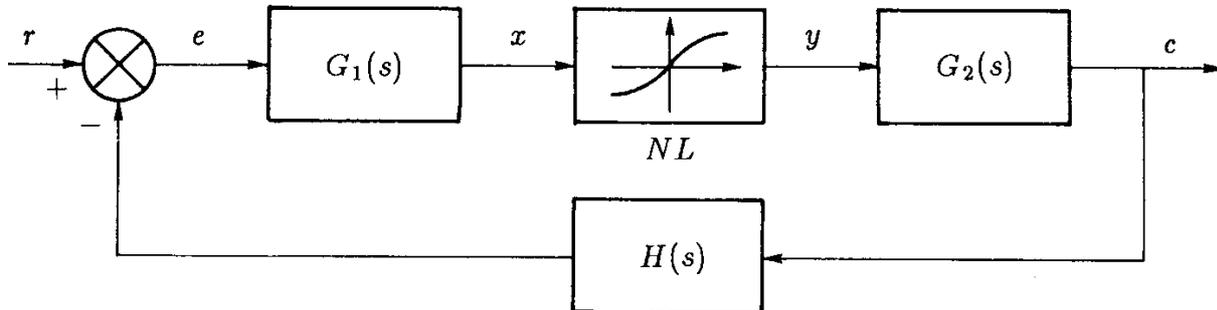
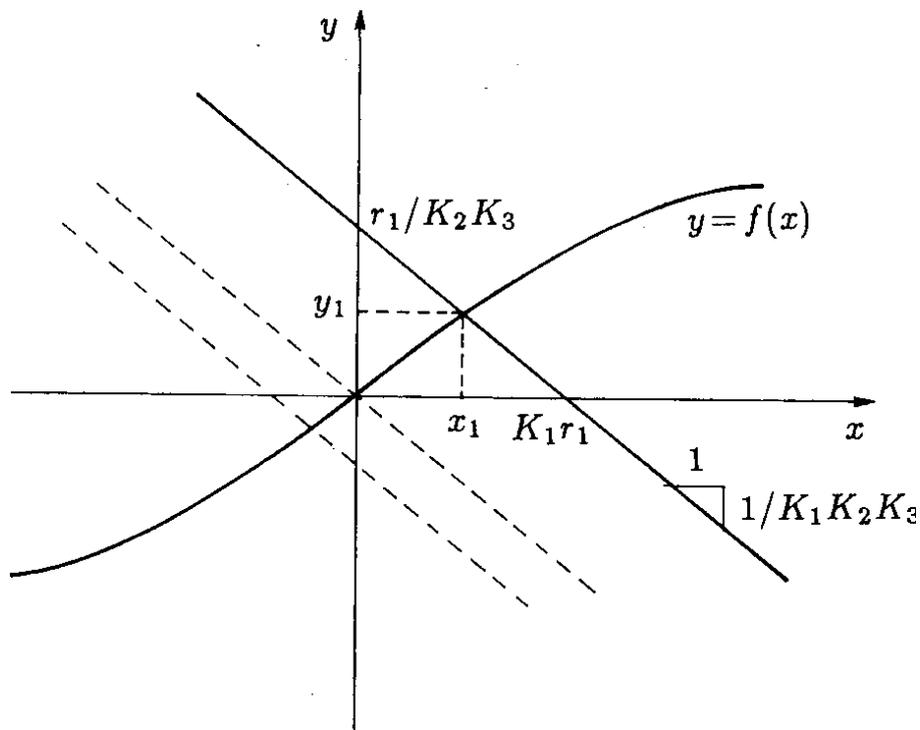


Stati di equilibrio e stabilità

- Ci si limiterà a considerare solo sistemi aventi la seguente struttura:



- Si suppone che il segnale di riferimento r_1 sia costante.
- Per studiare il sistema in presenza di perturbazioni, occorre conoscere il corrispondente *punto di equilibrio* (x_1, y_1) sulla caratteristica dell'elemento non lineare:



- Il punto di equilibrio (x_1, y_1) viene determinato come intersezione della caratteristica $y = f(x)$ dell'elemento non lineare, con la retta di equazione

$$x = K_1 r - K_1 K_2 K_3 y$$

in cui con $K_1 := G_1(0)$, $K_2 := G_2(0)$, $K_3 := H(0)$ si sono indicati i guadagni statici dei tre blocchi lineari.

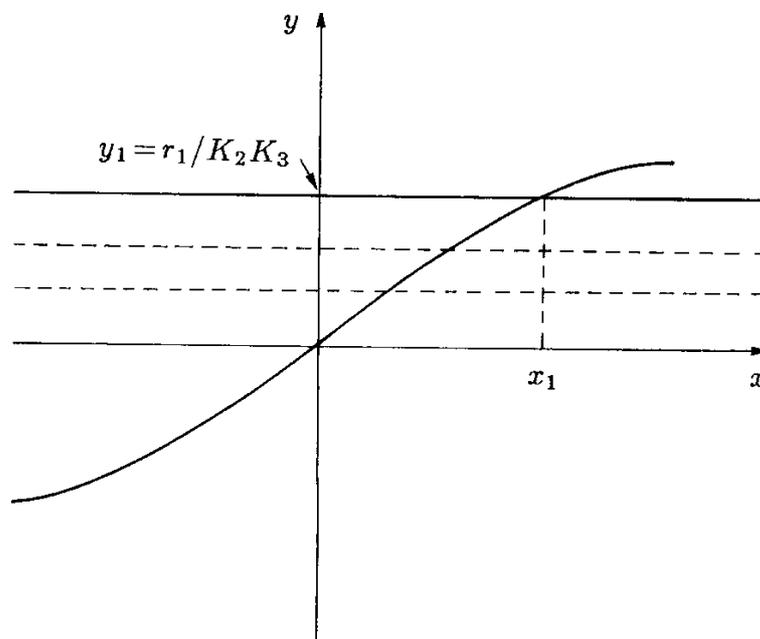
- Al variare dell'ingresso r , la retta di carico si sposta parallelamente a se stessa, ed il punto di equilibrio si sposta lungo la caratteristica dell'elemento nonlineare.

Casi particolari:

- 1) Se il sistema $G_1(s)$ è di tipo 1 (cioè ha un polo nell'origine), il corrispondente guadagno statico è $K_1 = \infty$ e la retta di carico diventa

$$r = K_2 K_3 y \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{K_2 K_3} r$$

La corrisponde costruzione grafica è:



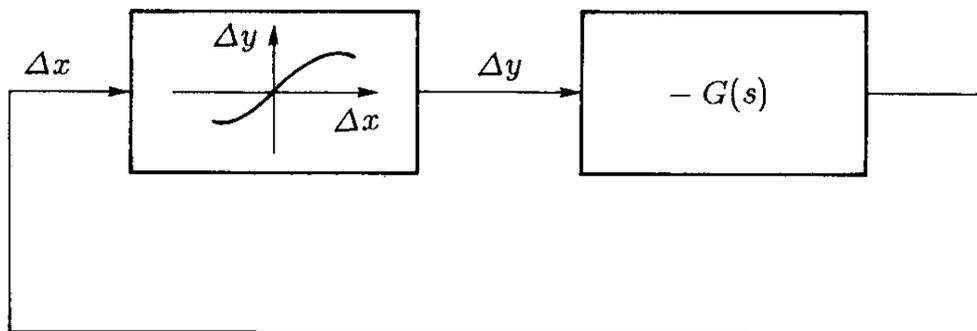
- 2) Se il sistema $G_2(s)$ (o il sistema $H(s)$) è di tipo 1, il corrispondente guadagno statico è $K_2 = \infty$ ($K_3 = \infty$) e la retta di carico diventa

$$y = 0$$

In questo caso il punto di equilibrio è dato dall'intersezione della funzione $y = f(x)$ con l'asse delle ascisse $y = 0$.

- Il comportamento locale del sistema dipende dal particolare punto di equilibrio considerato e quindi dal valore di r_1 .
- Nel caso dei sistemi lineari il comportamento dinamico è identico nell'intorno di qualunque punto di equilibrio.

- Nel caso dei sistemi non lineari invece si parla di stabilità di un punto di equilibrio e non di stabilità del sistema;
- La stabilità di un particolare punto di equilibrio di un sistema non lineare può dipendere dall'entità della perturbazione.
- I dispositivi di controllo devono essere progettati in modo che il sistema controllato sia *globalmente asintoticamente stabile*, cioè sia asintoticamente stabile: a) per qualunque punto di equilibrio in cui il sistema si possa portare al variare dell'ingresso; b) per perturbazioni di qualunque entità.
- Operando il cambiamento di variabili $\Delta x := x - x_1$, $\Delta y := y - y_1$ e $\Delta r := r - r_1$, il precedente sistema in retroazione può essere rappresentato (in modo equivalente) mediante il seguente schema:

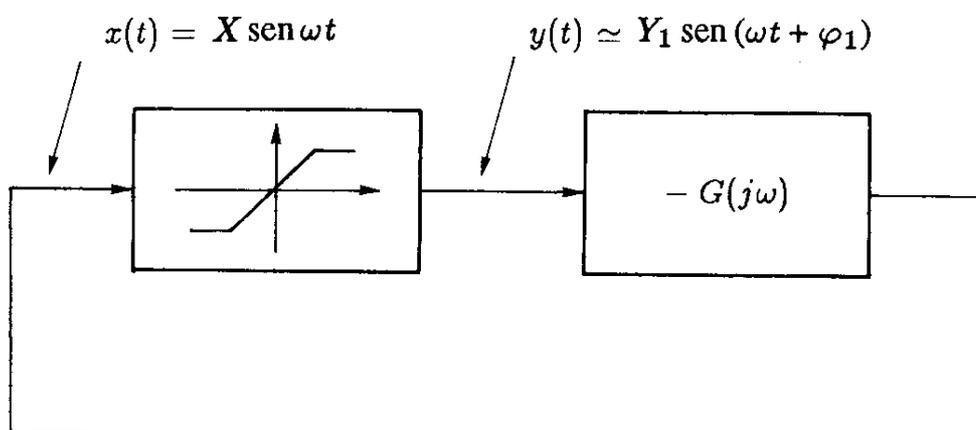


in cui si è posto $G(s) := G_1(s) G_2(s) H(s)$. L'origine del nuovo sistema di coordinate $(\Delta x, \Delta y)$ coincide con il punto di equilibrio x_1, y_1 .

