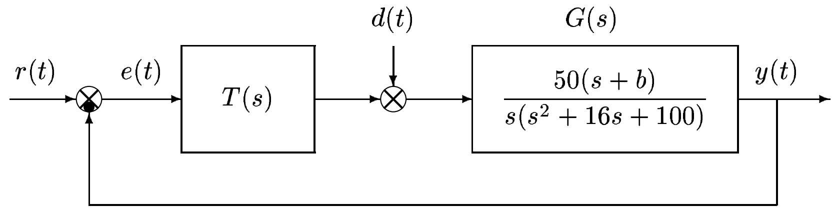
Sia dato il seguente sistema in retroazione:



a) Posto $T(s) = K$ e $b > 0$, determinare in funzione di b per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

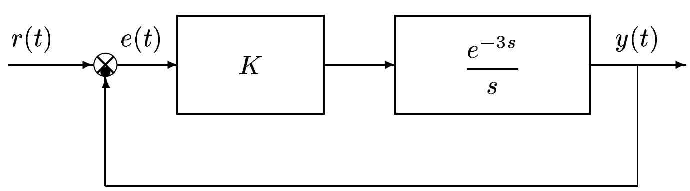
b) Posto $T(s) = 2$ e $b = 20$, determinare l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione contemporanea dei seguenti segnali: riferimento $r(t) = 2 + 3t$ e disturbo $d(t) = 10$.

c) Posto $b = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_b dell'asintoto verticale. Individuare, se esistono, le intersezioni con il semiasse reale negativo.

d) Posto $T(s) = K$ e $b = 20$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro K. Tracciare "qualitativamente" i luoghi delle radici sia per $K > 0$ che per $K < 0$ sapendo che sull'asse reale è presente un solo punto di diramazione. Calcolare esattamente 1) il centro stella degli asintoti σ_a e 2) il valore di K a cui corrisponde la condizione di minimo tempo di assestamento per il sistema retroazionato.

e) Posto $T(s) = 1$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $b > 0$. Calcolare il valore di b a cui corrisponde la condizione di minimo tempo di assestamento.

f) Si consideri il seguente sistema retroazionato:



Determinare il valore del guadagno K tale da garantire al sistema retroazionato un margine di ampiezza $M_a = 5$.

g) (Facoltativo) Posto $b = 20$ e $T(s) = \dfrac{1}{(\beta s + 20)}$, tracciare "qualitativamente" il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\beta > 0$ tenendo presente che per $\beta = 0$ i poli del sistema retroazionato sono: $p_1 = -10.71$ e $p_{2,3} = -2.644 \pm j9.293$.

a) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{50K(s+b)}{s(s^2+16s+100)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 16s^2 + (100+50\,K)s + 50\,K\,b = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (100+50\,K) \\ 2 & 16 & 50\,K\,b \\ 1 & 16(100+50\,K) - 50\,K\,b & \\ 0 & 50\,K\,b & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \rightarrow \quad 1 > 0 \\ \rightarrow \quad 16 > 0 \\ \rightarrow \quad 16(2+K) - K\,b > 0 \\ \rightarrow \quad K\,b > 0 \end{array}$$

I valori di K per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile sono quelli che rendono positivi tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh:

$$K\,b > 0, \qquad\qquad 32 + (16-b)K > 0$$

Si distinguono due casi:

$$\begin{array}{llcl} 1) & 0 < b < 16 & \rightarrow & K > 0 \\ 2) & b > 16 & \rightarrow & 0 < K < \dfrac{32}{b-16} = K^* \end{array} \tag{1}$$

b) Vale la sovrapposizione degli effetti. Il gradino di ampiezza $r_1 = 2$ non ha nessun effetto sull'errore a regime $e_\infty(t)$ in quanto il sistema $T(s)G(s)$ è di tipo 1. L'errore a regime dovuto alla rampa $r_2 = 3t$ è il seguente:

$$e_2 = \frac{3}{K_v}, \qquad K_v = 20 \qquad \rightarrow \qquad e_\infty(t) = 0.15$$

Il contributo del disturbo si calcola nel modo seguente:

$$e_3 = 10 \lim_{s\to 0} \frac{-G(s)}{1+T(s)G(s)} = -\frac{10}{2} = -5$$

Quindi si ha che

$$e_\infty(t) = 0.15 - 5 = -4.85$$

c) Per $b = 20$, la funzione di trasferimento $G(s)$ vale

$$G(s) = \frac{50(s+20)}{s(s^2+16s+100)}$$

Il corrispondente diagramma di Nyquist è mostrato in Fig. 1. Il diagramma di Nyquist presenta un asintoto verticale in

$$\sigma_b = \frac{1000}{100}\left(\frac{1}{20} - \frac{16}{100}\right) = -\frac{11}{10} = -1.1$$

Esiste un'intersezione σ_1 con il semiasse negativo che può essere facilmente individuata utilizzando i risultati dall'analisi di stabilità svolta al punto a). Sostituendo $b = 20$ in (1) si determina il margine di ampiezza M_a del sistema e da questo si ricava poi l'intersezione σ_1 con il semiasse negativo

$$M_a = \frac{32}{20-16} = 8 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_1 = -\frac{1}{M_a} = -\frac{1}{8} = -0.125$$

L'intersezione con il semiasse negativo avviene alla pulsazione $\omega_1 = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$.

d) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{50K(s+b)}{s(s^2+16s+100)} = 0$$

L'andamento del luogo delle radici del sistema retroazionato per $b = 20$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 2. L'andamento del luogo delle radici $K < 0$ è mostrato in Fig. 3. I poli di partenza

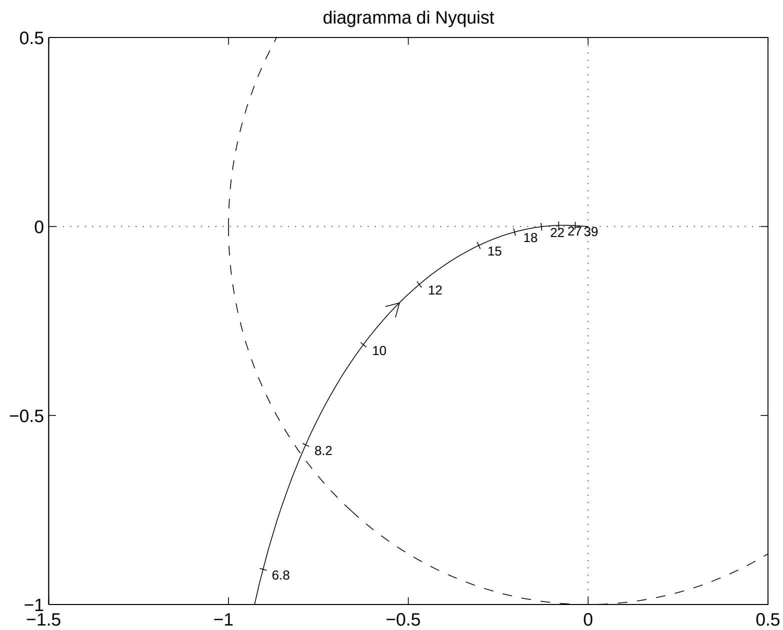


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $G(s)$.

