h corrisponde a un punto comune ad h rami del luogo delle radici, in cui, oltre alla $1 + K_1 G_1(s) = 0$, sono soddisfatte le relazioni che esprimono l'annullarsi delle derivate della funzione di guadagno di anello fino alla $(h-1)$ -esima.

$$\frac{d}{ds} G_1(s) = 0, \dots, \frac{d^{h-1}}{ds^{h-1}} G_1(s) = 0$$

- I due rami che convergono in un punto corrispondente ad una radice doppia, vi convergono da direzioni opposte; nel punto si originano altri due rami, che ne divergono secondo direzioni opposte, disposte a 90° rispetto alle direzioni di arrivo dei primi



- **Proprietà 6.** In corrispondenza di una radice di ordine h il luogo presenta h rami entranti e h rami uscenti, alternati fra di loro, le cui tangenti dividono lo spazio circostante in settori uguali, di π/h radianti.

- **Proprietà 7.** Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{n - m} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right)$$

se la costante K_1 è positiva, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{(2\nu + 1)\pi}{n - m} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n - m - 1)$$

se la costante K_1 è negativa, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{2\nu\pi}{n - m} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n - m - 1)$$

- La proprietà 7 comporta un'interessante conseguenza: gli asintoti di un sistema in retroazione negativa avente funzione di trasferimento di anello stabile e a fase minima (cioè con tutti i poli e gli zeri nel semipiano sinistro del piano complesso) intersecano l'asse immaginario in punti diversi dall'origine, il che spiega il fatto che i poli dominanti, cioè quelli che per primi, all'aumentare del guadagno, tendono a passare nel semipiano destro, sono di regola complessi coniugati.
- Per il tracciamento del luogo delle radici, specie per ciò che riguarda i rami corrispondenti ai poli dominanti, è utile la conoscenza dei punti di intersezione del luogo con l'asse immaginario e dei relativi valori del parametro K_1 . Poiché tali punti corrispondono al limite di stabilità del sistema in retroazione, per la loro determinazione si può impiegare il criterio di Routh, che fornisce il valore di K_1 corrispondente al limite di stabilità: risolvendo l'equazione ausiliaria, si ottengono poi i valori della pulsazione in corrispondenza dei quali avviene l'intersezione con l'asse immaginario.

- **Esempio** Si consideri la funzione di trasferimento di anello

$$G(s)H(s) = \frac{K_1}{s(s+1)(s+2)}.$$

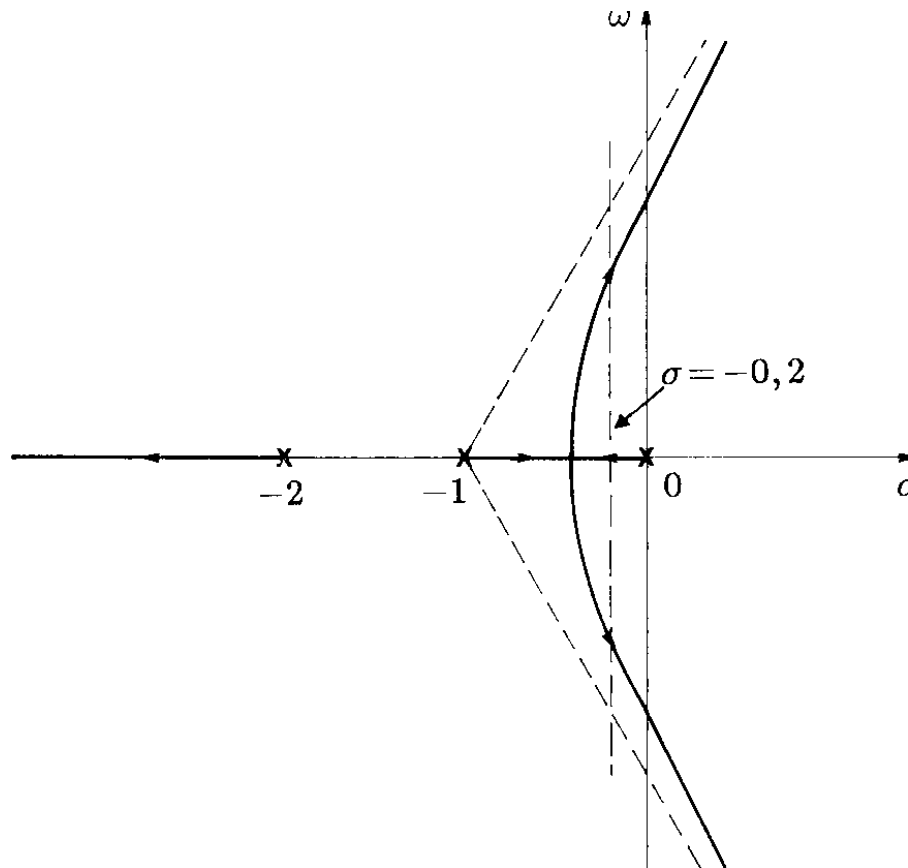
Essendo $n-m=3$, il luogo delle radici presenta tre asintoti che si incontrano nel punto:

$$\sigma_a = \frac{0 - 1 - 2}{3} = -1$$

e formano con l'asse reale gli angoli:

$$\vartheta_{a0} = 60^\circ, \quad \vartheta_{a1} = 180^\circ, \quad \vartheta_{a2} = -60^\circ$$

- L'andamento del luogo delle radici è il seguente:



- Nota: all'aumentare di K il sistema retroazionato diventa instabile.

- Il punto di diramazione sull'asse reale si ottiene risolvendo l'equazione ottenuta derivando l'equazione caratteristica.

$$\frac{d}{ds}[1 + G(s)H(s)] = 0 \quad \rightarrow \quad 3s^2 + 6s + 2 = 0 .$$

Essa ammette due radici reali, una delle quali non appartiene al luogo. L'altra, che costituisce il punto di diramazione cercato, è $s_0 = -0,422$.

