Graficazione "qualitativa" dei diagrammi di Bode

Si procede alla graficazione del **diagramma asintotico** di Bode della funzione di risposta armonica assegnata. Due possibili metodi.

Primo metodo: somma dei singoli contributi

a) La funzione $G(s)$ viene messa nella forma "a costanti di tempo":

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)} \qquad \rightarrow \qquad G(s) = -\frac{10}{25}\frac{(1-s)}{s(1+s)(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})}$$

b) Si tracciano i diagrammi asintotici di Bode delle singole componenti:

$$K = -\frac{10}{25}, \qquad G_1(s) = (1-s), \qquad G_2(s) = \frac{1}{s}, \qquad G_3(s) = \frac{1}{(1+s)}, \qquad G_4(s) = \frac{1}{(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})}$$

c) Si sommano i singoli contributi per ottenere il diagramma asintotico della funzione $G(s)$.

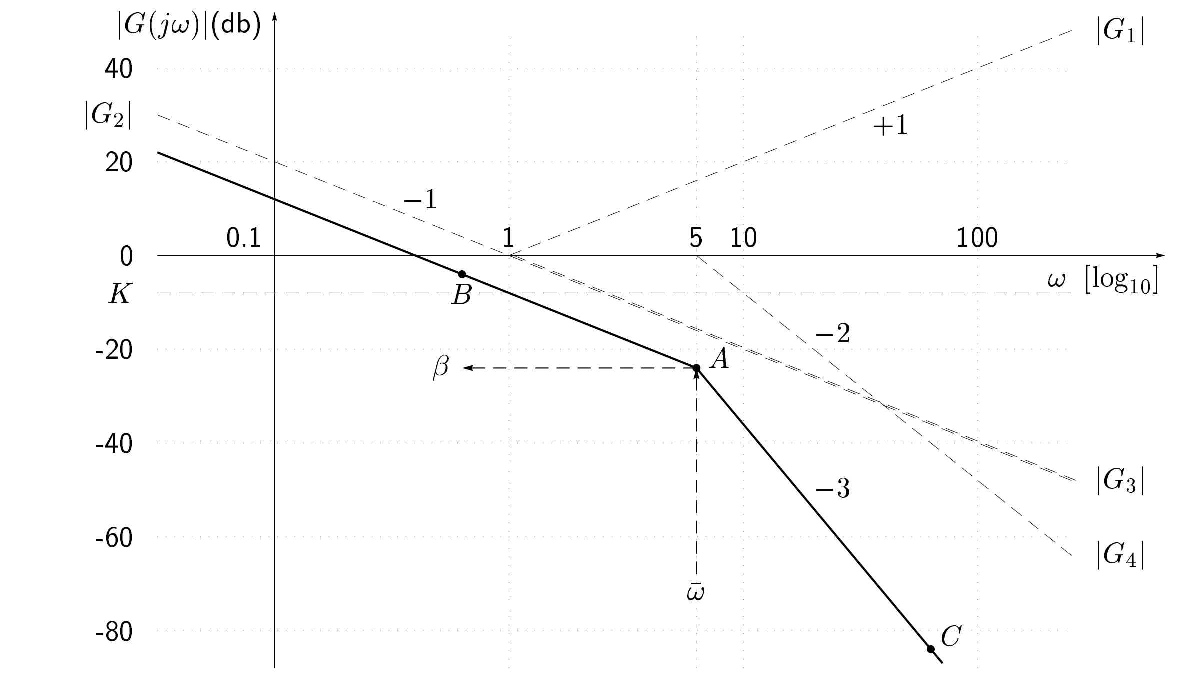
- Il contributo del termine K è costante: $|K| = -7.96$ db e $\arg K = -\pi$.
- Lo zero instabile $(1-s)$, e il polo stabile $(1+s)^{-1}$ agiscono alla pulsazione $\omega = 1$ e forniscono due contribuiti uguali e contrari nel diagramma delle ampiezze. Il loro contributo nel diagramma delle fasi si somma: l'ampiezza complessiva per $\omega \to \infty$ è $-\pi$.
- La coppia di poli complessi coniugati $(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})^{-1}$ determina sul diagramma asintotico delle ampiezze una attenuazione di -40 db/dec a partire dalla pulsazione $\omega_n = 5$. Il contributo al diagramma delle fasi è negativo di ampiezza complessiva $-\pi$ al variare di ω. Le pulsazioni alle quali si ha un cambiamento di pendenza del diagramma asintotico di Bode delle fasi sono le seguenti