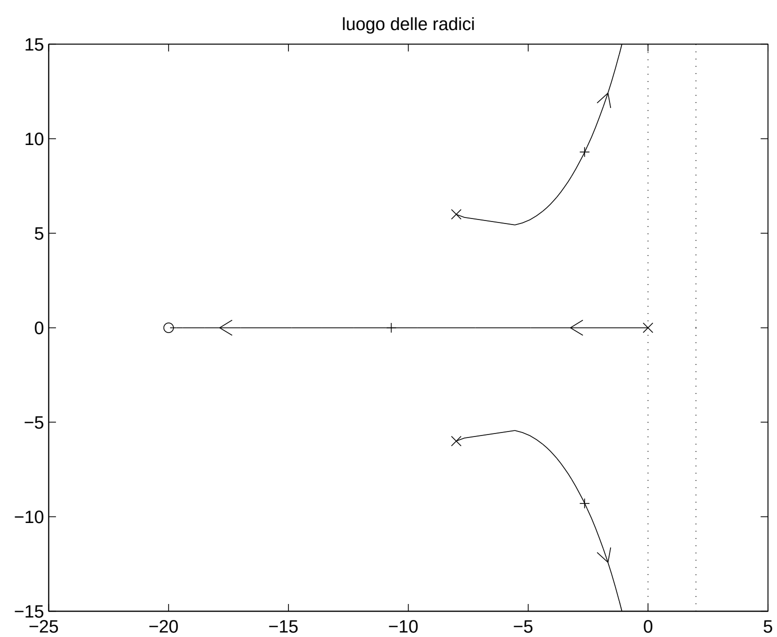


Figura 2: Luogo delle radici del sistema retroazionato per $b = 20$ e al variare del parametro $K > 0$.

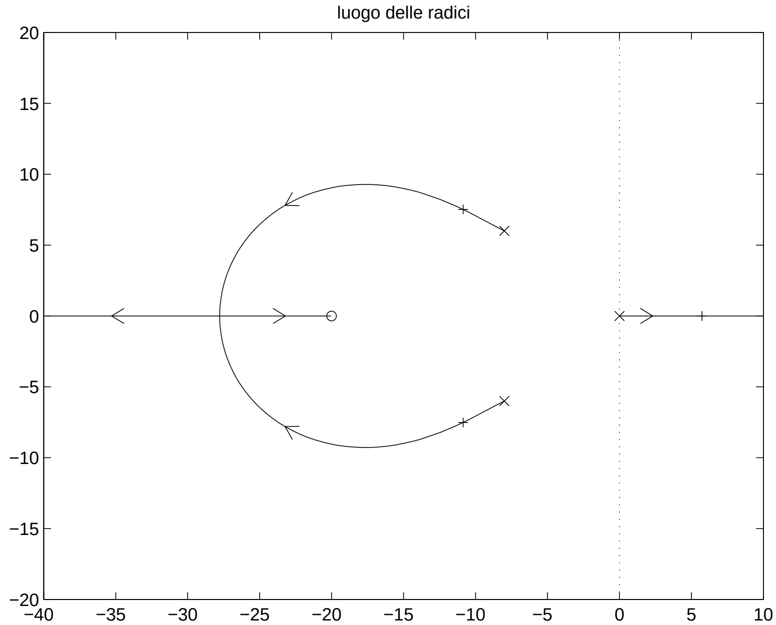


Figura 3: Luogo delle radici del sistema retroazionato per $b = 20$ e al variare del parametro $K < 0$.

del luogo delle radici sono $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -8 \pm j6$. Il luogo delle radici presenta due asintoti verticali. Il centro stella σ_a degli asintoti in funzione di b è il seguente:

$$\sigma_a = \left.\frac{(b-16)}{2}\right|_{b=20} = 2$$

La condizione di minimo tempo di assestamento per il sistema retroazionato si ha per $K > 0$ quando tutte e tre le radici sono allineate. Il valore σ_0 della corrispondente parte reale si determina utilizzando il teorema del baricentro:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) = -\frac{16}{3}$$

Il corrispondente valore di K si ottiene nel seguente modo:

$$K = -\left.\frac{s(s^2+16s+100)}{50(s+b)}\right|_{s=\sigma_0} = \left.\frac{3104}{225(3b-16)}\right|_{b=20} = 0.3135$$

e) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{50(s+b)}{s(s^2+16s+100)} = 0$$

Trasformando l'equazione in modo da mettere in evidenza il parametro b si ottiene:

$$1 + \frac{50b}{s(s^2+16s+150)} = 0$$

Le radici sono:

$$p_1 = 0, \qquad p_{2,3} = -8 \pm \sqrt{64-150} = -8 \pm 9.27j$$

L'andamento del contorno delle radici al variare del parametro $b > 0$ è mostrato in Fig. 4. Il luogo delle radici presenta tre asintoti il cui centro stella è

$$\sigma_a = -\frac{16}{3} = -5.333$$

La condizione di minimo tempo di assestamento si ha quando tutte e tre le radici sono allineate:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) = -\frac{16}{3}$$

Il corrispondente valore di b si ottiene nel seguente modo:

$$b = -\left.\frac{s(s^2+16s+150)}{50}\right|_{s=\sigma_0} = 9.932$$

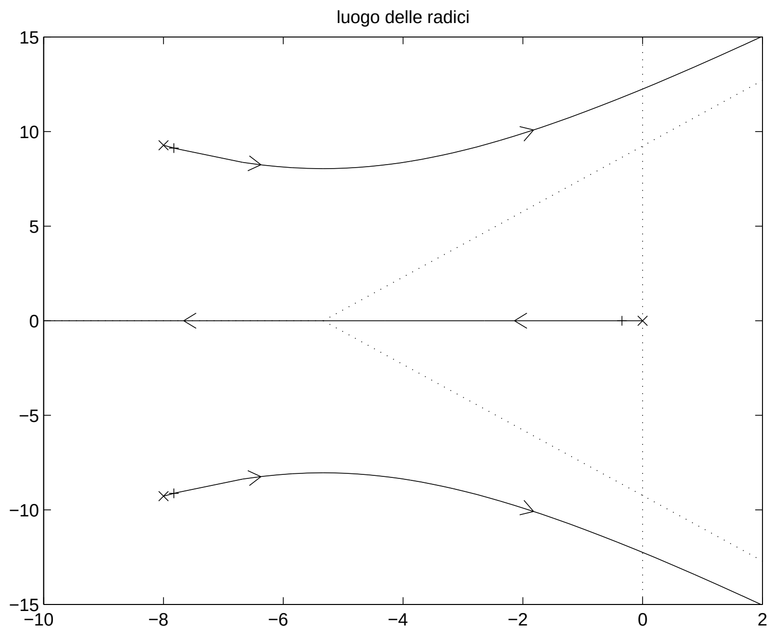


Figura 4: Luogo delle radici del sistema retroazionato per $T(s) = 1$ e al variare del parametro $b > 0$.

f) L'intersezione con il semiasse negativo si ha quando la fase del sistema vale $-\pi$:

$$-\frac{\pi}{2} - \omega_0 t_0 = -\pi \qquad \rightarrow \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{2t_0} = \frac{\pi}{6}$$

Imponendo al sistema il margine di fase voluto

$$\left|\frac{K\, e^{-3s}}{s}\right|_{s=j\omega_0} = \frac{1}{M_a} = \frac{1}{5} \qquad \rightarrow \qquad \frac{K}{\omega_0} = \frac{1}{5}$$

si ottiene

$$K = \frac{\omega_0}{5} = \frac{\pi}{30}$$

g) Posto $b = 20$ e $T(s) = \dfrac{1}{(\beta s + 20)}$, l'equazione caratteristica è la seguente:

$$1 + \frac{50(s+20)}{s(\beta s + 20)(s^2 + 16s + 100)} = 0$$

Ponendo in evidenza il parametro β si ottiene:

$$1 + \frac{\beta s^2(s^2 + 16s + 100)}{20s(s^2 + 16s + 100) + 50(s+20)} = 0$$

L'andamento del contorno delle radici al variare del parametro $\beta > 0$ è mostrato in Fig. 5.