- L'equazione caratteristica è

$$s(s+1)(s+2) + K_1 = 0 ,$$

cioè

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K_1 = 0$$

La tabella di Routh ad essa relativa è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & K_1 \\ 1 & (6 - K_1)/3 & 0 \\ 0 & K_1 & \end{array}$$

Il limite di stabilità è dato da $K_1 = 6$. Sostituendo nella tabella tale valore, si ottiene l'equazione ausiliaria

$$3s^2 + 6 = 0 ,$$

che ammette le radici $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2} = \pm j 1,41$. Queste corrispondono alle intersezioni del luogo con l'asse immaginario.

Il procedimento indicato può servire anche per trovare le intersezioni del luogo delle radici con una retta verticale $\sigma = \lambda$ diversa dall'asse immaginario.

Per ottenere queste intersezioni basta utilizzare il cambiamento di variabile $z := s - \lambda$, cioè operare la sostituzione $s = z + \lambda$ nell'equazione caratteristica e applicare il criterio di Routh all'equazione in z così ottenuta.

Ad esempio, per calcolare l'intersezione del luogo delle radici con la retta verticale $\sigma = -0.2$, nell'equazione caratteristica del sistema si opera la sostituzione $s = z - 0.2$ ottenendo:

$$z^3 + 2.4 z^2 + 0.92 z - 0.288 + K_1 = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 0.92 \\ 2 & 2.4 & -0.288 + K_1 \\ 1 & 2.208 - (K_1 - 0.288) & \\ 0 & -0.288 + K_1 & \end{array}$$

Le intersezioni con l'asse verticale $\sigma = -0.2$ avvengono per:

$$K_{1a} = -0.288 \quad \text{e} \quad K_{1b} = 2.496$$

a cui corrispondono i seguenti poli:

$$p_a = -0.2 \quad \text{e} \quad p_{b1,2} = -0.2 \pm j \sqrt{\frac{2.208}{2.4}} = -0.2 \pm j 0.96$$

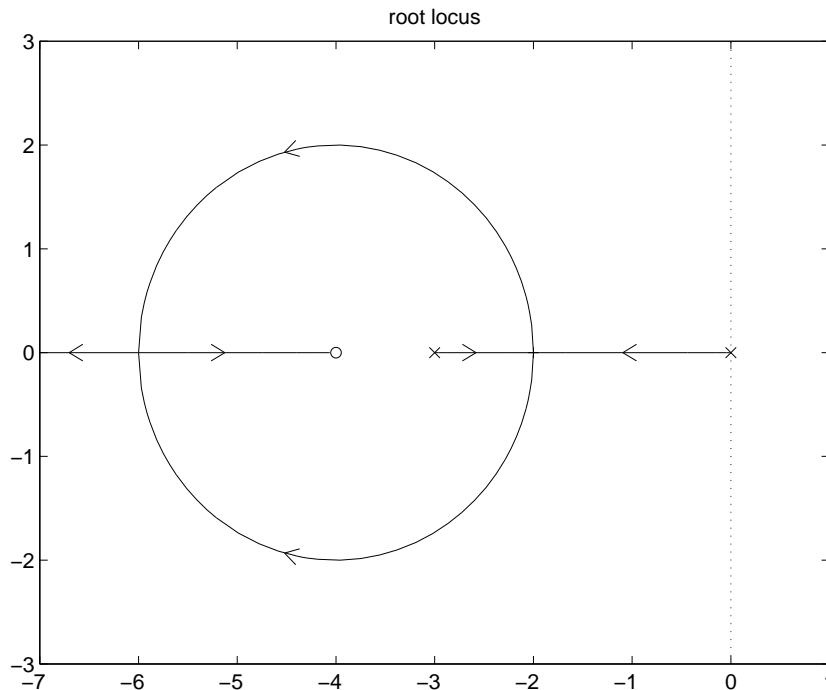
Esempio. Disegnare qualitativamente il luogo delle radici del seguente sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$.

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+3)}$$

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+4)}{s(s+3)} = 0$$

Il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$ è il seguente:



I punti di diramazione sull'asse reale si determinano come segue:

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{K(s+4)}{s(s+3)} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad s(s+3) - (s+4)(2s+3) = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + 8s + 12 = 0$$

I punti di diramazione sono posizionati in $\sigma_1 = -2$ e in $\sigma_2 = -6$. I corrispondenti valori di K si ricavano nel modo seguente:

$$K_1 = - \frac{1}{G(s)} \Big|_{s=\sigma_1} = 1, \quad K_2 = - \frac{1}{G(s)} \Big|_{s=\sigma_2} = 9$$