- Quando r è costante o lentamente variabile, lo studio della stabilità del sistema non lineare in retroazione può essere fatto facendo riferimento a quest'ultimo sistema *autonomo* (cioè privo di ingressi).
- Un'altra notevole differenza fra il comportamento dei sistemi lineari e quello dei sistemi non lineari è che questi ultimi possono presentare anche dei *cicli limite*, cioè dei moti periodici autosostenuti asintoticamente stabili.
- Lo studio dei cicli limite è importante anche in relazione ai sistemi di controllo poiché quando, aumentando il guadagno di anello, questi sono portati in condizioni di instabilità, assumono in genere un moto periodico stabile, dovuto al fatto che le inevitabili saturazioni limitano le escursioni delle diverse variabili e impediscono quindi l'esaltazione indefinita delle oscillazioni autosostenute.

Il metodo della funzione descrittiva

- Tutti i sistemi fisici sono in realtà non lineari e si comportano approssimativamente come sistemi lineari solo per piccoli segnali.
- Il metodo della funzione descrittiva costituisce un utile strumento per verificare se l'innescò di oscillazioni autosostenute in un sistema di controllo progettato sotto l'ipotesi di linearità è possibile o meno
- È un metodo non rigoroso, ma semplice, intuitivo e soddisfacente nella maggior parte dei casi di interesse pratico.
- Il metodo si applica a sistemi che possano essere descritti dal seguente schema:



- Sul sistema si fanno le seguenti ipotesi:
 - i) l'ingresso r è identicamente nullo;
 - ii) l'elemento non lineare è puramente algebrico ed è descritto da una caratteristica statica indipendente dalla frequenza del segnale di ingresso;
 - iii) la caratteristica dell'elemento non lineare è simmetrica rispetto all'origine.
- Si suppone che il sistema sia sede di un'oscillazione persistente e che all'ingresso del blocco non lineare tale oscillazione sia sinusoidale:

$$x(t) = X \text{ sen } \omega t$$

- All'uscita del blocco non lineare si ha un segnale periodico avente la stessa pulsazione ω della sinusoide in ingresso, sviluppabile in serie di Fourier:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

dove

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos n\omega t d\omega t \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin n\omega t d\omega t$$

- Manca il termine costante per l'ipotesi di simmetria della caratteristica.
- Lo stesso sviluppo in serie può anche essere scritto come

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

dove $Y_n := \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e $\varphi_n := \arctan \frac{a_n}{b_n}$.

- I valori di a_n , b_n e quindi quelli di Y_n , φ_n sono in genere funzioni dell'ampiezza X del segnale di ingresso.
- Trascurando le armoniche di ordine superiore al primo, il segnale periodico di uscita $y(t)$ può essere approssimato con la sola componente fondamentale:

$$y(t) \simeq Y_1(X) \sin(\omega t + \varphi_1(X))$$

- Si definisce funzione descrittiva $F(X)$ dell'elemento non lineare il numero complesso, funzione dell'ampiezza X del segnale sinusoidale d'ingresso, il cui modulo è uguale al rapporto fra l'ampiezza della fondamentale del segnale d'uscita e l'ampiezza X del segnale d'ingresso, e il cui argomento è uguale allo sfasamento della fondamentale del segnale d'uscita rispetto al segnale d'ingresso:

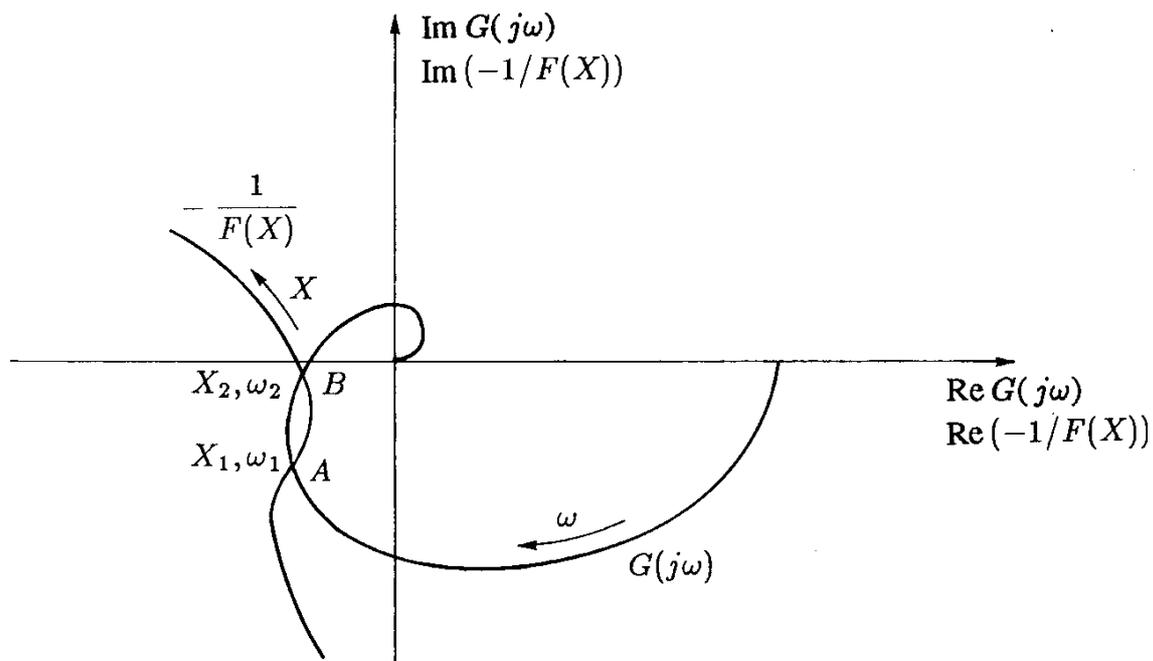
$$F(X) := \frac{1}{X} (b_1(X) + j a_1(X)) = \frac{1}{X} Y_1(X) e^{j\varphi_1(X)}$$

- Entro i limiti corrispondenti a tale approssimazione, la funzione descrittiva è analoga alla funzione di risposta armonica, salvo che essa dipende dall'ampiezza anziché dalla pulsazione del segnale di ingresso.

- Una giustificazione dell'ipotesi di poter trascurare le armoniche di ordine superiore al primo è data dalle seguenti considerazioni:
 - *i)* la loro ampiezza di solito è minore di quella della fondamentale;
 - *ii)* la parte lineare del sistema, comportandosi in genere come un filtro passa basso, tende a ridurre l'ampiezza rispetto alla fondamentale.
- Affinché il sistema sia sede di un'oscillazione persistente deve essere soddisfatta la condizione:

$$\boxed{F(X) G(j\omega) = -1} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = -\frac{1}{F(X)}$$

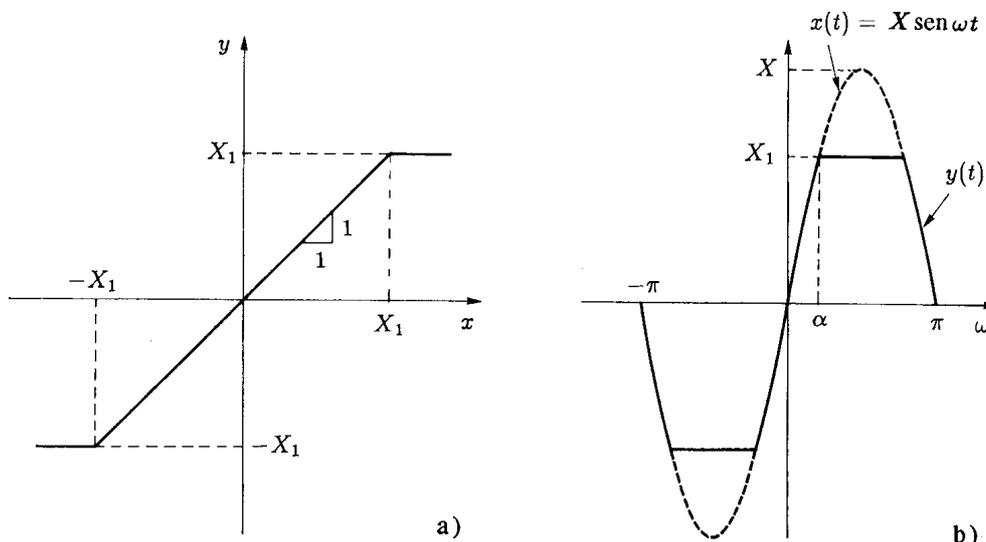
- Questa equazione (nelle incognite X e ω) coinvolge funzioni a valori complessi (la funzione descrittiva $F(X)$ e la funzione di risposta armonica $G(j\omega)$): le sue soluzioni corrispondono alle ampiezze e alle pulsazioni di possibili oscillazioni autosostenute presenti nel sistema.
- Questa equazione può essere risolta graficamente tracciando (sul piano complesso) i diagrammi polari delle funzioni $G(j\omega)$ e $-1/F(X)$, il primo graduato in valori di ω e il secondo in valori di X :



- Gli eventuali punti di intersezione (A e B) corrispondono a valori (ω_1 e ω_2 , X_1 e X_2) corrispondenti a possibili oscillazioni autosostenute.