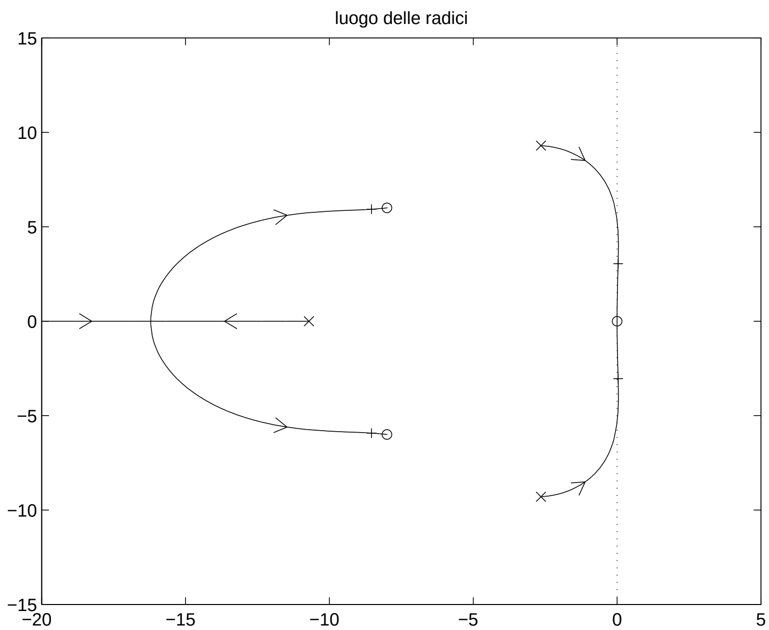


Figura 5: Contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\beta > 0$.

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. In corrispondenza di un polo multiplo di ordine h dell'equazione caratteristica $1 + K\,G(s) = 0$, il luogo delle radici di $G(s) = N(s)/T(s)$ presenta la confluenza di un numero r di rami pari a ($m = grado[N(s)]$, $n = grado[T(s)]$):

   ○ $r = m$
   ○ $r = n - m$
   ⊗ $r = h$
   ○ $r = 2\,h$

2. Il sistema $G(s)$, supposto a fase minima e privo di zeri, ha un diagramma di Bode delle ampiezze che interseca l'asse a guadagno unitario nel punto centrale di un tratto a pendenza -2. Una stima del margine di fase M_F del sistema è la seguente

   ○ $M_F \simeq \frac{\pi}{2}$
   ⊗ $M_F \simeq 0$
   ○ $M_F \simeq -\frac{\pi}{2}$

3. Una stima della larghezza di banda ω_f di un sistema retroazionato avente $G(s)$ sul ramo diretto e $H(s) = 1$ sul ramo di retroazione è

   ⊗ ω_f tale che $|G(j\omega_f)| = 1$
   ○ ω_f tale che $|G(j\omega_f)| = \sqrt{2}$
   ○ ω_f tale che $|G(j\omega_f)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4. Il diagramma di Nichols del sistema $G(j\omega) = \frac{K}{s}$ (K costante positiva) è:

   ○ una retta orizzontale
   ⊗ una retta verticale
   ○ una curva

5. Un sistema lineare stabile ingresso limitato-uscita limitata è anche stabile asintoticamente

   ⊗ sempre
   ○ solo se il sistema è a fase minima
   ○ solo se tutti i suoi poli hanno molteplicità unitaria

6. Nell'applicazione del criterio di Routh, le radici dell'equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla

   ○ sono tutte radici a parte reale nulla
   ⊗ sono radici anche dell'equazione caratteristica di partenza
   ⊗ sono radici simmetriche rispetto all'origine del piano complesso

7. Il criterio di Nyquist nella sua forma più generale

   ⊗ è un criterio necessario e sufficiente
   ○ si applica solo ai sistemi a fase minima
   ○ si applica anche a sistemi non lineari

8. Il contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare (da 0 all'infinito)

   ○ di un qualunque parametro del guadagno di anello
   ⊗ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica
   ○ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero

9. I luoghi ad M ed N costanti possono essere definiti

   ○ solo sui diagrammi polari
   ⊗ anche sui diagrammi di Nichols
   ○ anche sui diagrammi di Bode

10. Un ritardo puro $G(s) = e^{-t_0 s}$ posto in retroazione negativa su un guadagno K

   ⊗ è stabile per di $0 < K < 1$
   ○ è stabile per di $0 < K < t_0$
   ○ è stabile per di $0 < K < \frac{1}{t_0}$
   ○ è stabile per di $0 < K < \frac{\pi}{t_0}$

11. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa

   ⊗ ha un guadagno statico unitario
   ○ ha un guadagno statico minore di 1
   ○ ha un guadagno statico maggiore di 1

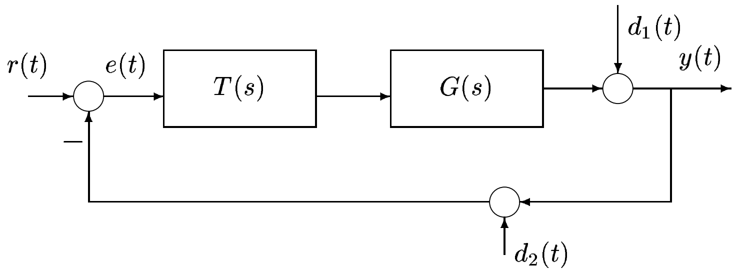
12. In base al principio del modello interno, per neutralizzare (con errore nullo a regime) un modo in ingresso corrispondente ad un polo doppio nell'origine occorre che nel guadagno d'anello del sistema retroazionato

   ○ sia presente almeno un polo nell'origine
   ○ siano presenti almeno tre poli nell'origine
   ⊗ siano presenti almeno due poli nell'origine

13. Se i coefficienti dell'equazione caratteristica di un sistema retroazionato sono tutti positivi, allora è possibile affermare che il sistema retroazionato

   ○ è stabile
   ⊗ può essere stabile
   ⊗ può essere instabile

Sia dato il seguente sistema in retroazione:



1. Posto:

$$T(s) = K, \quad G(s) = \frac{(10-2s)}{(s+2)(3+9s)}$$

   determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

2. Determinare per quali valori del parametro $K > 0$ si ha un errore a regime $|e_\infty(t)| < 0.1$ quando sul sistema agiscono i disturbi costanti $d_1(t) = 3$, $d_2(t) = 5$ ed il riferimento a gradino $r(t) = 2$.

3. Disegnare qualitativamente il diagramma polare di Nyquist della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente le intersezioni con l'asse reale.