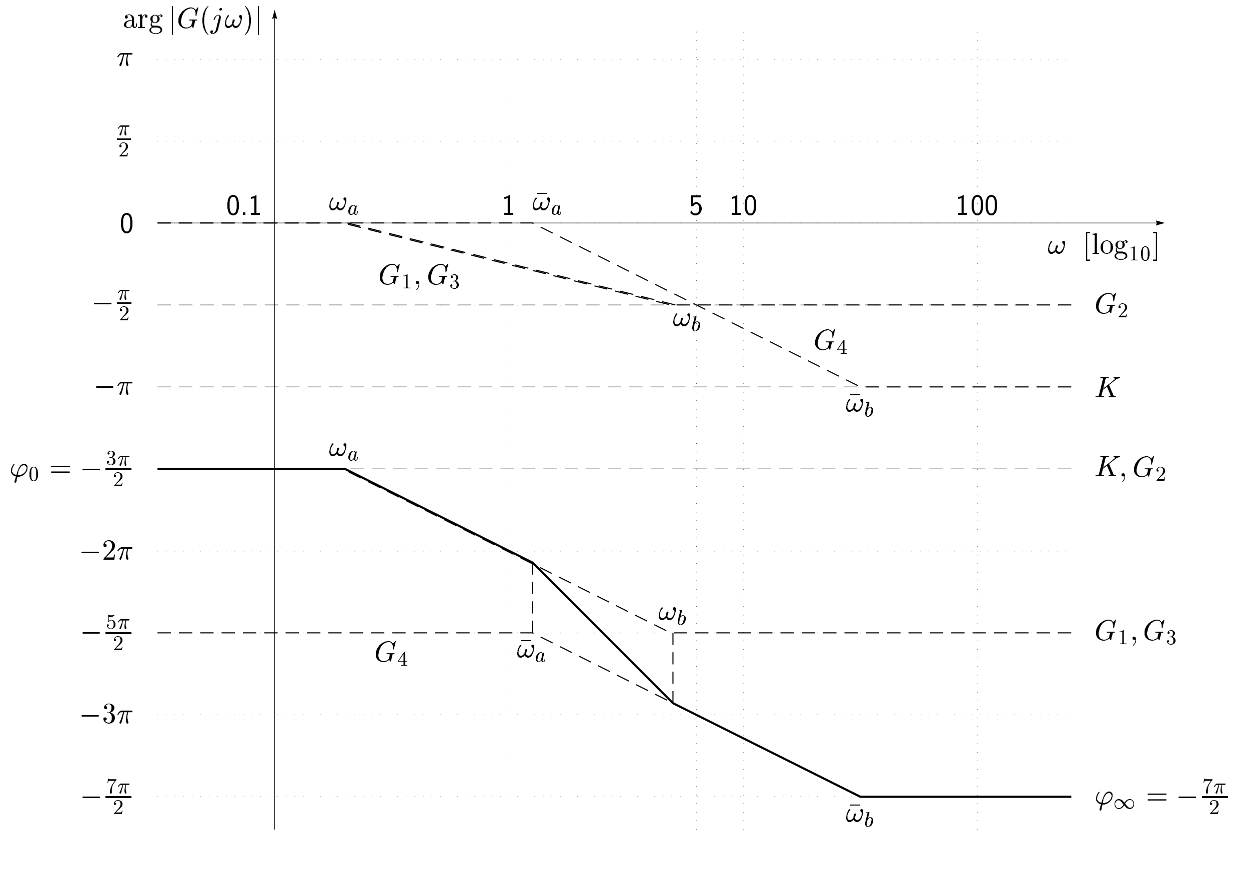
$$\omega_a = \frac{1}{4.81}, \qquad \omega_b = 4.81, \qquad \bar{\omega}_a = \frac{\omega_n}{4.81^\delta}, \qquad \bar{\omega}_b = \omega_n 4.81^\delta$$

dove $\delta = 0.8$ è il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati.

- La difficoltà nell'utilizzare questo metodo sta nel fatto che la somma dei singoli contributi non è sempre agevole.

Diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$

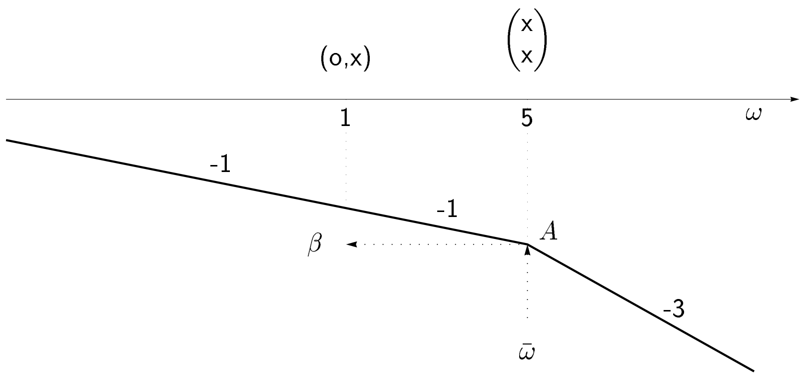




Secondo metodo: graficazione "rapida"

Diagramma delle ampiezze

a) Si individua nella funzione $G(s)$ tutte le pulsazioni in corrispondenza delle quali si ha un cambiamento di pendenza. Tali pulsazioni coincidono con gli zeri reali, i poli reali e con le pulsazioni naturali ω_n delle coppie di poli e zeri complessi coniugati della funzione $G(s)$. Nel caso in esame si ha $\omega = 1$ e $\omega = 5$. Tali pulsazioni vengono ordinate in ordine crescente di modulo.
b) Tenendo conto del fatto che gli zeri (reali o complessi coniugati) determinano un incremento di pendenza (rispettivamente di $+1$ e di $+2$) e che, viceversa, i poli (reali o complessi coniugati) determinano un decremento della pendenza del diagramma asintotico (rispettivamente di -1 e di -2), è chiaro che la "forma" del diagramma asintotico è già nota a priori prima di iniziare la graficazione.
Nel caso in esame, per esempio, si ha:



In corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$ non si ha cambiamento si pendenza perchè a questa pulsazione agiscono contemporaneamente sia un polo che uno zero.

c) Si determina la posizione "verticale" del diagramma asintotico di Bode.