Funzioni descrittive delle principali non linearità

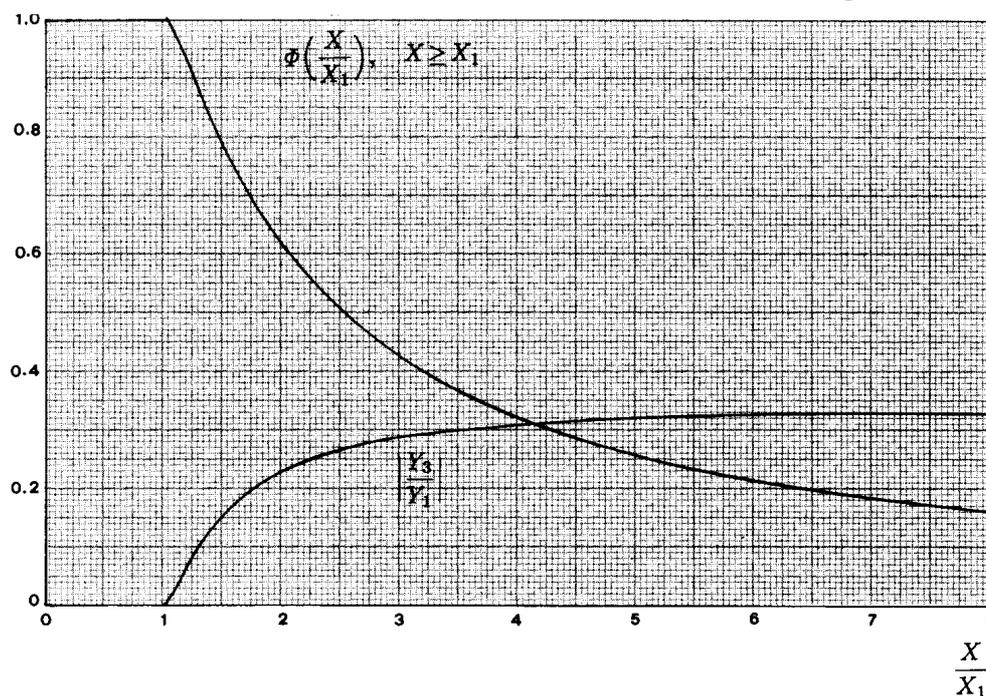
- **Saturazione.** La *saturazione* è una non linearità che è tipicamente presente in tutti i sistemi fisici. La caratteristica ingresso-uscita della saturazione con il tratto inclinato a pendenza unitaria è la seguente:



- Posto $\Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) := \frac{2}{\pi} \left(\arcsen \frac{X_1}{X} + \frac{X_1}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} \right)$, la funzione descrittiva della saturazione a guadagno unitario è:

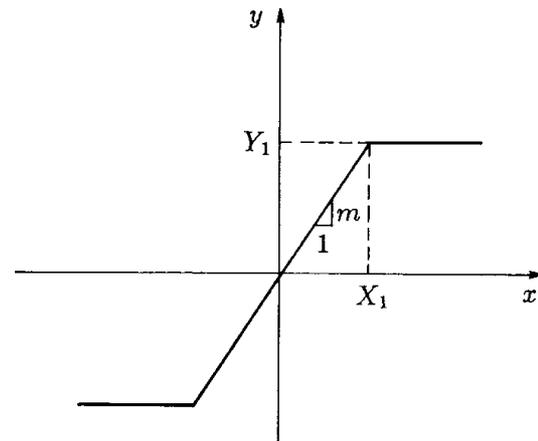
$$F(X) = \frac{1}{X} (b_1 + j a_1) = \begin{cases} 1 & \text{per } X \leq X_1, \\ \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) & \text{per } X \geq X_1. \end{cases}$$

- La funzione descrittiva è reale. Il suo andamento è il seguente:

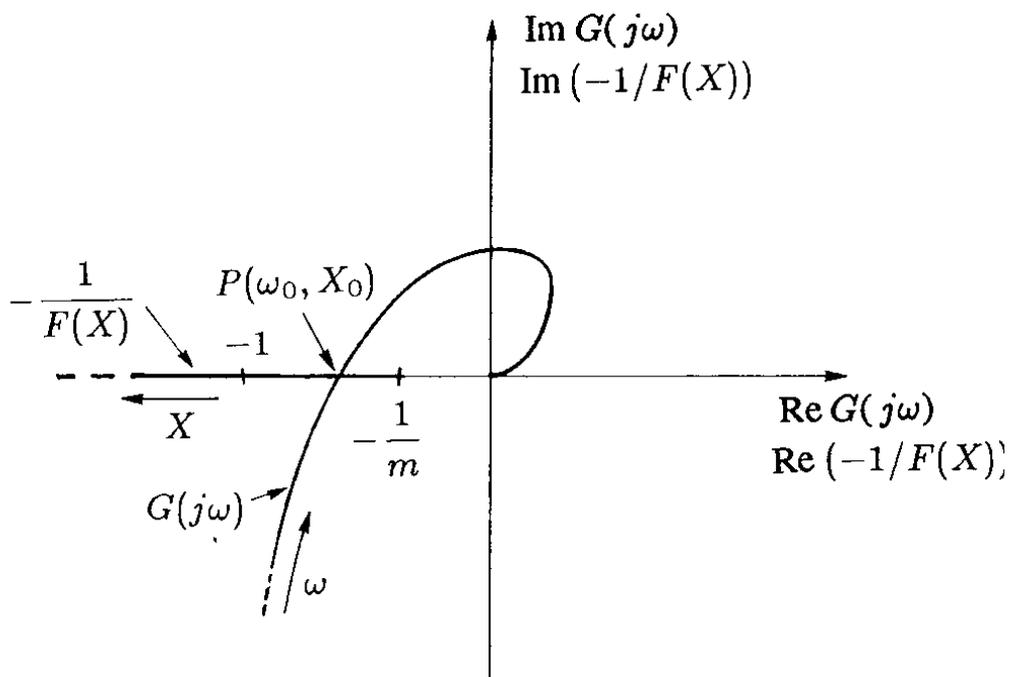


- La funzione descrittiva di una saturazione con il tratto centrale avente pendenza $m = Y_1/X_1$ è:

$$F(X) = \begin{cases} m & \text{per } X \leq X_1, \\ m \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) & \text{per } X \geq X_1, \end{cases}$$

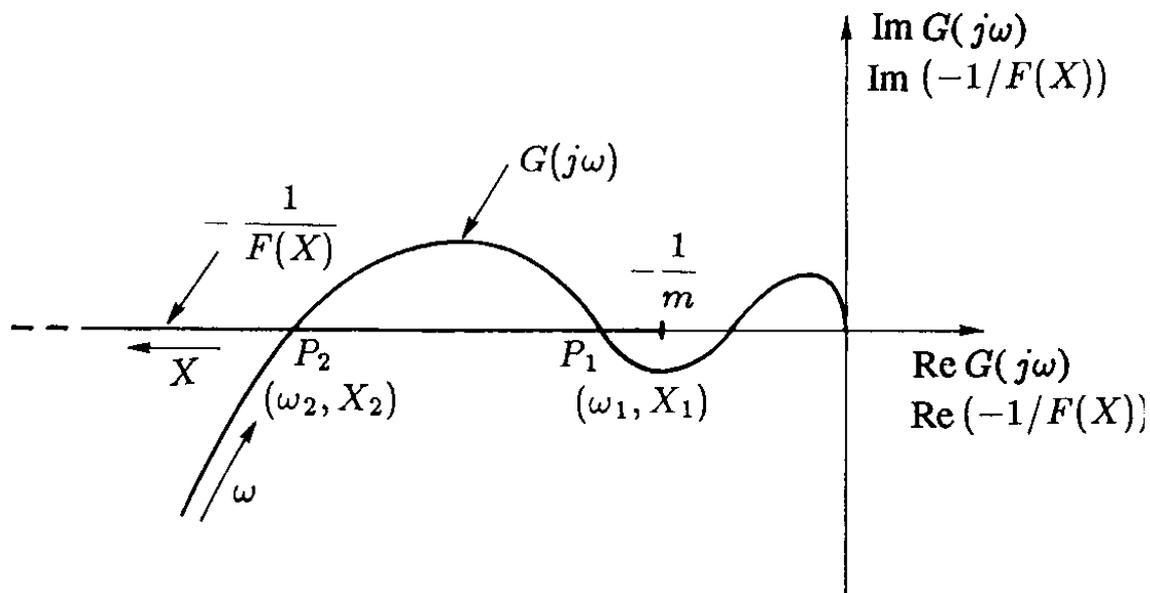


- Esempio di applicazione della funzione descrittiva della saturazione (si suppone che il sistema $G(s)$ sia stabile ad anello aperto):



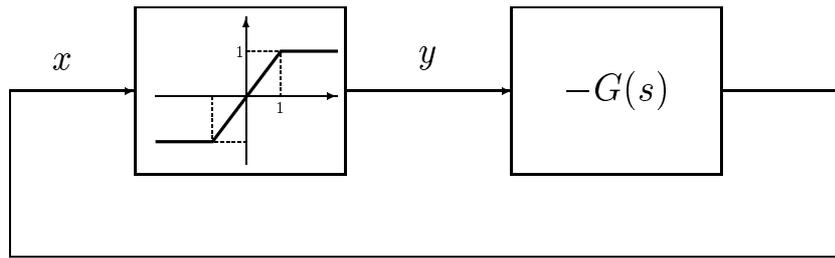
- Se si varia la costante di guadagno nel rapporto di 1 ad m ($m > 1$), per m sufficientemente grande il sistema diventa instabile.
- Poiché la funzione descrittiva della saturazione è reale, il diagramma della funzione $-1/F(X)$ si svolge su una porzione dell'asse reale negativo.
- Nel caso in esame l'intersezione è unica (punto P) e denuncia la presenza di un *ciclo limite stabile*.