4. Tracciare qualitativamente i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

5. Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema $G(s)$ retroazionato al variare del parametro $K > 0$, calcolando esattamente:

   (a) La posizione dei punti di diramazione del luogo delle radici.

   (b) Le intersezioni con l'asse immaginario.

   (c) Il valore di K a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento.

6. Posto $T(s) = (1+\tau s)$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici della funzione $T(s)G(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$. Determinare solo "qualitativamente" la posizione di eventuali punti di diramazione.

Risposte

1. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$9s^2 + (21 - 2K)s + 6 + 10K = 0$$

Il sistema è asintoticamente stabile se tutti e tre i coefficienti dell'equazione caratteristica sono positivi, cioè per

$$-\frac{6}{10} < K < \frac{21}{2} \qquad \rightarrow \qquad -0.6 < K < 10.5 = K^*$$

Il valore di ω^* corrispondente a K^* vale

$$\omega^* = \sqrt{\frac{6 + 10K^*}{9}} = \frac{\sqrt{111}}{3} = 3.512$$

2. Da un punto di vista dell'errore a regime, i disturbi d_1 e d_2 agiscono in parallelo al riferimento $r(t)$. L'errore a regime complessivo $e_\infty(t)$ si ottiene dalla formula

$$e_\infty(t) = \frac{r - d_1 - d_2}{1 + K_p} \qquad \text{dove} \qquad K_p = \lim_{s\to 0} KG(s) = K\frac{5}{3}$$

Sostituendo si ottiene

$$|e_\infty(t)| = \left|\frac{2 - 3 - 5}{1 + K\frac{5}{3}}\right| < 0.1 \qquad \rightarrow \qquad 180 < |3 + 5K|$$

da cui

$$K > \frac{177}{5} = 35.4$$

3. Il diagramma di Nyquist del sistema è mostrato in Fig. 6. Il diagramma parte dal punto $\sigma_0 = \frac{5}{3} = 1.6666$

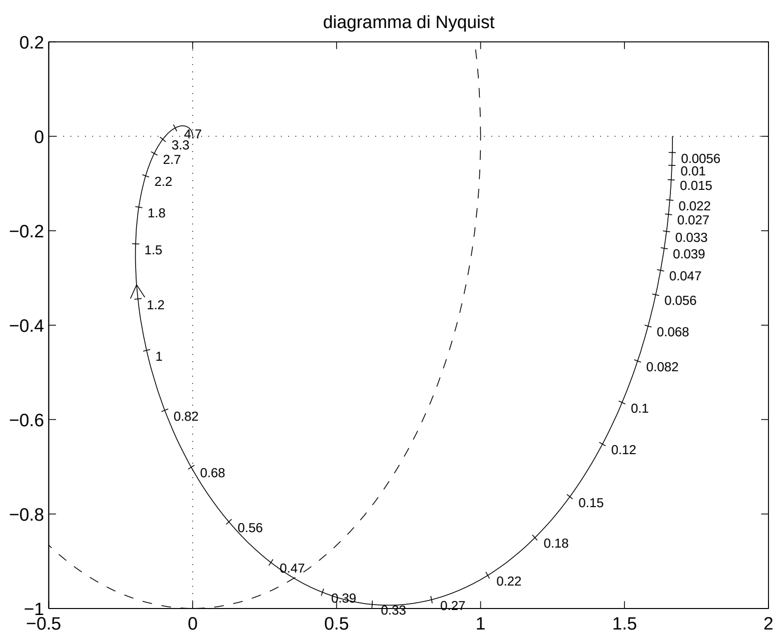


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$

dell'asse reale e poi si muove verso l'origine sfasando complessivamente di $\frac{3\pi}{2}$. L'intersezione con il semiasse negativo si ha in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 3.512$ nel punto

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{2}{21} = -0.0952$$

4. I diagrammi asintotici di Bode sono mostrati in Fig. 7. Il guadagno statico del sistema è

$$G(0) = \frac{5}{4} = 1.6666 = 4.437 \text{ db}$$

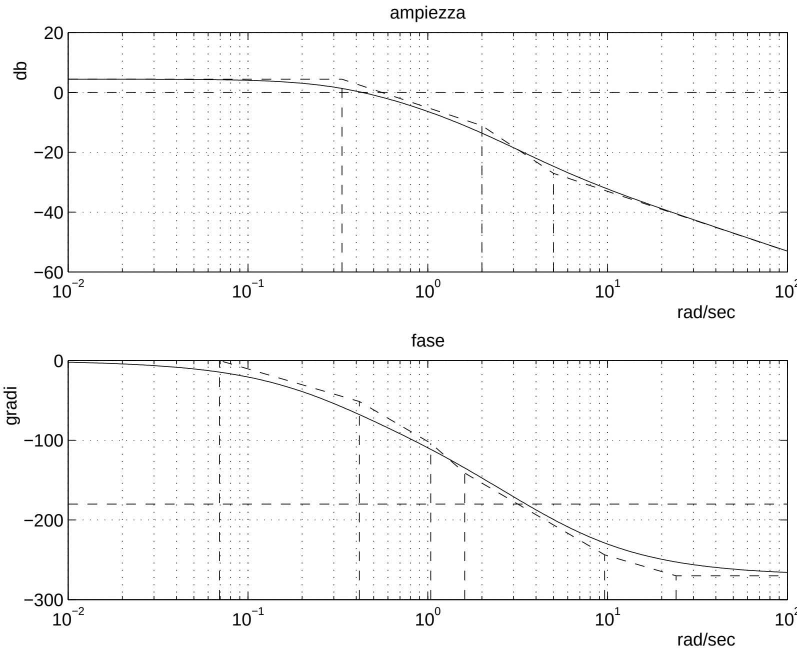


Figura 7: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G(s)$

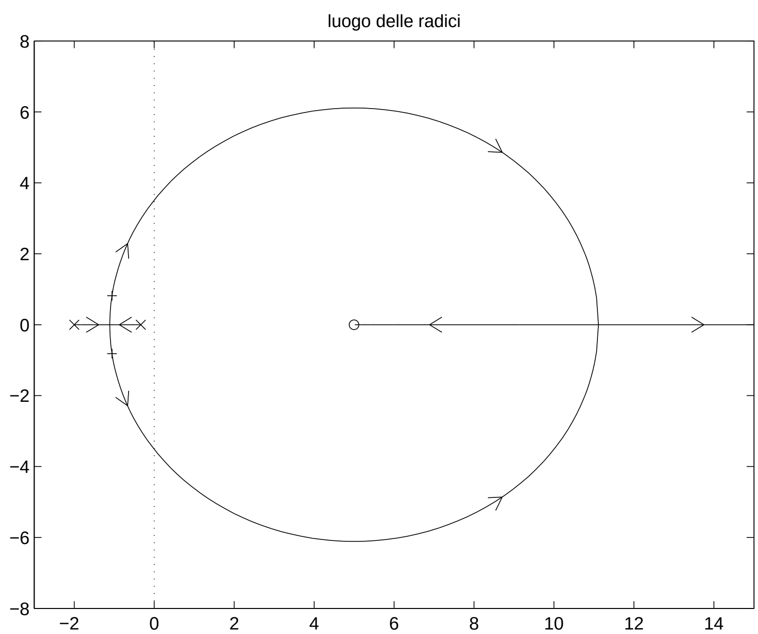


Figura 8: Luogo delle radici della funzione $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

5. Per disegnare il luogo delle radici è opportuno portare l'equazione caratteristica nella nella forma poli/zeri:

$$1 - K\frac{2}{9}\frac{(s-5)}{(s+2)(s+\frac{1}{3})}$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 8. In questo caso il luogo delle radici descrive una circonferenza centrata $z_1 = 5$ di raggio

$$R = \sqrt{(z_1 - p_1)(z_1 - p_2)} = \sqrt{(5+2)(5+\frac{1}{3})} = \sqrt{\frac{112}{3}} = 6.11$$

I due punti di diramazione sono quindi posizionati in

$$d_{1,2} = 5 \pm \sqrt{\frac{112}{3}} = 5 \pm 6.11 = \begin{cases} -1.11 \\ 11.11 \end{cases}$$

Le intersezioni con l'asse immaginario si hanno in corrispondenza del valore $K = K^* = 10.5$ alla pulsazione $\omega^* = 3.512$.