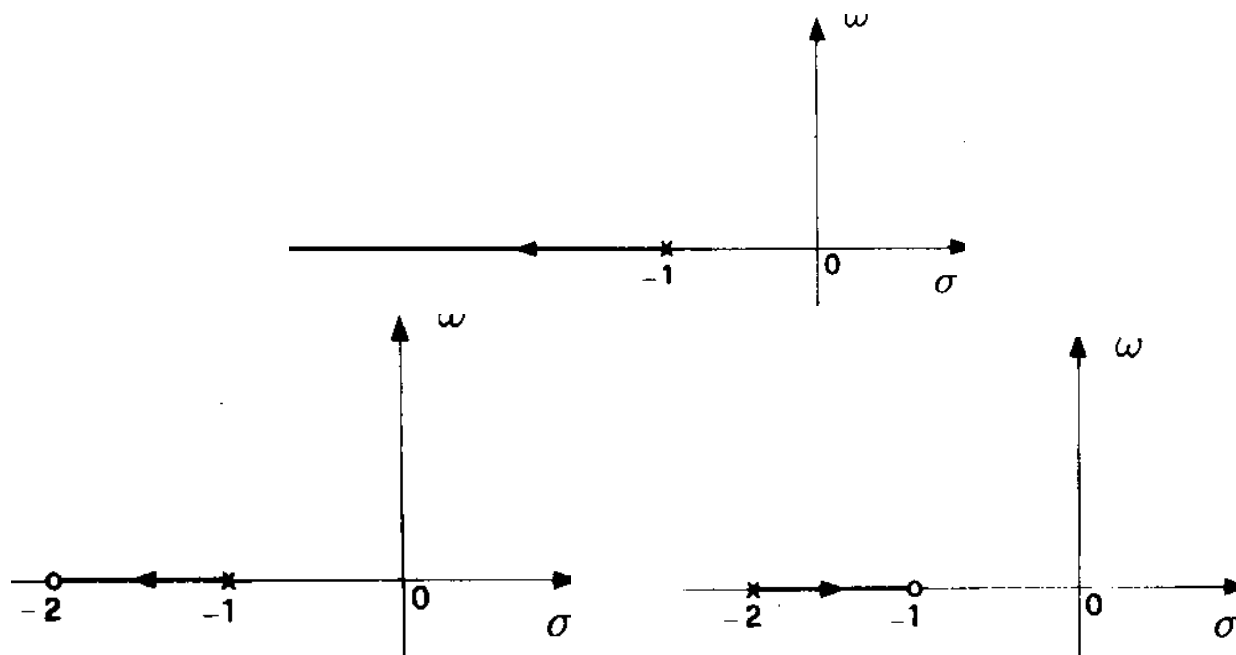
Nota. I due rami del luogo delle radici di un sistema avente solo due poli e uno zero, se escono dall'asse reale si spostano sempre lungo un tratto di circonferenza che ha centro nello zero e raggio $R = \sqrt{d_1 d_2}$, dove d_1 e d_2 sono la distanza dello zero dai 2 poli. Nel caso in esame si ha:

$$R = \sqrt{(4-1)(4-3)} = 2$$

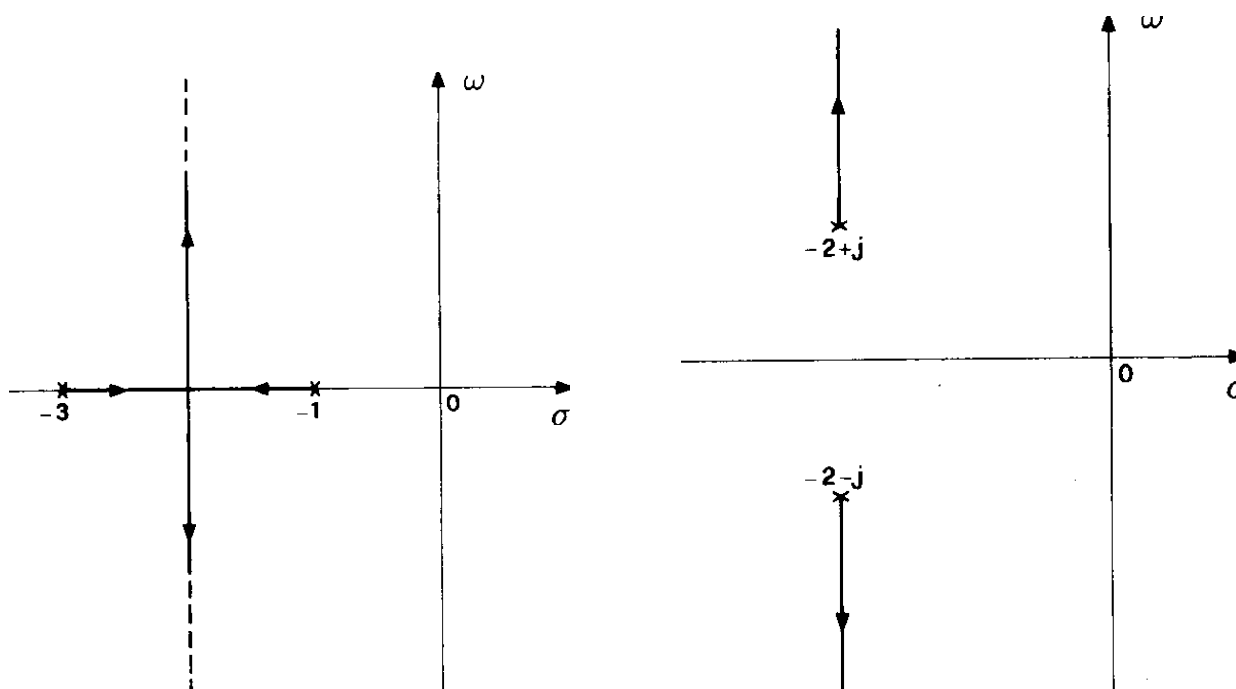
In questo caso, i punti di diramazione potevano anche essere calcolati utilizzando questa proprietà: $\sigma_1 = -4 + 2 = -2$, $\sigma_2 = -4 - 2 = -6$.