- Il ciclo limite è stabile in quanto un aumento dell'ampiezza delle oscillazioni rispetto al valore X_0 tende a spostare il "punto critico" $-1/F(X)$ all'esterno del dominio circondato dal diagramma di Nyquist e produce pertanto un effetto stabilizzante, che fa diminuire l'ampiezza delle oscillazioni e la riporta al valore X_0 ; analogamente, una diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni rispetto al valore X_0 , producendo uno spostamento del punto $-1/F(X)$ verso l'interno del dominio circondato dal diagramma di Nyquist, provoca una reazione tendente a ripristinare per l'ampiezza il valore X_0 .
- In generale si pu'ò affermare che: *A un punto di intersezione dei diagrammi polari delle funzioni $G(j\omega)$ e $-1/F(X)$ corrisponde un ciclo limite stabile quando, all'aumentare di X , il punto $-1/F(X)$ tende a uscire dal dominio la cui frontiera è costituita dal diagramma polare completo di $G(j\omega)$. Si ha un ciclo limite instabile nel caso opposto.*
- Esempio di sistema a stabilità condizionata che per effetto della saturazione presenta un ciclo limite instabile (corrispondente al punto P_1) e un ciclo limite stabile (corrispondente al punto P_2):



- Il sistema per piccoli segnali è stabile, ma, qualora esso venga portato in saturazione, vi si possono innescare oscillazioni di pulsazione ω_2 e di ampiezza X_2 .
- Le pulsazioni ω_1 e ω_2 delle due oscillazioni autosostenute si determinano facilmente calcolando le intersezioni della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ con il semiasse reale negativo.

Esempio. Si consideri il seguente sistema retroazionato:



dove

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+3)}$$

• Equazione caratteristica: $s^3 + 4s^2 + 3s + 20K = 0$

• Tabella di Routh:

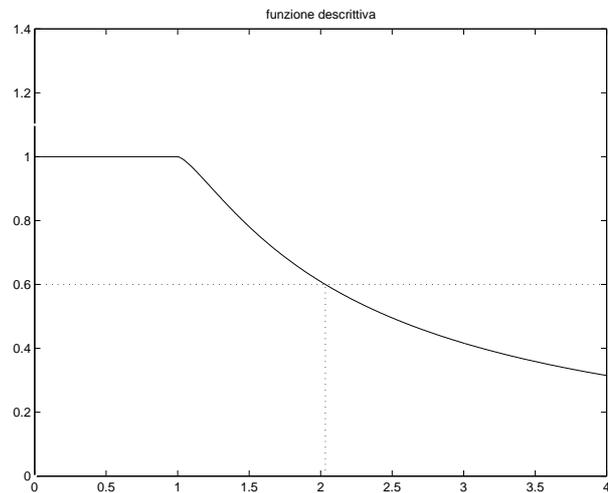
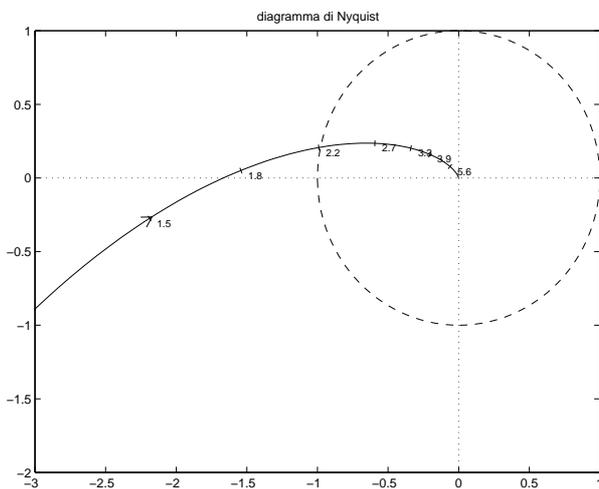
3	1	3
2	4	$20K$
1	$20K - 12$	3
0	$20K$	

Margine di ampiezza:

$$K^* = \frac{12}{20} = 0.6$$

Intersezione con il semiasse reale negativo: $\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{20}{12}$. Pulsazione del ciclo limite:

$$\omega_0 = \sqrt{3}$$



L'ampiezza X_0 si trova utilizzando il grafico della funzione descrittiva.

$$F(X_0) G(j\omega_0) = -1 \quad \rightarrow \quad F(X_0) = -\frac{1}{G(j\omega_0)} = -K^*$$

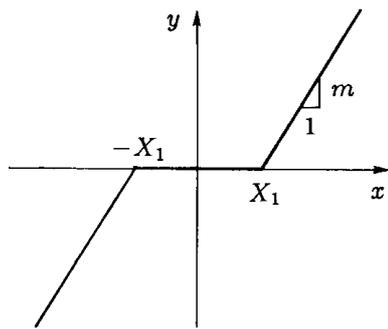
Dal grafico si trova $X_0 = 2.06$.

Tracciamento qualitativo della funzione descrittiva

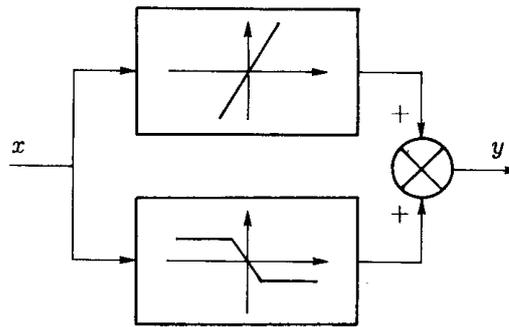
Nel caso in cui la caratteristica non lineare $y = f(x)$ sia a forma di spezzata, l'andamento "qualitativo" della corrispondente funzione descrittiva $F(X)$ può essere facilmente determinato ricordando che:

- 1) La funzione descrittiva $F(X)$ è sempre continua al variare del parametro X . Nel caso in cui la $y = f(x)$ sia lineare, la $F(X)$ è costante, e il suo valore coincide con la pendenza K dell'elemento lineare: se $y = Kx$ allora $F(X) = K$.
- 2) Per $X \rightarrow 0^+$, il valore della funzione descrittiva $F(X)$ coincide con la "pendenza del primo tratto lineare" della funzione $y = f(x)$. Nel caso in cui la $y = f(x)$ sia discontinua per $x = 0$, il valore della $F(X)$ per $X \rightarrow 0^+$ è infinito.
- 3) In corrispondenza di un cambiamento di pendenza o di una discontinuità della $y = f(x)$, la $F(X)$ cambia pendenza in modo concorde alla variazione di pendenza subita dalla $y = f(x)$.
- 4) Per $X \rightarrow \infty$ il valore della funzione descrittiva $F(X)$ coincide con la "pendenza dell'ultimo tratto lineare" della funzione $y = f(x)$.

- **Soglia.** La caratteristica dell'elemento non lineare cui si dà il nome di *soglia* o *zona morta* è:



a)

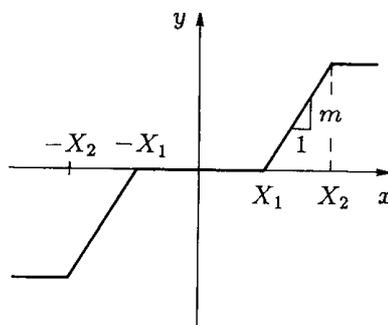


b)

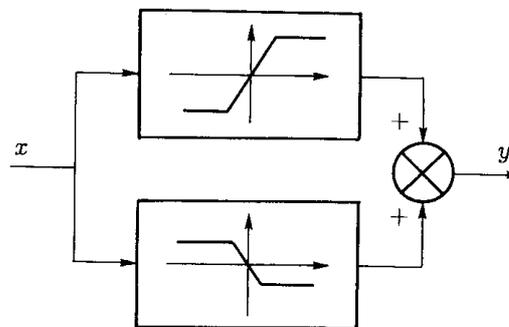
- La soglia si ottiene come somma delle caratteristiche di un blocco lineare e di un elemento tipo saturazione.
- La funzione descrittiva della soglia risulta uguale alla somma delle funzioni descrittive dei due blocchi:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1, \\ m \left(1 - \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) \right) & \text{per } X \geq X_1. \end{cases}$$

- **Soglia con saturazione.** La caratteristica ingresso-uscita di una soglia con saturazione è:



a)

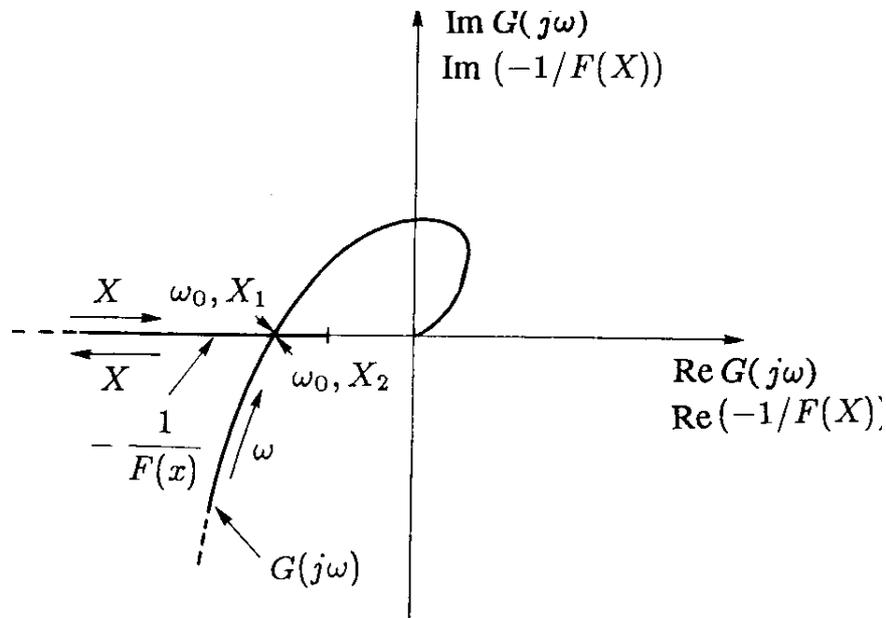


b)