Il minimo tempo di assestamento si ha in corrispondeza del punto di diramazione negativo $d_1 = -1.11$. Il corrispondete valore di K si calcola come segue

$$K_1 = \left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-d_1} = \frac{1}{1.964} = 0.509$$

6. Per studiaree il contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$ occorre trasformare l'equazione caratteristica nel modo seguente

$$1 + \frac{(1+\tau s)(10-2s)}{(s+2)(3+9s)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{\tau s(10-2s)}{(s+2)(3+9s)+10-2s} = 0$$

Evidenziando i poli e gli zeri della nuova funzione si ottiene

$$1 - \frac{2\tau s(s-5)}{9s^2+19s+16} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 - \frac{2\tau s(s-5)}{9(s+1.056)^2+0.8146^2} = 0$$

L'andamento qualitativo del contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$ è mostrato in Fig. 9.

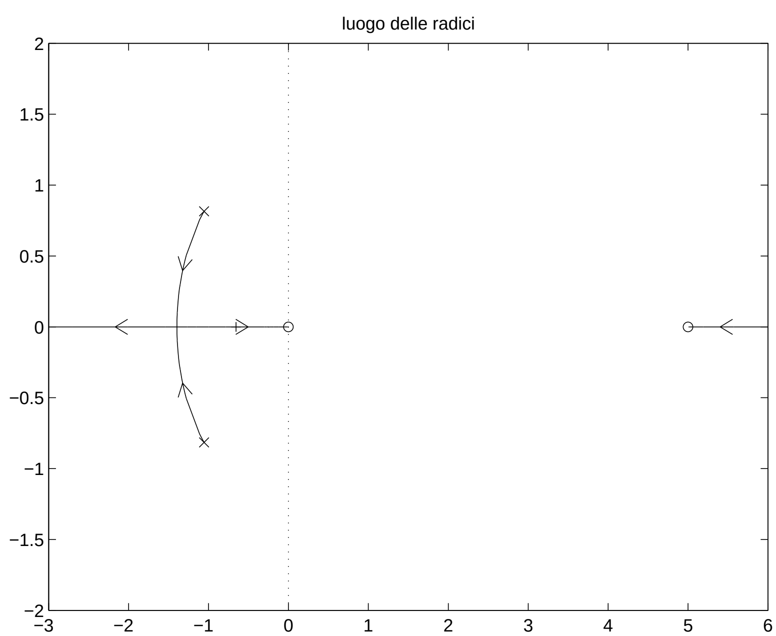


Figura 9: Contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$.

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. Nell'applicazione del criterio di Routh, le radici dell'equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla

   ⊗ sono radici anche dell'equazione caratteristica di partenza
   ○ sono tutte radici a parte reale nulla
   ⊗ sono radici simmetriche rispetto all'origine del piano complesso

2. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa

   ○ ha un guadagno statico minore di 1
   ○ ha un guadagno statico maggiore di 1
   ⊗ ha un guadagno statico unitario

3. Un ritardo puro $G(s) = e^{-s\theta}$ posto in retroazione negativa su un guadagno K

   ○ è stabile per qualunque valore di K
   ○ è stabile per qualunque valore positivo di $K > 0$
   ⊗ è instabile per valori di K sufficientemente elevati

4. I luoghi ad M ed N costanti possono essere definiti

   ○ solo sui diagrammi polari
   ⊗ anche sui diagrammi di Nichols
   ○ anche sui diagrammi di Bode

5. Un sistema lineare $G(s)$ avente solo poli semplici, tutti posizionati sull'asse immaginario è

   ○ instabile
   ⊗ semplicemente stabile
   ○ stabile ingresso limitato - uscita limitata

6. Per avere errore a regime nullo a fronte del segnale di ingresso $R(s) = \frac{R_0}{s^2}$ il guadagno di anello del sistema retroazionato

   ○ deve avere almeno un polo nell'origine
   ⊗ deve avere almeno due poli nell'origine
   ○ deve avere una costante di velocita K_v finita

7. Un sistema dinamico $G(s)$ avente i poli e gli zeri posizionati in modo alterno sull'asse reale, presenta un luogo delle radici

   ⊗ che per $K > 0$ si evolve tutto sull'asse reale
   ⊗ che per $K < 0$ si evolve tutto sull'asse reale
   ○ che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale

8. Siano $M_0 = G(j0)$ ed $M_1 = \max_\omega |G(j\omega)|$, rispettivamente, il guadagno statico e il valore massimo del modulo della funzione di risposta armonica del sistema lineare stabile $G(s)$. Il picco di risonanza M_R del sistema $G(s)$ è definito come segue

   ○ $M_R = M_1$
   ⊗ $M_R = \frac{M_1}{M_0}$
   ○ $M_R = \sqrt{M_1 M_0}$

9. Il diagramma polare "completo" di una funzione $F(s)$ di tipo 2 deve essere "chiuso" all'infinito

   ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario che parte da $F(j0^-)$ e arriva in $F(j0^+)$
   ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario che parte da $F(j0^+)$ e arriva in $F(j0^-)$
   ⊗ con una circonferenza percorsa in senso orario che parte da $F(j0^-)$ e arriva in $F(j0^+)$
   ○ con una circonferenza percorsa in senso orario che parte da $F(j0^+)$ e arriva in $F(j0^-)$

10. Una stima della larghezza di banda ω_f di un sistema retroazionato avente $G(s)$ sul ramo diretto e $H(s) = h$ sul ramo di retroazione è

    ○ ω_f tale che $|G(j\omega_f)| = 1$
    ○ ω_f tale che $|G(j\omega_f)| = h$

⊗ ω_f tale che $|G(j\omega_f)| = \frac{1}{h}$

11. Il contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare (da 0 all'infinito)

    ○ di un qualunque parametro del guadagno di anello

    ⊗ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica

    ○ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero

12. Noto il diagramma polare della funzione $G(s)$, utilizzando i luoghi ad M costante è facile determinare i seguenti parametri del sistema retroazionato $G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$:

    ⊗ il picco di risonanza M_R di $G_0(s)$

    ⊗ la larghezza di banda ω_f di $G_0(s)$

    ○ il tempo si assestamento T_a di $G_0(s)$

13. L'errore a regime $e(\infty)$ del sistema $G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$ posto in retroazione unitaria negativa quando in ingresso è presente una rampa unitaria $r(t) = t$ è