Alcuni esempi di luoghi delle radici

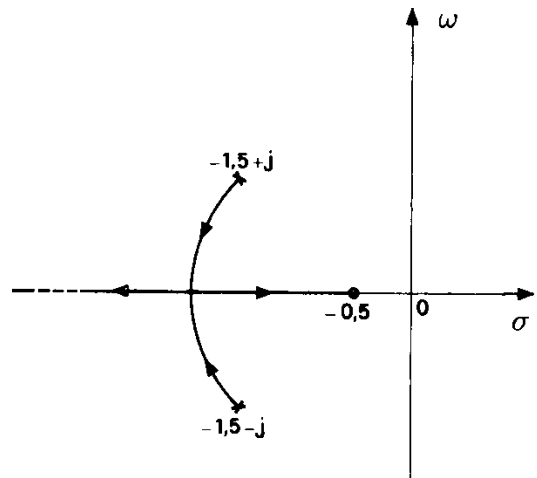
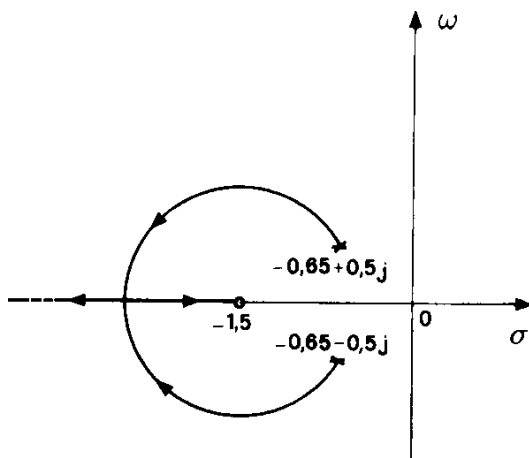
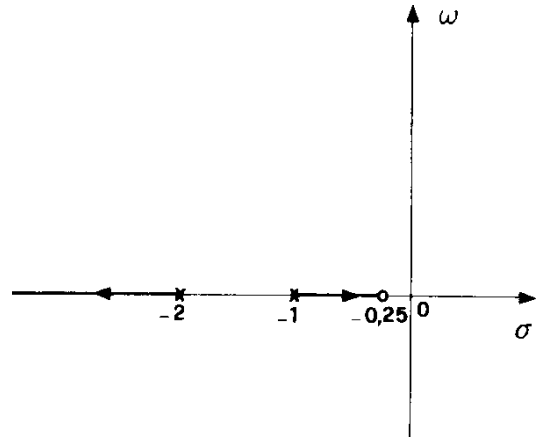
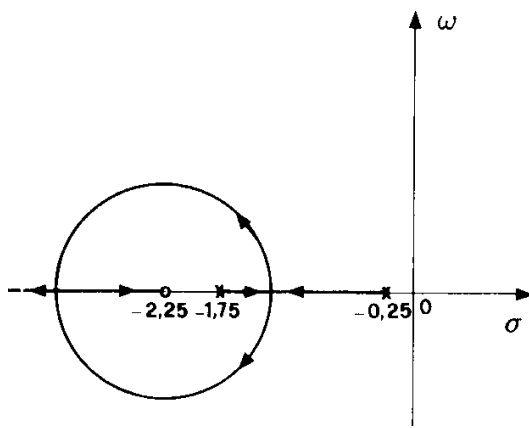
- Luogo delle radici di sistemi del primo ordine:



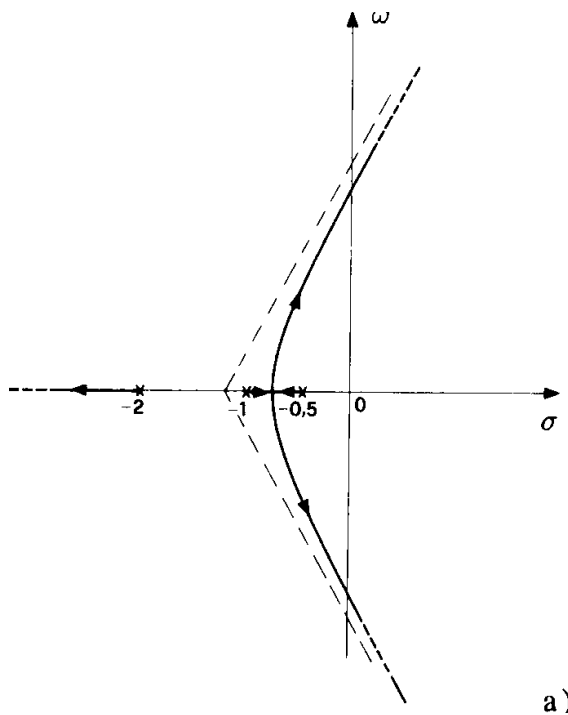
- Luogo delle radici di sistemi del secondo ordine:



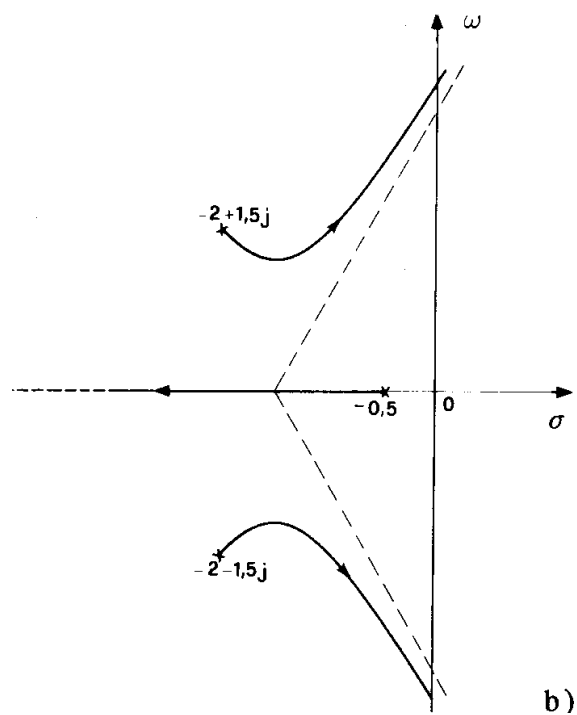
- Luogo delle radici di sistemi del secondo ordine:



- Luogo delle radici di sistemi del terzo ordine:

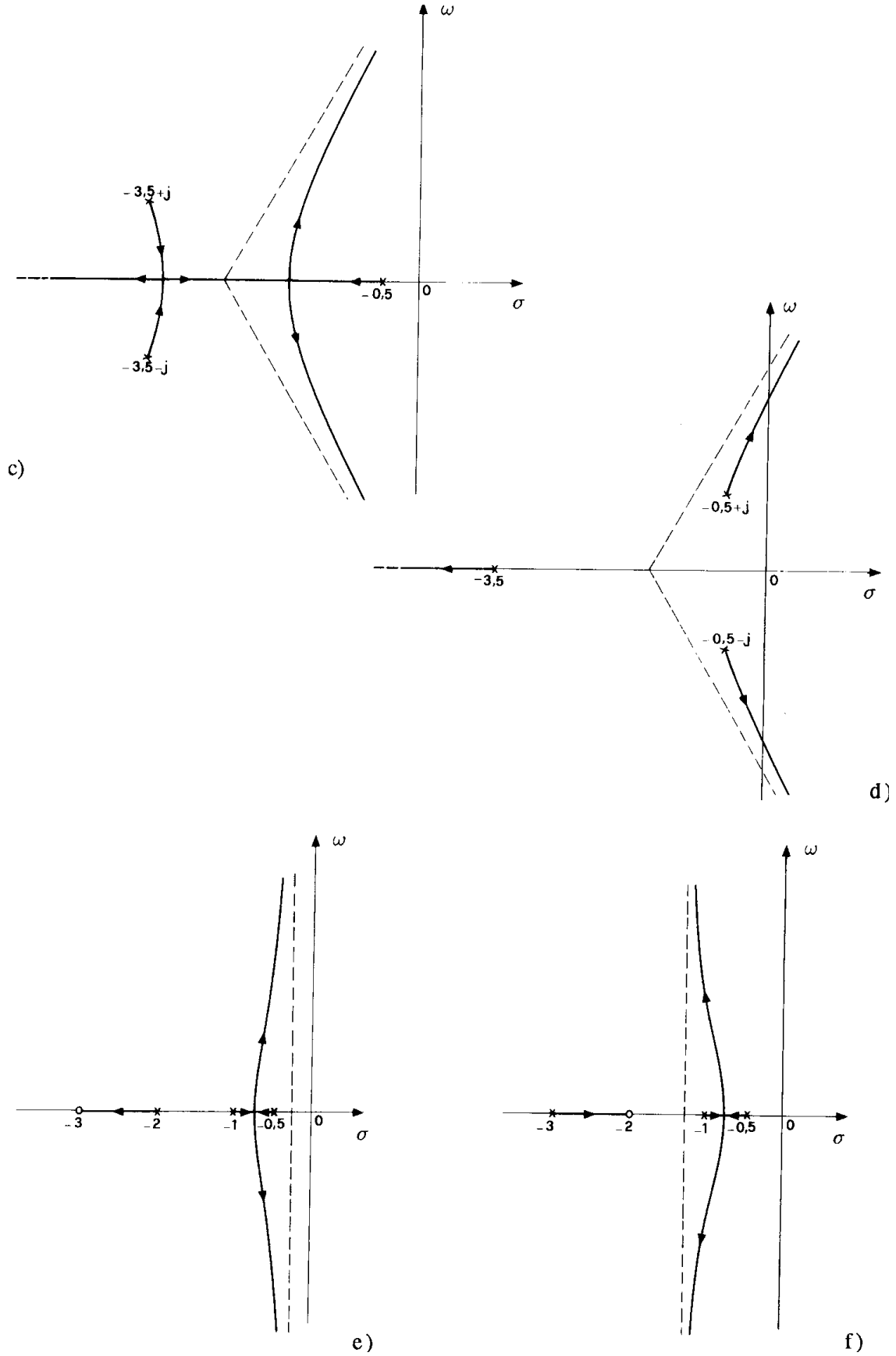


a)

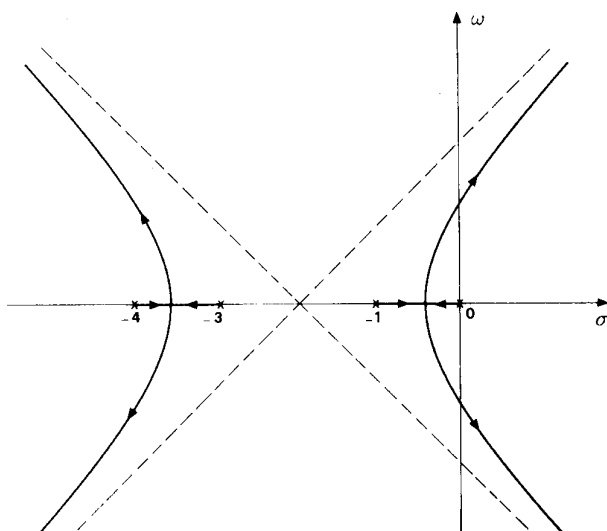


b)

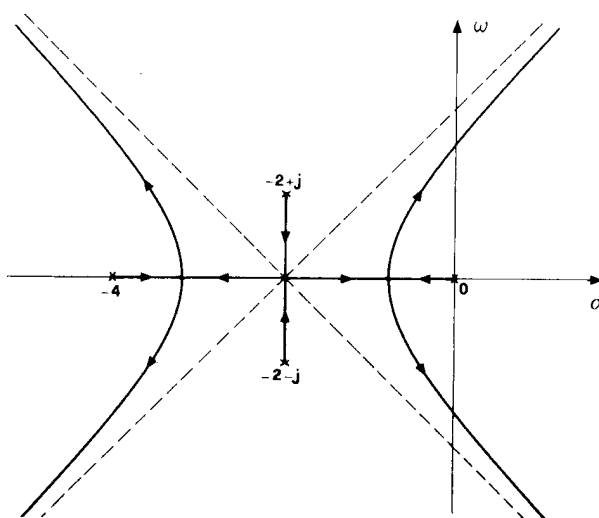
- Luogo delle radici di sistemi del terzo ordine:



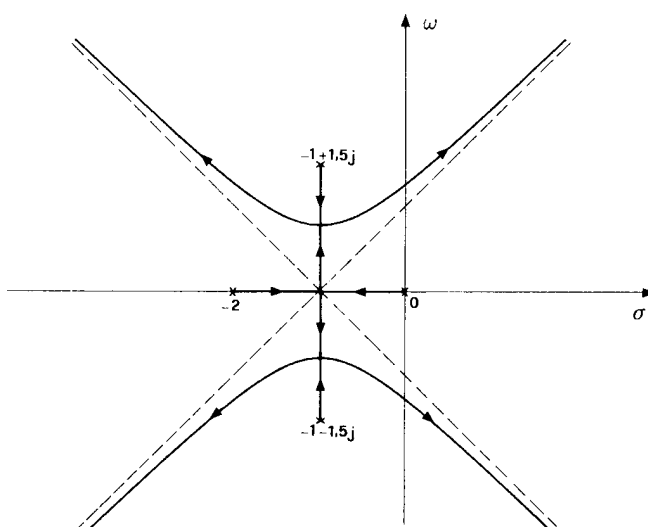
- Luogo delle radici di sistemi del quarto ordine:



a)



b)



c)

Contorno delle radici

- *Esempio* Si faccia riferimento alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + \frac{4(1 + 5\tau s)}{s(1 + \tau s)(1 + 0.2s)} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + G_2(s, \tau) = 0$$

Tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$.