- La caratteristica di questo elemento si ottiene come somma delle caratteristiche di due saturazioni.
- La funzione descrittiva della soglia con saturazione è:

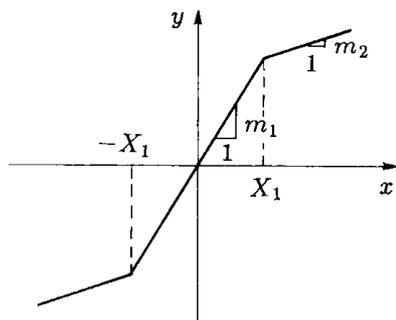
$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1, \\ m \left(1 - \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) \right) & \text{per } X_1 \leq X \leq X_2, \\ m \left(\Phi\left(\frac{X}{X_2}\right) - \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) \right) & \text{per } X \geq X_2. \end{cases}$$

- Si noti che la funzione descrittiva, che anche in questo caso è reale, è nulla per piccoli segnali, quindi aumenta, raggiunge un massimo e, per X tendente all'infinito, tende nuovamente a zero. Il diagramma di $-1/F(X)$ corrisponde a una semiretta sull'asse reale negativo: a ciascun punto del diagramma corrispondono due valori di X .

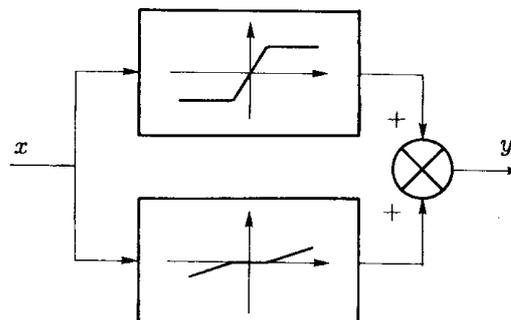


- Il punto di intersezione dei diagrammi di $G(j\omega)$ e di $-1/F(X)$ è unico, ma corrisponde a due cicli limite caratterizzati dalla medesima pulsazione e da due diverse ampiezze X_1 e X_2 ; il primo di essi è instabile, l'altro è stabile.

- **Saturazione non netta.** La caratteristica ingresso-uscita di una saturazione non netta è:



a)

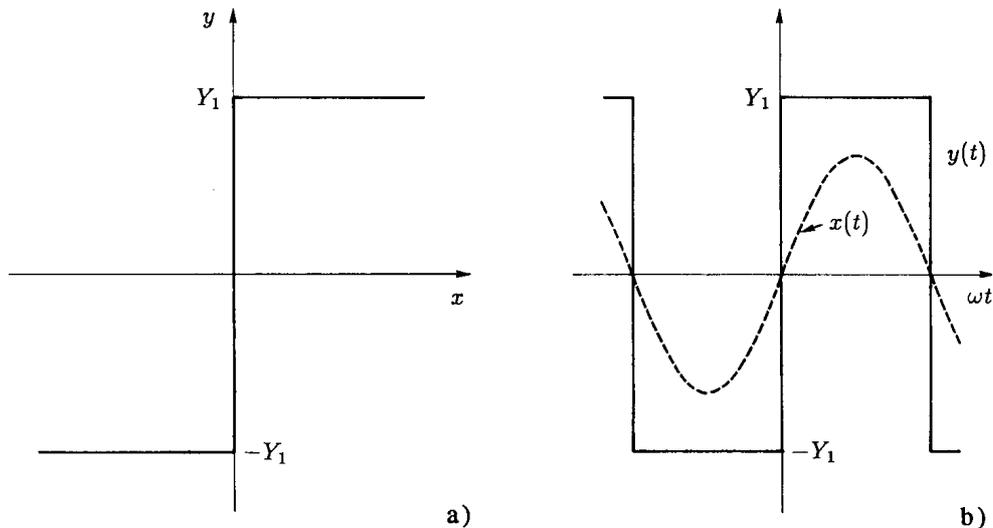


b)

- La caratteristica di questo elemento si ottiene come somma delle caratteristiche di una saturazione e di una soglia per cui la sua funzione descrittiva è:

$$F(X) = \begin{cases} m_1 & \text{per } X \leq X_1, \\ (m_1 - m_2) \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) + m_2 & \text{per } X \geq X_1. \end{cases}$$

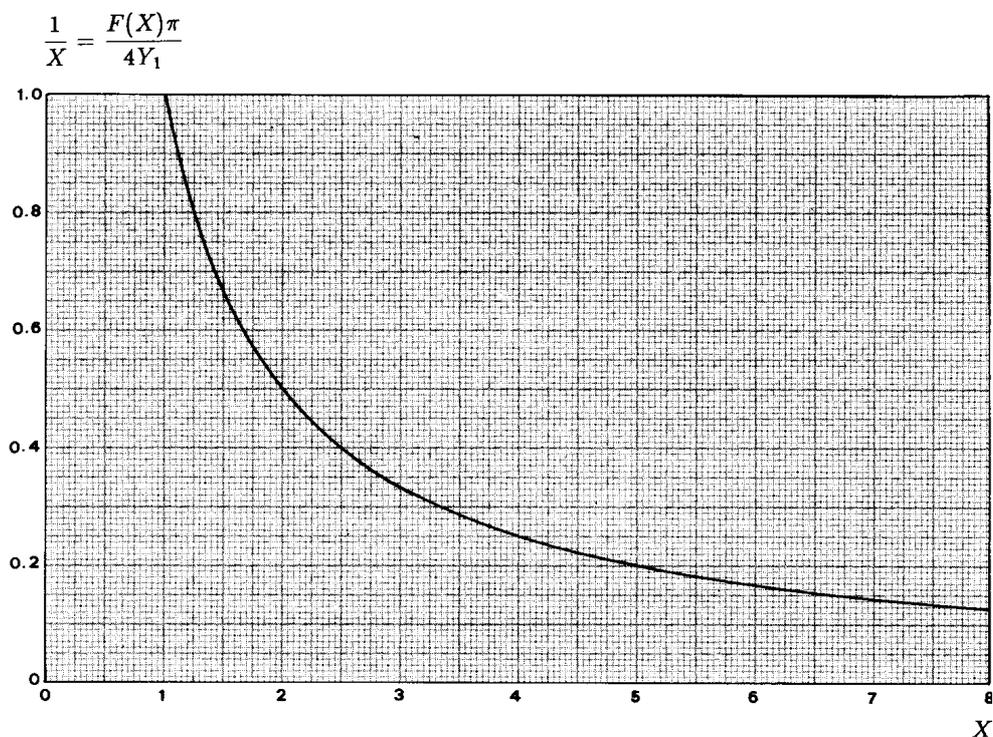
- **Relè ideale.** La caratteristica ingresso-uscita di un relè ideale è:



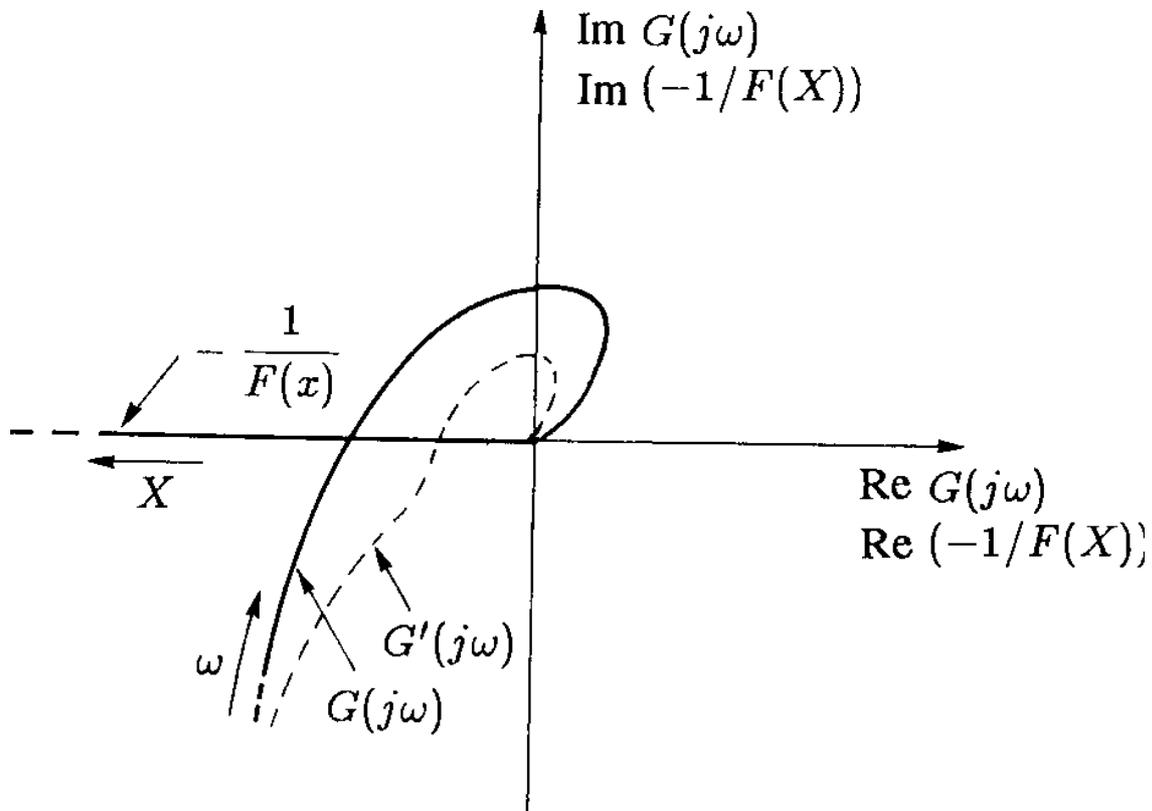
- Essa rappresenta il tipico legame ingresso-uscita degli amplificatori a relè, largamente impiegati nei sistemi di controllo più semplici e diffusi. La sua funzione descrittiva è:

$$F(X) = \frac{4Y_1}{\pi X}$$

- La funzione descrittiva è a valori reali. Il suo grafico è una iperbole

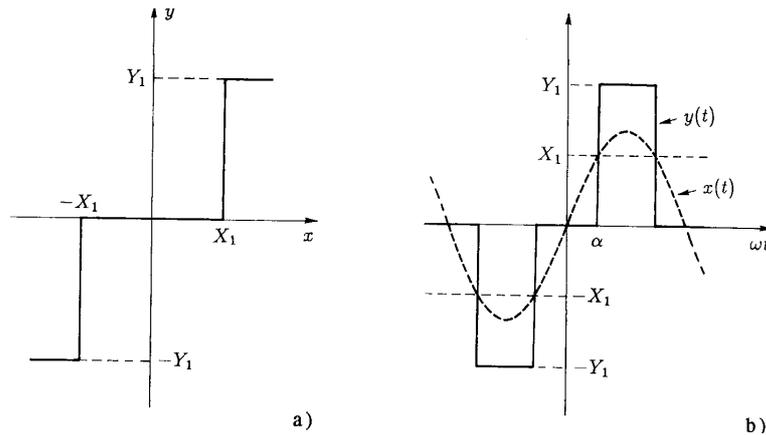


- Il diagramma polare di $-1/F(X)$ è l'intero semiasse reale negativo, a dimostrazione del fatto che i sistemi in retroazione a due posizioni sono intrinsecamente autooscillanti:



- Infatti, a seconda del segno dell'errore, la variabile manipolabile viene portata all'uno o all'altro degli estremi del suo campo di variazione, senza la possibilità di raggiungere una condizione di equilibrio.
- Perché il comportamento del sistema sia accettabile, occorre che l'ampiezza delle oscillazioni all'uscita del sistema controllato sia contenuta entro limiti relativamente modesti; ciò normalmente avviene, date le caratteristiche filtranti - tipo "passa basso" - del sistema controllato stesso.
- Per aumentare la frequenza delle oscillazioni autosostenute e, di conseguenza, diminuirne l'ampiezza all'uscita del sistema controllato, si possono impiegare reti correttive: una modifica del diagramma polare di risposta armonica del tipo indicato in figura (curva a tratto) porta evidentemente ad una diminuzione dell'ampiezza X dell'oscillazione.

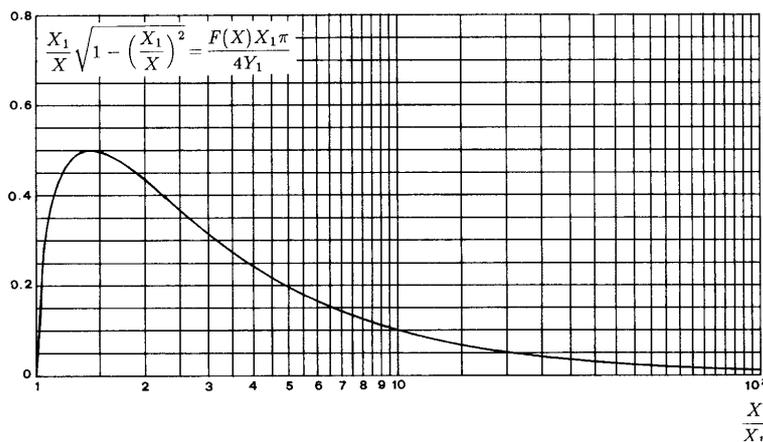
- **Relè con soglia.** La sua caratteristica ingresso-uscita è:



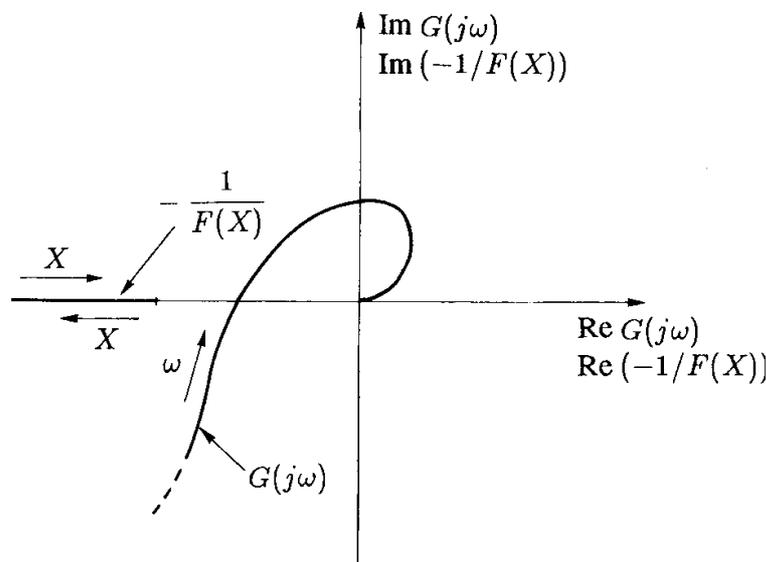
- La sua funzione descrittiva (a valori reali) è:

$$F(X) = \frac{1}{X} (b_1 + j a_1) = \begin{cases} 0 & \text{per } X \leq X_1 \\ \frac{4Y_1}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} & \text{per } X \geq X_1 \end{cases}$$

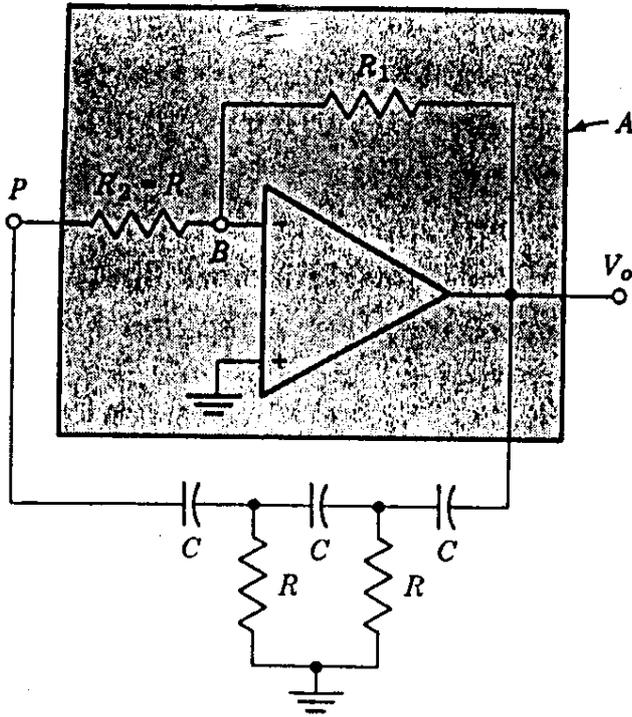
- Il suo grafico è:



- Caso di un sistema a relè con soglia senza oscillazioni autosostenute:



Esempio. Come esempio di utilizzo del metodo della funzione descrittiva si consideri il seguente oscillatore a sfasamento realizzato con un amplificatore operazionale:



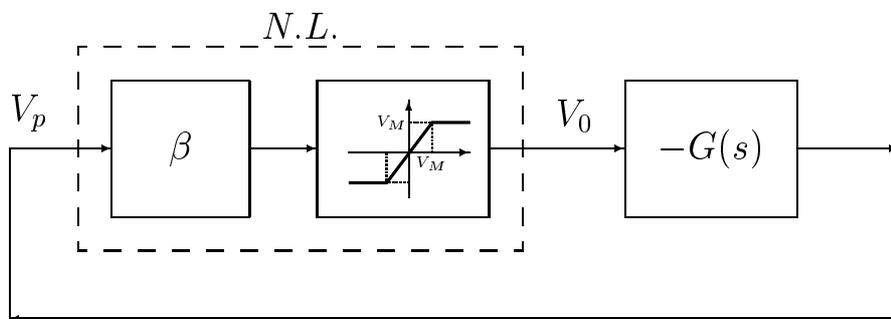
Il guadagno dell'amplificatore operazionale è:

$$A = -\beta$$

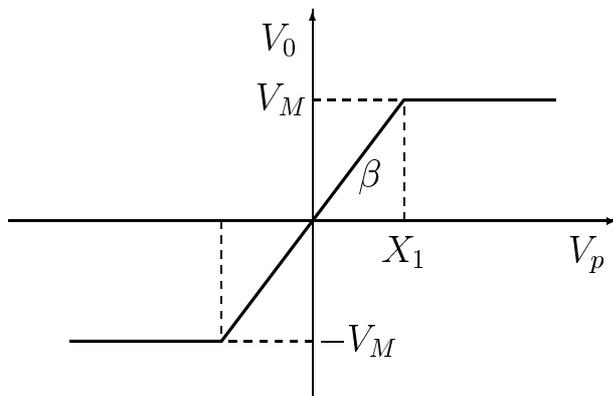
dove

$$\beta = \frac{R_1}{R}$$

- Rappresentazione schematica del sistema retroazionato è:



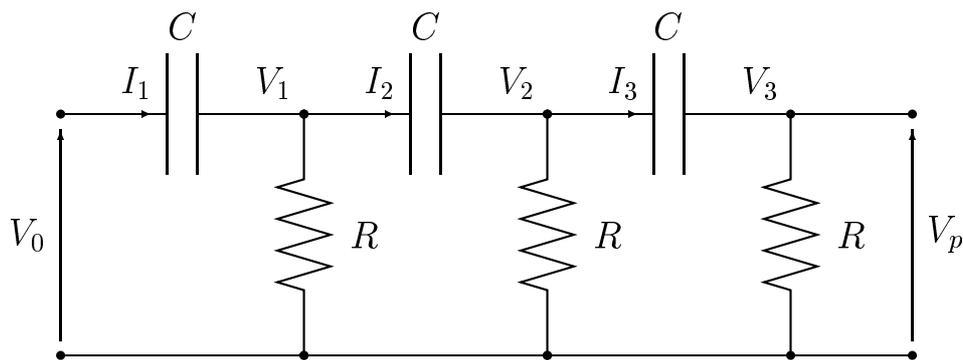
- L'elemento non lineare (N.L.) è una saturazione con tratto centrale a pendenza β :



$$X_1 = \frac{RV_0}{R_1}$$

$$\beta = \frac{R_1}{R}$$

- Schema fisico della rete a capacità e resistenze:



- Le equazioni che descrivono il circuito sono:

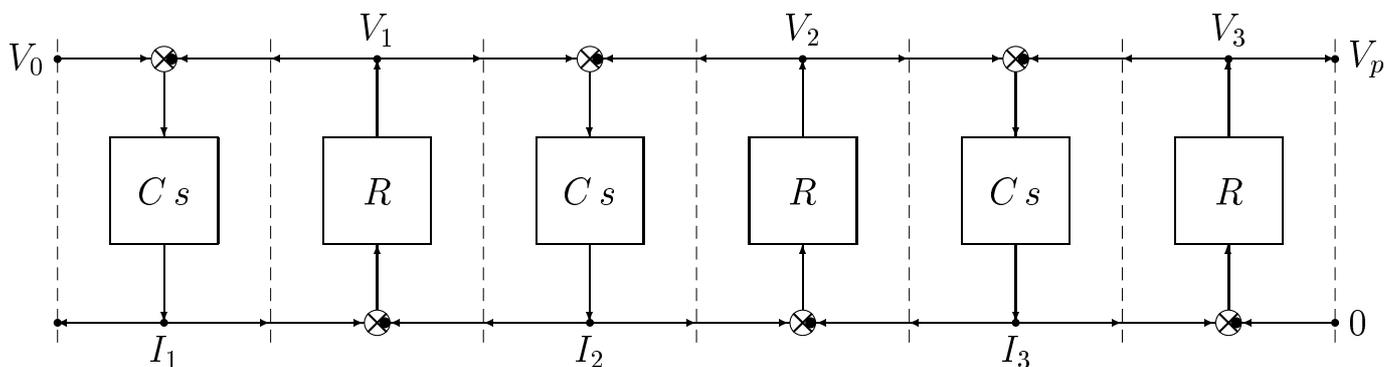
$$I_1 = C \frac{d(V_0 - V_1)}{dt}, \quad I_2 = C \frac{d(V_1 - V_2)}{dt}, \quad I_3 = C \frac{d(V_2 - V_3)}{dt}$$

$$V_1 = R(I_1 - I_2), \quad V_2 = R(I_2 - I_3), \quad V_3 = RI_3$$

- Utilizzando le trasformate di Laplace, le tre equazioni differenziali diventano:

$$I_1 = C s (V_0 - V_1), \quad I_2 = C s (V_1 - V_2), \quad I_3 = C s (V_2 - V_3)$$

- Lo schema fisico può quindi essere rappresentato dal seguente schema a blocchi:

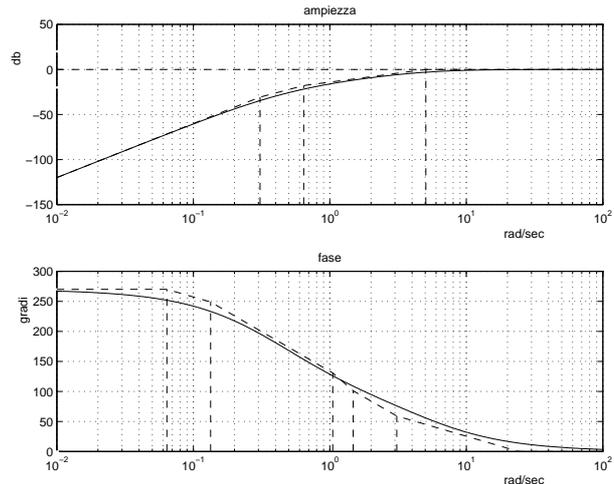
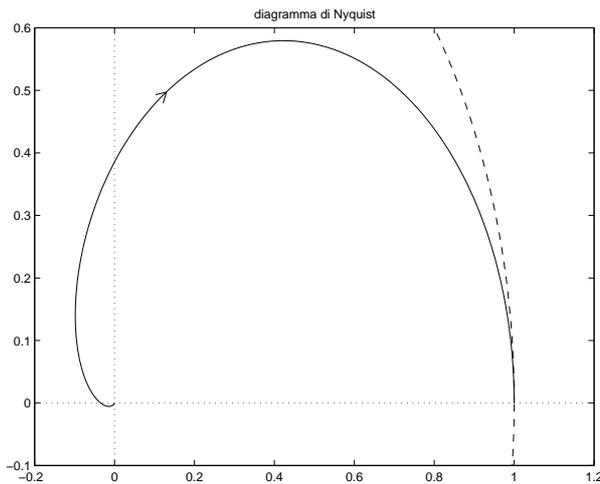


- La funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $V_0(s)$ all'uscita $V_p(s)$ si calcola agevolmente utilizzando la formula di Mason:

$$G(s) = \frac{V_p(s)}{V_0(s)} = \frac{R^3 C^3 s^3}{1 + 5 R C s + 6 R^2 C^2 s^2 + R^3 C^3 s^3}$$

Infatti, all'interno dello schema a blocchi ci sono 5 anelli distinti, tutti aventi guadagno di anello $-RC$. Inoltre ci sono 6 coppie di anelli che non si toccano a due a due, e una terna di anelli che non si toccano a tre a tre. L'unico percorso che parte da V_0 e arriva a V_p attraversa tutti i blocchi.

- Diagramma di Nyquist e Diagrammi si Bode della funzione $G(s)$:



Il diagramma interseca il semiasse reale positivo in corrispondenza del punto $\sigma^* = -1/K^*$ alla pulsazione ω^* . I valori di K^* e di ω^* possono essere agevolmente calcolati utilizzando il criterio di Routh. L'equazione caratteristica $1 + K G(s) = 0$ del sistema è:

$$R^3 C^3 (K + 1) s^3 + 6 R^2 C^2 s^2 + 5 R C s + 1 = 0$$

Costruendo la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & R^3 C^3 (K + 1) & 5 R C \\ 2 & 6 R^2 C^2 & 1 \\ 1 & (30 - 1 - K) R^3 C^3 & \\ 0 & 1 & \end{array}$$

si ricava $K^* = 29$.

- Quindi nel sistema si innesca un'oscillazione solo quando:

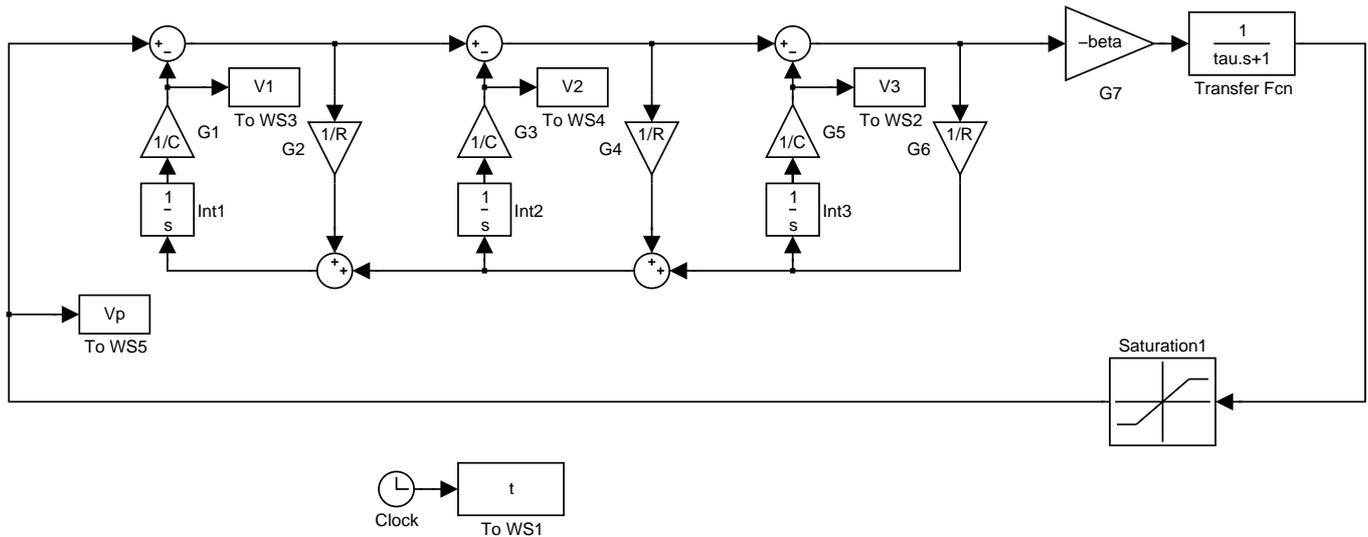
$$\boxed{\beta > K^*} \quad \text{dove} \quad \beta = \frac{R_1}{R} \quad \text{e} \quad K^* = 29$$

- La pulsazione di oscillazione si ricava dall'equazione ausiliaria della tabella di Routh:

$$6 R^2 C^2 s^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega^* = \frac{1}{R C \sqrt{6}}}$$

• Si noti che in questo caso la $G(s)$ è un sistema "passa alto" per cui non soddisfa una delle ipotesi necessarie per poter ottenere risultati "precisi" dall'applicazione del metodo della funzione descrittiva.