    ○ $e(\infty) = 1$

    ⊗ $e(\infty) = \frac{1}{2}$

    ○ $e(\infty) = \frac{1}{3}$

14. Sia $1 + K\,G(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Le radici triple del corrispondente luogo delle radici al variare del parametro K sono tutte e sole le soluzioni

    ○ dell'equazione $\frac{d^2G(s)}{ds^2} = 0$

    ○ del sistema di equazioni: $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d^2G(s)}{ds^2} = 0$

    ⊗ del sistema di equazioni: $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{dG(s)}{ds} = 0$, $\frac{d^2G(s)}{ds^2} = 0$

Controlli Automatici I
Compito 11 maggio 1998 - Esercizi

1. Sia dato il sistema di Fig. 1, con $a = b = 10$.

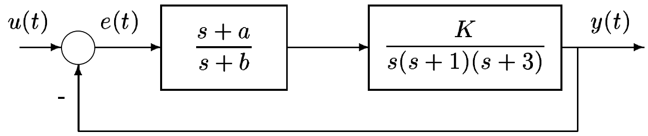


Figura 1. Sistema in retroazione.

1.a Si determini il luogo delle radici del sistema al variare del parametro K. Si tracci il luogo sia per $K > 0$ sia per $K < 0$, determinando con esattezza il centro della stella di asintoti e i punti di diramazione del luogo.

1.b Si determini per quali valori di K il sistema in retroazione è stabile. Si calcolino inoltre con esattezza le intersezioni del luogo con l'asse immaginario $j\omega$.

1.c Determinare il valore di K per cui il sistema in retroazione ha un errore a regime $e_r = 0.3$ per ingresso a rampa $u(t) = 0.5t$.

2. Si ponga, nel sistema di Fig. 1, $a = 0, K = 1$. Determinare il valore del polo b in modo di avere un errore a regime $e_r = 0.1$ per ingresso a gradino $u(t) = 1$.

3. Si faccia riferimento alla Fig. 2

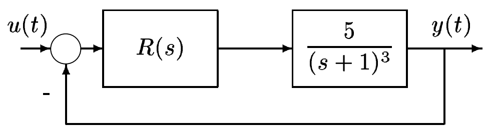


Figura 2: Sistema in retroazione.

3.a Si ponga $R(s) = 1$. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$, analizzandone la stabilità una volta posto il sistema in retroazione unitaria.

3.b Calcolare il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s)$ definito al precedente punto 3.a.

3.c Posto $R(s) = K$, definire il valore di K in modo che la coppia di poli dominanti del sistema retroazionato abbia parte reale pari a 0.5.

4. Si faccia riferimento alla Fig. 2.

4.a Posto $R(s) = (s + a)$, determinare il contorno delle radici del sistema al variare del parametro a, calcolando con esattezza il centro della stella di asintoti e i punti di diramazione.

4.b Determinare per quali valori di a il sistema in retroazione risulta stabile.

Nome: ____________________

Controlli Automatici I

Compito 11 maggio 1998 - Domande teoriche

Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti hanno più risposte corrette, e si considerano superati quando queste sono segnate tutte.

1. Il sistema $G(s) = \frac{1}{(s^2+2s+4)}$ retroazionato con retroazione unitaria ha un errore a regime e_r per ingresso a gradino $R(s) = 10/s$ pari a:
   - ◯ $e_r = 0$;
   - ⊗ $e_r = 8$;
   - ◯ $e_r = \infty$.
2. Il luogo delle radici del sistema $KG(s)$ per $K > 0$ è:
   - ◯ il luogo dei punti del piano complesso descritto da $KG(j\omega)$ al variare di ω da 0 a ∞;
   - ◯ l'insieme dei punti del piano complesso descritto dai poli di $KG(s)$ al variare di K;
   - ⊗ l'insieme dei punti del piano complesso descritto dai poli di $G_0(s) = G(s)/(1 + G(s))$ al variare di K.
3. Il sistema $G(s) = (s + 5)/(s^2 - 5s + 10)$ posto in retroazione è stabile se:
   - ◯ il diagramma di Nyquist di $G(s)$ non circonda il punto critico $-1 + j0$;
   - ◯ il diagramma di Nyquist di $G(s)$ circonda il punto critico $-1 + j0$ percorrendo 2 giri in senso orario;
   - ⊗ il diagramma di Nyquist di $G(s)$ circonda il punto critico $-1 + j0$ percorrendo 2 giri in senso antiorario;
4. Un sistema $G(s)$ stabile posto in retroazione è asintoticamente stabile se:
   - ⊗ il margine di fase M_F di $G(s)$ è positivo;
   - ◯ il margine di fase M_F di $G(s)$ è negativo;
   - ⊗ il margine di ampiezza M_A di $G(s)$ è maggiore di uno.
5. Il luogo delle radici di un sistema $G(s)$:
   - ◯ è simmetrico rispetto al *baricentro dei poli* (quando questo esiste);
   - ⊗ è simmetrico rispetto all'asse reale;
   - ◯ è simmetrico rispetto all'asse immaginario.
6. Il criterio di Routh-Hurwitz afferma che un sistema $G(s)$:
   - ⊗ è stabile se e solo se gli elementi della prima colonna della tabella hanno segni uguali (CSN);
   - ◯ è stabile se gli elementi della prima colonna della tabella hanno segni uguali (solo CS);
   - ◯ è stabile solo se gli elementi della prima colonna della tabella hanno segni uguali (solo CN).
7. Il contorno delle radici di un sistema $G(s)$:
   - ◯ è una zona del piano complesso che racchiude il luogo delle radici;
   - ⊗ parte da punti del luogo delle radici;
   - ⊗ rappresenta i punti descritti dai poli del sistema retroazionato al variare per esempio di un polo o di uno zero di $G(s)$.
8. Il sistema non proprio $G(s) = \frac{(s+3)^3}{(s+1)}$ ha un luogo delle radici:
   - ◯ con un solo ramo che va dal punto $s = -1$ al punto $s = -3$;
   - ⊗ con tre rami, due dei quali provengono dall'infinto con stella degli asintoti centrata in $\sigma_a = -4$
   - ◯ con tre rami che partono da $s = -1$ e arrivano a $s = -3$: il segmento di asse reale tra -1 e -3 e altri due rami tra questi due punti, simmetrici rispetto all'asse reale e con andamento a forma circolare.

Controlli Automatici I
Compito 11 maggio 1998 - Soluzioni

1.a I luoghi delle radici per $K > 0$ e per $K < 0$ sono riportati nella Fig. 10.