- Si ha un problema di *contorno delle radici* tutte le volte che nell'equazione caratteristica il parametro che varia non è il guadagno K del sistema ma un qualunque altro parametro del sistema.
- Molto spesso, un problema di contorno delle radici può essere ricondotto ad un semplice problema di luogo delle radici procedendo nel seguente modo:

- 1) Si riscrive l'equazione caratteristica in forma polinomiale:

$$s(1 + \tau s)(1 + 0.2s) + 4(1 + 5\tau s) = 0$$

- 2) Si raccolgono tutti i termini che "moltiplicano" il parametro τ :

$$s(1 + 0.2s) + 4 + \tau[s^2(1 + 0.2s) + 20s] = 0$$

- 3) Si divide l'equazione caratteristica per il gruppo di termini che "non moltiplicano" il parametro τ :

$$1 + \frac{\tau[s^2(1 + 0.2s) + 20s]}{s(1 + 0.2s) + 4} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \underbrace{\frac{\tau s[s^2 + 5s + 100]}{s^2 + 5s + 20}}_{\tau G_3(s)} = 0$$

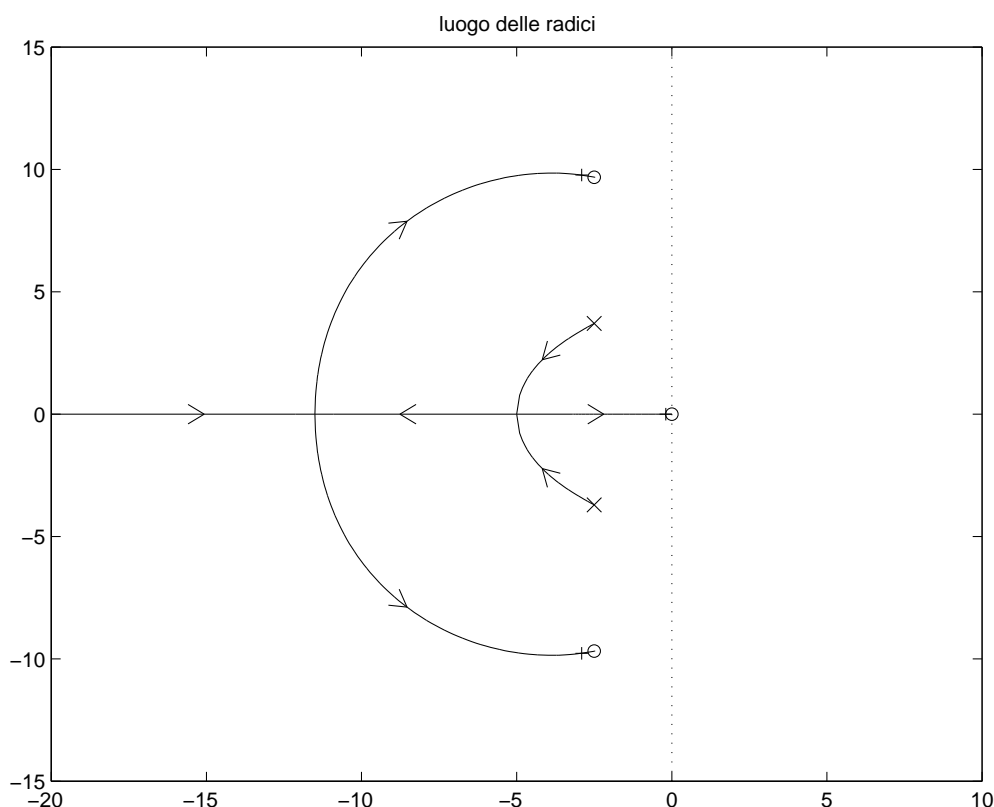
In questo modo ci si è ricondotti al semplice caso di studio del luogo delle radici della funzione $G_3(s)$ al variare del parametro τ .

- Questo procedimento mette in evidenza che *“un contorno delle radici può essere ricondotto ad un normale luogo delle radici tutte le volte che il parametro τ entra in modo lineare nell'equazione caratteristica del sistema retroazionato”*.
- Nel caso in esame, gli zeri e i poli della funzione $G_3(s)$ sono:

$$z_1 = 0, \quad z_{2,3} = \frac{-5 \pm j\sqrt{375}}{2} = -2.5 \pm j9.682$$

$$p_{1,2} = \frac{-5 \pm j\sqrt{55}}{2} = -2.5 \pm j3.708$$

- Andamento qualitativo del contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$:



Esempio. Calcolare il contorno delle radici del seguente sistema al variare di $\tau > 0$.

$$G(s) H(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)}$$

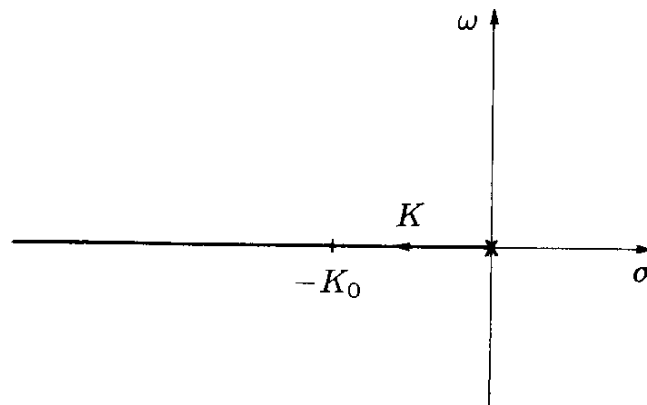
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K}{s(1 + \tau s)} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau s^2 + s + K = 0$$