- Simulazione del seguente schema a blocchi (oscillatore_mdl.mdl):



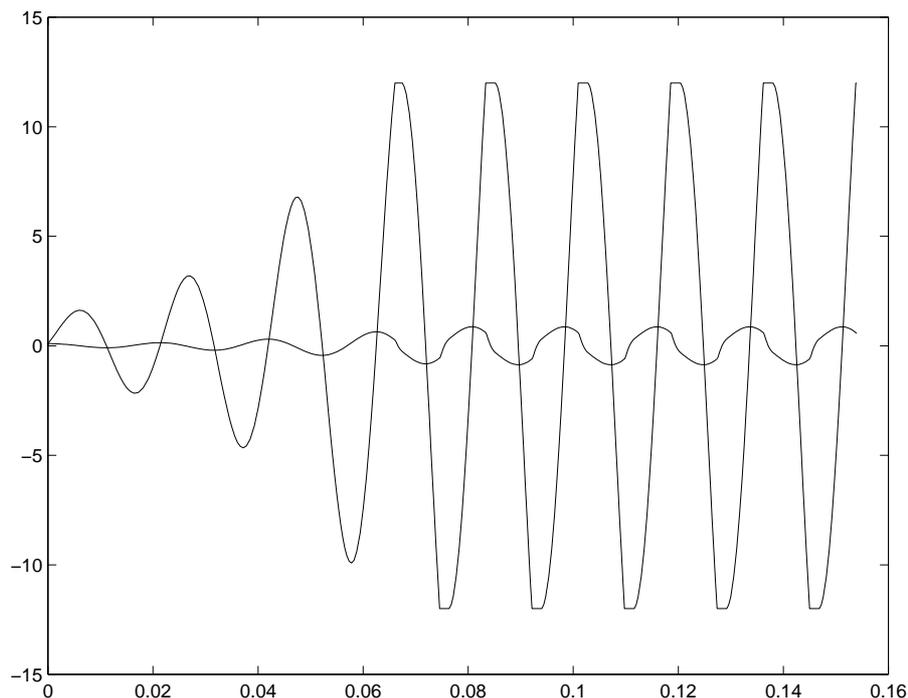
- Parametri di simulazione (oscillatore_m):

```

R=1; % Resistenza
C=0.001; % Capacita'
beta=60; % Guadagno dell'amplificatore
VM=12; % Tensione massima
V30=0.1; % Condizione iniziale
Q30=C*V30; % Condizione iniziale
wstar=1/(R*C*sqrt(6)); % Pulsazione dell'oscillazione
tau=0.0001; % Costante di tempo dell'amplificatore
Tfin=10*2*pi/wstar; % Durata della simulazione
sim('oscillatore_mdl',Tfin) % Simulazione dello schema a blocchi
figure(1) % Apertura della figura nr. 1
plot(t,[Vp,V3]) % Graficazione delle tensioni Vp e V3

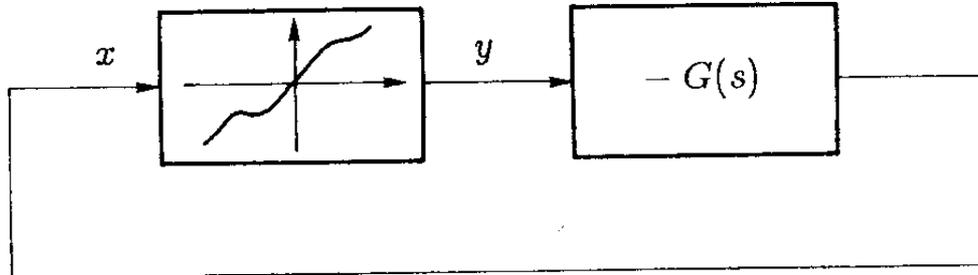
```

- Risultati della simulazione (variabili V_p e V_0):

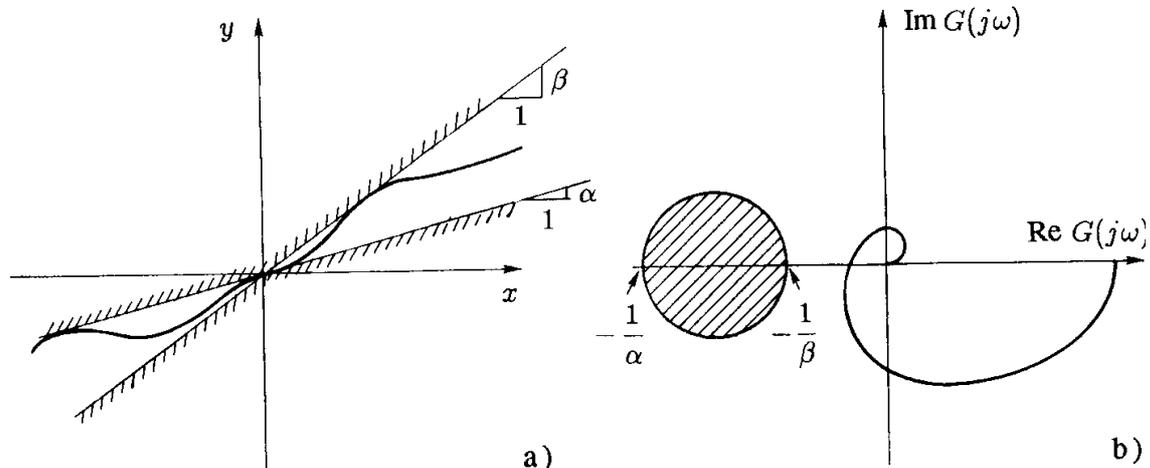


Il criterio del cerchio

- Il criterio del cerchio fornisce condizioni sufficienti per la stabilità asintotica globale dei sistemi in retroazione non lineari autonomi del seguente tipo:

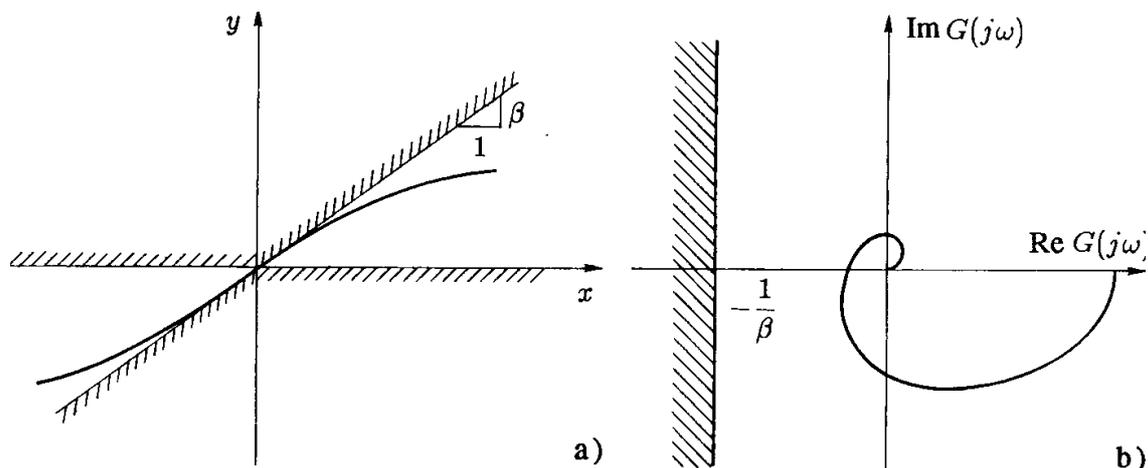


- A tale schema ci si riconduce quando il segnale di riferimento r si possa considerare costante.
- Ipotesi per poter applicare il criterio del cerchio: la caratteristica dell'elemento non lineare deve essere ad un sol valore e contenuta in un settore delimitato da due rette passanti per l'origine e aventi rispettivamente pendenze α e β , che si suppongono entrambe positive.



- Noti i parametri α e β , si può costruire il “cerchio critico” (vedi figura).
- **Criterio del cerchio.** *Nell'ipotesi che la funzione di trasferimento della parte lineare del sistema $G(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nell'origine semplice o doppio, condizione sufficiente perché il sistema in retroazione sia globalmente asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(j\omega)$ non circonda né tocchi il cerchio critico.*

- Il criterio del cerchio, almeno nella sua enunciazione semplificata sopra riportata, risulta di applicazione molto semplice e si presenta come un'estensione del criterio di Nyquist.
- È frequente il caso in cui, tendendo la caratteristica dell'elemento non lineare ad un asintoto orizzontale, come ad esempio in presenza di saturazione netta, occorre assumere $\alpha = 0$:



In questo caso il cerchio degenera nel semipiano a sinistra della retta verticale per il punto $-1/\beta$.