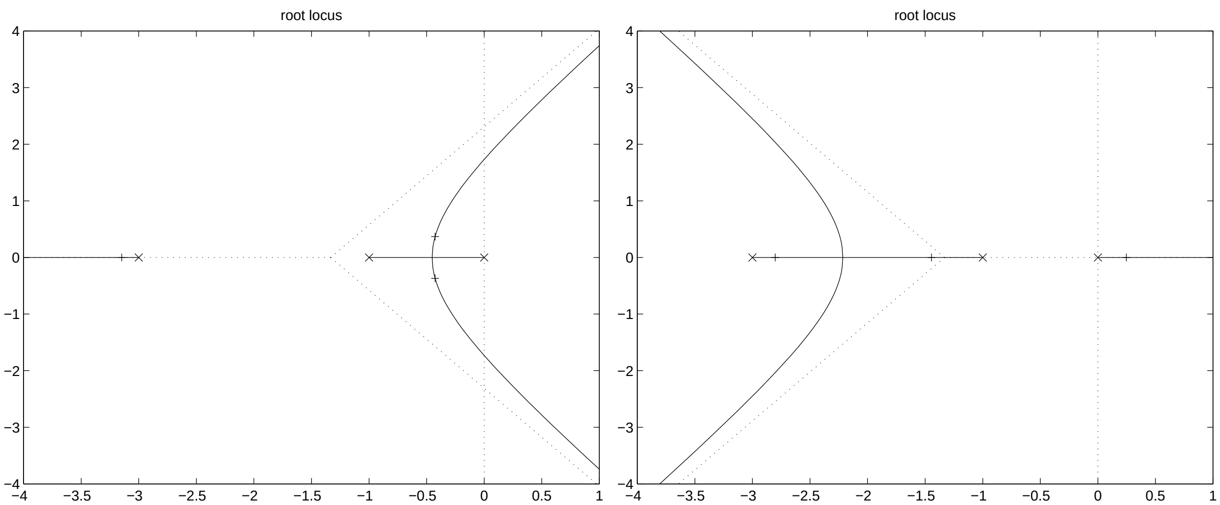


Figura 10: Luogo delle radici per $K > 0$ e per $K < 0$.

I punti di diramazione sono $\sigma_+ = \frac{-8+\sqrt{28}}{6} = -0.4514$ $(K = 0.6311)$ e $\sigma_- = \frac{-8-\sqrt{28}}{6} = -2.215$, $(K = -2.113)$. La stella di asintoti ha centro in $\sigma_a = -4/3 = -1.333$ (angoli 120^o).

1.b La tabella di Routh del sistema è:

3	1	3	
2	4	K	
1	$12 - K$	0	$K < 12$
0	K		$K > 0$

Il sistema risulta stabile per $0 < K < 12$. Per $K = 12$, la seconda riga della tabella fornisce $\omega = \pm\sqrt{3}$.

1.c L'errore a regime per ingresso a rampa $U(s) = 0.5/s^2$ è $E_r = 0.5/K_v$, dove

$$K_v = \frac{K}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad K = 5$$

2. La funzione di trasferimento in catena diretta diviene

$$G(s) = \frac{1}{(s+b)(s+1)(s+3)}$$

e quindi l'errore a regime

$$e_r = \frac{1}{1 + \frac{1}{3b}} = \frac{3b}{3b+1}$$

da cui $b = 1/27 = 0.037$

3.a Il diagramma di Nyquist del sistema è il riportato in Fig. 11. Il sitema risulta stabile.

3.b Il margine di ampiezza si può calcolare sia imponendo che la parte immaginaria di $G(j\omega)$ si annulli, sia utilizzando Routh Hurwitz. Nel primo caso si ha

$$G(j\omega) = \frac{5[(1-3\omega^2) + j\omega(3-\omega)]}{(1-3\omega^2)^2 - \omega^2(3-\omega)^2]}$$

La parte immaginaria si annulla per $\omega = 0$ e $\omega = \sqrt{3}$. In particolare, per $\omega = \sqrt{3}$ la parte reale vale $Re\{G(j\sqrt{3})\} = -5/8$ e quindi $M_A = 8/5 = 1.6$.

Con Routh: l'equazione caratteristica del sistema posto in retroazione $(R(s) = K)$ è $(s+1)^3 + 5K = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + 5K = 0$. La corrispondente tabella è

3	1	3	
2	3	$1 + 5K$	
1	$8 - 5K$	0	$K < 8/5$
0	$1 + 5K$		$K > -1/5$

Il sistema risulta stabile per $-1/5 < K < 8/5 (= M_A)$.

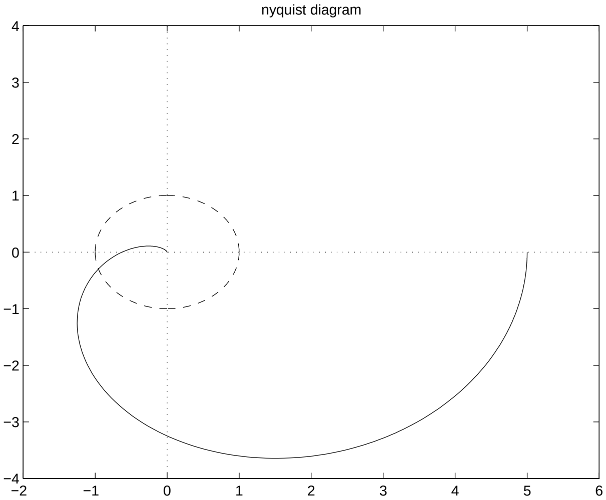


Figura 11: Diagramma di Nyquist

3.c Effettuando un cambio di variabile $w = s + 0.5(s = w - 0.5)$ il sistema si trasforma in

$$G(w) = \frac{5K}{(w+\frac{1}{2})^2}$$

con equazione caratteristica data da

$$8w^3 + 12w^2 + 6w + 1 + 40K = 0$$

Applicando Routh si ha

$$\begin{array}{c|lll} 3 & 8 & 6 & \\ 2 & 12 & 1+40K & \\ 1 & 66-320K & 0 & K < 33/160 \\ 0 & 1+40K & & K > -1/40 \end{array}$$

Il sistema ha quindi la coppia di poli desiderati per $K = 33/160 = 0.2062$.

4.a L'equazione caratteristica del sistema diviene

$$1 + \frac{5a}{s^3 + 3s^2 + 8s + 1)} = 1 + aG'(s) = 0$$

che ha tre poli in $p_{1,2} = -1.4344 \pm 2.3593$, $p_3 = -0.1312$. Il contorno delle radici è mostrato in Fig. 12.

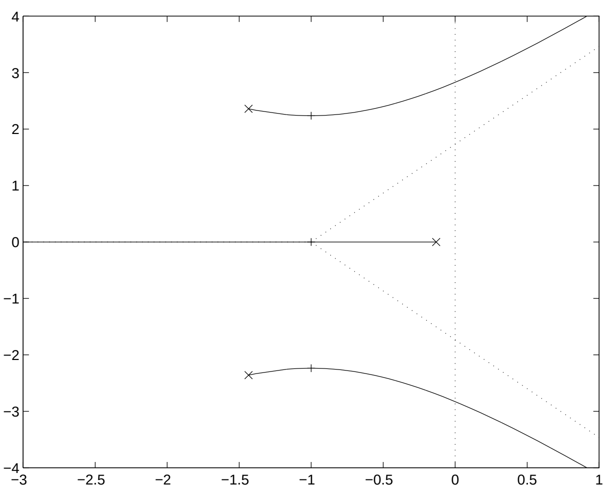
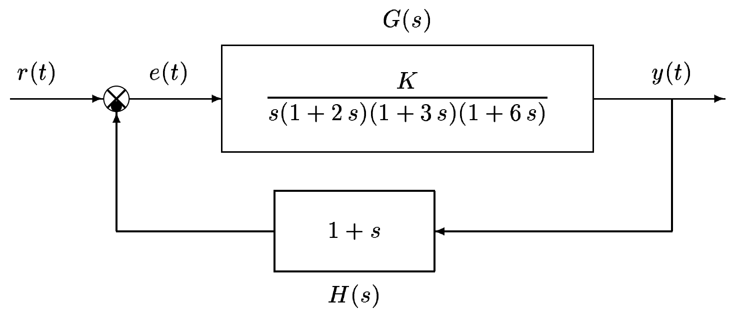


Figura 12: Contorno delle radici.