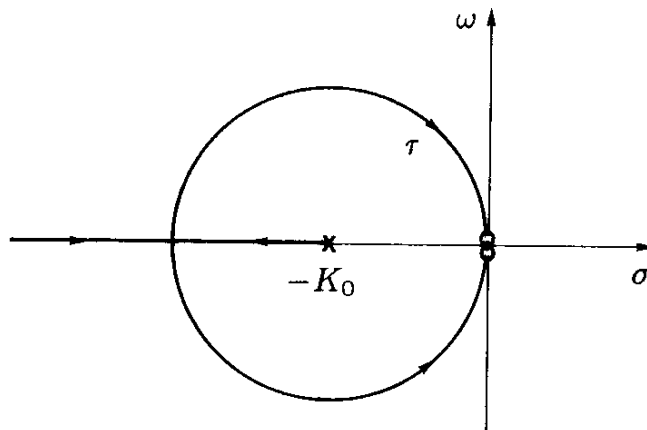
da cui si ottiene:

$$1 + \frac{\tau s^2}{s + K} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \tau G_3(s) = 0$$

Il luogo e il contorno delle radici del sistema $G(s)$ sono i seguenti:



a)



b)

Fissando un valore di K , che si indicherà con K_0 , si stabilisce il punto del luogo ($-K_0$) da cui si origina il contorno delle radici.

Si noti che in questo caso la funzione $G_3(s)$ è impropria: ha un solo polo e due zeri. In situazioni di questo tipo (cioè quando il grado relativo $n - m$ è negativo) il luogo delle radici presenta $|n - m|$ asintoti che sono percorsi in senso inverso, cioè dall'infinito al finito.

Esempio. Calcolare il contorno delle radici del seguente sistema $G(s)$ al variare di $\tau > 0$.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(1+\tau s)}$$

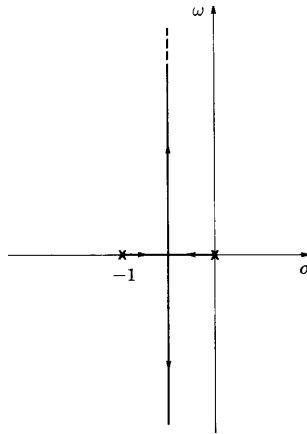
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(1+\tau s)} = 0 \quad \rightarrow \quad s(s+1) + K_0 + \tau s^2(s+1) = 0$$

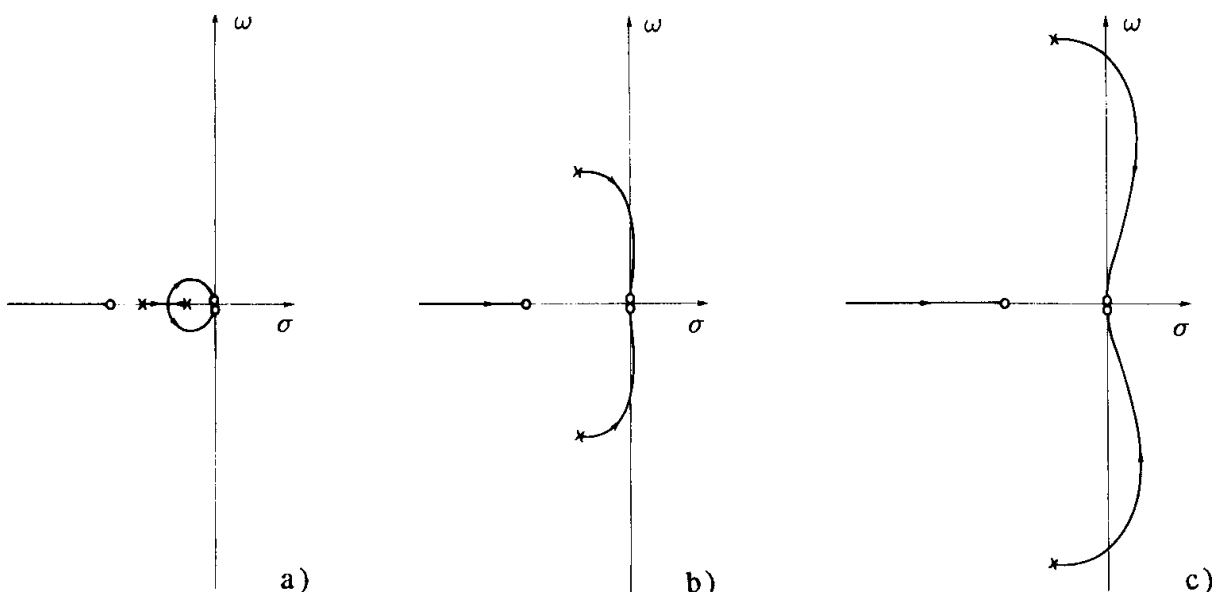
da cui si ottiene:

$$1 + \frac{\tau s^2(s+1)}{s(s+1) + K_0} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \tau G_3(s) = 0$$

Il luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare di K da 0 a ∞ :



I contorni delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$ e per tre diversi valori del parametro K :



Il contorno delle radici a) corrispondente a radici reali, gli altri due a radici complesse coniugate.