- Se la funzione $G(s)$ è di tipo 0, il posizionamento verticale è automaticamente determinato dal calcolo del guadagno statico $G(0)$.

- Se il sistema è di tipo 1, o in generale di tipo h, il posizionamento verticale può avvenire, per esempio, calcolando la posizione del punto A in corrispondenza della pulsazione $\bar{\omega}$ alla quale si ha il primo cambiamento di pendenza. Siano $(\bar{\omega},\ \beta)$ le coordinate del punto A. Se il sistema è di tipo h, il valore della coordinata β si determina in base alla formula:

$$\beta = \left| \frac{s^h G(s)}{\bar{\omega}^h} \right|_{s=0}$$

cioè si sostituisce $\bar{\omega}^h$ al posto degli h poli nell'origine, mentre in tutti gli altri termini di $G(s)$ si mette $s = 0$.
Nel caso in esame si ha $h = 1$ ed $\bar{\omega} = 5$ per cui

$$\beta = \left| \frac{s\,G(s)}{5} \right|_{s=0} = \left| \frac{10(s-1)}{5(s+1)(s^2+8s+25)} \right|_{s=0} = \frac{2}{25} = -21.94 \text{ db}$$

d) È ora possibile tracciare il diagramma asintotico complessivo tracciando, a partire da A, i vari tratti della "spezzata", ognuno con la propria pendenza. Nel caso in esame, per esempio, il tratto di spezzata che precede il punto A si determina individuando il punto B. Questo punto si calcola a partire da A diminuendo la pulsazione di una decade ed aumentando di 20 db l'ampiezza: $B = (0.5,\ \beta + 20)$. Allo stesso modo si procede per determinare il tratto che segue il punto A. In questo caso, essendo -3 la pendenza di questo tratto, il punto C si determina aumentando la pulsazione di una decade e diminuendo l'ampiezza di 60 db: $C = (50,\ \beta - 60)$.

Diagramma delle fasi

a) Anche la graficazione del diagramma asintotico delle fasi può essere fatta più "rapidamente" se si procede nel modo seguente. Si faccia riferimento al diagramma delle fasi riportato nella precedente figura.
- Si individua la fase di partenza φ_0 del diagramma asintotico delle fasi calcolando la fase iniziale della funzione approssimante $G_0(s)$ per $\omega \to 0$. Nel caso in esame, per esempio, la fase iniziale è $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. Tale fase è comprensiva del segno negativo della costante K e della fase costante $-\frac{\pi}{2}$ introdotta dal polo nell'origine.
- Si prendono in considerazione i poli e gli zeri in ordine crescente della loro pulsazione critica (cioè il valore assoluto del corrispondente polo o zero, oppure la ω_n nel caso di coppie di poli o zeri complessi coniugati). Il diagramma asintotico di ciascun elemento viene disegnato in una diversa "fascia" in funzione dell'azione introdotta dai precedenti elementi, e in funzione del fatto che l'elemento sia stabile o instabile.

Nel caso in esame, per esempio, i primi due elementi da prendere in considerazione all'aumentare di ω sono il polo stabile $(s+1)^{-1}$ e lo zero instabile $(s-1)$. Questi due elementi agiscono contemporaneamente e ciascuno di essi introduce uno "sfasamento", per $\omega \in [-\infty,\ \infty]$, pari a $-\frac{\pi}{2}$. Il contributo complessivo di questi due elementi è un diagramma asintotico di ampiezza $-\pi$ da disegnare verso il basso nella fascia $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$. Anche la coppia di poli complessi coniugati $(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})^{-1}$, essendo stabili, introduce uno sfasamento di ampiezza complessiva $-\pi$. Il loro contributo al diagramma asintotico va quindi disegnato nella fascia $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$.

- Si procede alla graficazione del diagramma asintotico complessivo "interpolando" i diagrammi asintotici delle fasi dei singoli elementi, ognuno dei quali è stato disegnato nella fascia più opportuna. Nel caso in esame, è evidente che la determinazione dei punti intermedi di cambiamento di pendenza risulta notevolmente semplificato rispetto al caso di semplice somma dei singoli contributi asintotici. Si noti inoltre che la fase finale φ_∞ ottenuta è in accordo con la fase finale della funzione approssimante $G_\infty(s)$ per $\omega \to \infty$.