Esempio. Calcolare il contorno delle radici del seguente sistema $G(s)$ al variare di $\tau > 0$.

$$G(s) = \frac{K_1(1 + \tau s)}{s(s+1)(s+2)}$$

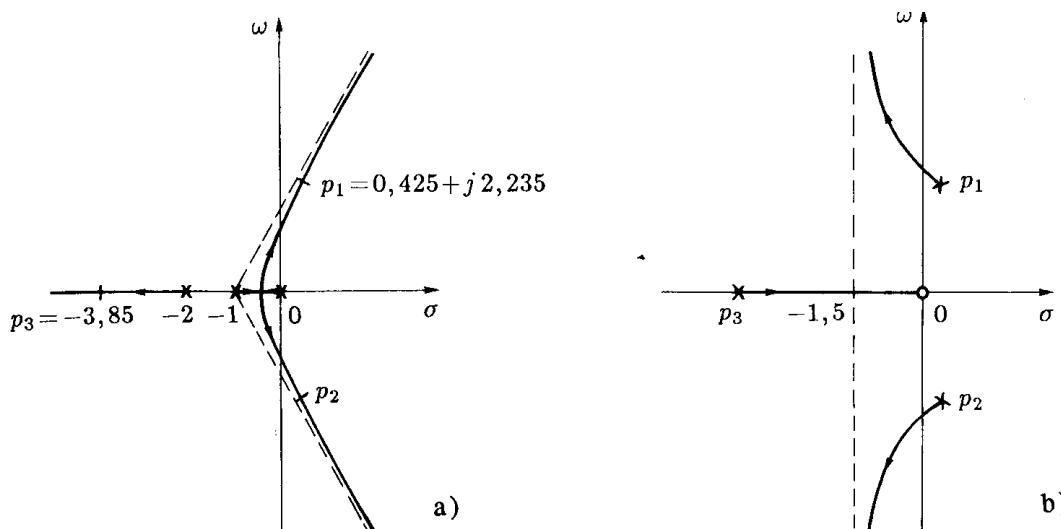
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K_1(1 + \tau s)}{s(s+1)(s+2)} = 0 \quad \rightarrow \quad s(s+1)(s+2) + K_1 + \tau s K_1 = 0$$

da cui si ottiene:

$$1 + \frac{\tau s K_1}{s(s+1)(s+2) + K_1} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \tau G_3(s) = 0$$

Il luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare di K da 0 a ∞ e il corrispondente contorno delle radici sono i seguenti:



Il contorno delle radici riportato in b) corrispondente al caso $K_1 := 20$, e i poli p_1 , p_2 e p_3 da cui parte il contorno sono quelli mostrati in figura a).

Il contorno presenta due asintoti. Il punto d'incontro degli asintoti è sull'asse reale ed ha ascissa:

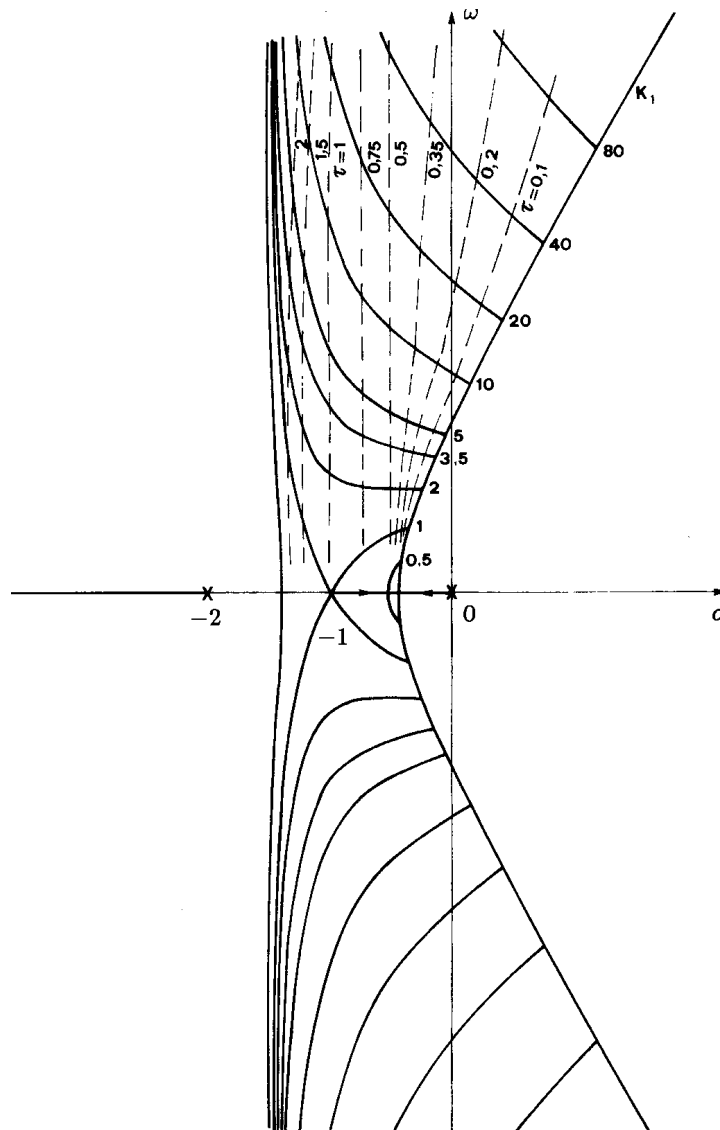
$$\sigma_a = \frac{p_1 + p_2 + p_3 - 0}{3 - 1} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Nota: nel caso in esame il punto di incontro degli asintoti del contorno delle radici è indipendente dal valore di K_1 per il quale il contorno è tracciato: tutti i contorni relativi a diversi valori di K_1 hanno gli stessi asintoti.

Teorema del baricentro

Teorema del baricentro del luogo delle radici. La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento razionale con polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.

Contorno delle radici del sistema $G(s) = \frac{K_1(1+\tau s)}{s(s+1)(s+2)}$ tracciato per diversi valori della costante K_0 .



I rami principali del contorno delle radici (quelli relativi ai poli dominanti) sono tracciati per diversi valori di K_1 : si ottiene così una famiglia di curve appoggiate al luogo delle radici.