4.b Il sistema risulta stabile per $-0.2 < a < 4.6$, come si deduce applicando Routh Hurwitz

$$\begin{array}{c|lll} 3 & 1 & 8 & \\ 2 & 3 & 1+5a & \\ 1 & 23-5a & 0 & K < 23/5 \\ 0 & 1+5a & & K > -1/5 \end{array}$$

Sia dato il seguente sistema in retroazione:



a) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è stabile.

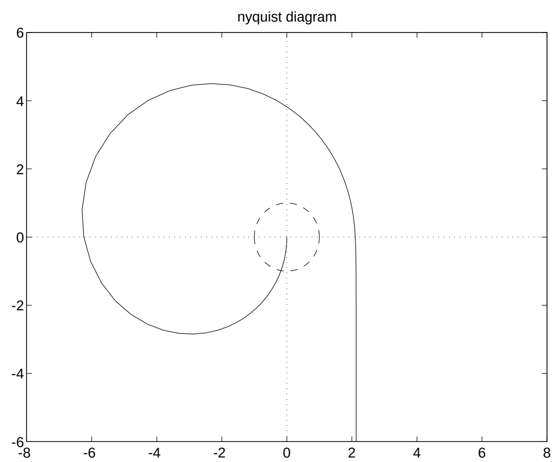
b) Determinare, in funzione di K, l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato in risposta alla rampa $r(t) = 2\,t$. Si faccia riferimento alla seguente definizione dell'errore $e(t) = r(t) - y(t)$.

c) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del guadagno di anello $G(s)H(s)$ al variare del parametro K. Tracciare il luogo delle radici sia per $K > 0$ che per $K < 0$. Si calcoli esattamente il centro stella degli asintoti. Non è necessario calcolare esattamente la posizione dei punti di diramazione: determinare la loro posizione solo in modo qualitativo.

d) Nella figura riportata a fianco è mostrato il diagramma di Nyquist del sistema dinamico

$$G_1(s) = \frac{100(s + 0.1)(s + 2)}{s(s^2 - 16s + 100)}$$

per $\omega \in [0,\ \infty]$. Tracciare qualitativamente il diagramma polare "completo" e dire se, in base al criterio di Nyquist, il corrispondente sistema retroazionato è stabile o meno.



e) Calcolare il contorno delle radici del seguente sistema retroazionato

$$G_2(s) = \frac{2(2 + \tau s)}{s(s + 2)(1 - \tau)}$$

al variare del parametro $\tau > 0$. Calcolare esattamente il punto di diramazione σ_0 sul semiasse negativo ed il corrispondente valore del parametro τ.

f) Facendo riferimento al precedente contorno delle radici, vedi punto e), determinare per quali valori di τ il sistema retroazionato ha un tempo di assestamento $T_a = 1.5\,s$.

g) Sia dato il seguente sistema:

$$G_3(s) = \frac{K\,e^{-3\,s}}{4\,s}$$

Determinare per quali valori di K il corrispondente sistema retroazionato è stabile.

a) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1+\frac{K(s+1)}{s(1+2\,s)(1+3\,s)(1+6\,s)}=0 \qquad \rightarrow \qquad 36\,s^4+36\,s^3+11\,s^2+(1+K)s+K=0$$

a cui corrisponde la seguente tabella di Routh

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 36 & 11 & K \\ 3 & 36 & (1+K) & \\ 2 & (10-K) & K & \\ 1 & (10-K)(1+K)-36K & & \\ 0 & K & & \end{array}$$

Il sistema retroazionato risulta stabile se tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono positivi: $10-K\geq 0$, $-K^2-27\,K+10\geq 0$ e $K\geq 0$. Le soluzioni dell'equazione di secondo grado sono:

$$K_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-27\pm\sqrt{27^2+40}\right)=\frac{1}{2}\left(-27\pm\sqrt{769}\right)=\left\{\begin{array}{c}0.3654\\ -27.36\end{array}\right.$$

Il sistema risulta stabile per $0\leq K\leq 0.3654$.

b) Il sistema dato non ha retroazione unitaria per cui per poter utilizzare le relazioni sugli errori a regime occorre trasformarlo in un sistema equivalente con retroazione unitaria. Essendo $e(t)=r(t)-y(t)$, la $G_{eq}(s)$ da considerare è la seguente

$$G_{eq}(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-1]}=\frac{K}{s[(1+2\,s)(1+3\,s)(1+6\,s)+1]}$$

Dal calcolo della costante di velocità K_v si ricava immediatamente l'errore a regime richiesto

$$K_v=\frac{K}{2} \qquad \rightarrow \qquad e(\infty)=\frac{2}{K_v}=\frac{4}{K}$$

c) L'andamento qualitativo del luogo delle radici del guadagno di anello $G(s)H(s)$ per $K>0$ è riportato in Fig. 13. L'andamento qualitativo del luogo delle radici per $K<0$ è riportato in Fig. 14.

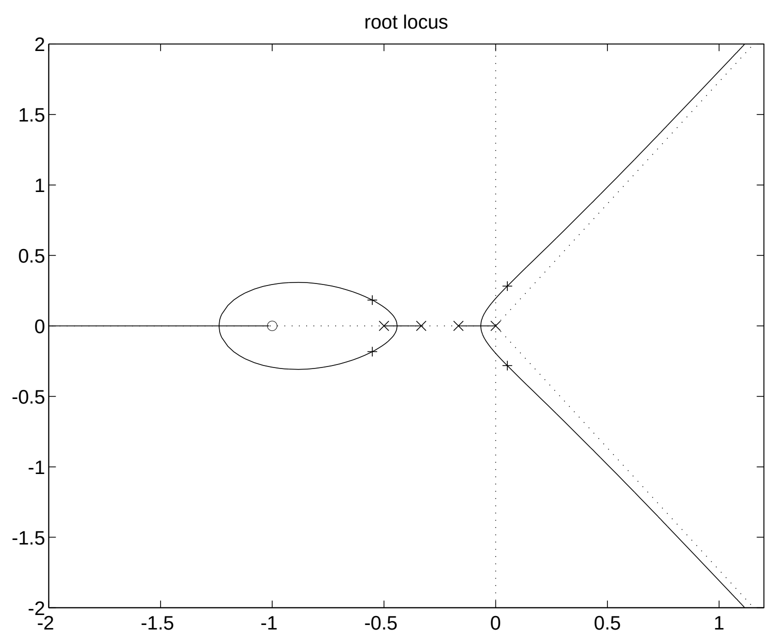


Figura 13: Luogo delle radici del guadagno di anello $G(s)H(s)$ per $K>0$.

Il centro della stella di asintoti è l'origine.

d) Il diagramma va completato all'infinito con una semicirconferenza percorsa in senso orario quando si passa da $\omega=0_-$ a $\omega=0_+$. Il diagramma polare completo circonda due volte in senso antiorario il punto critico -1; il sistema $G_1(s)$ ha due poli a parte reale positiva: ne segue che il sistema retroazionato è stabile.

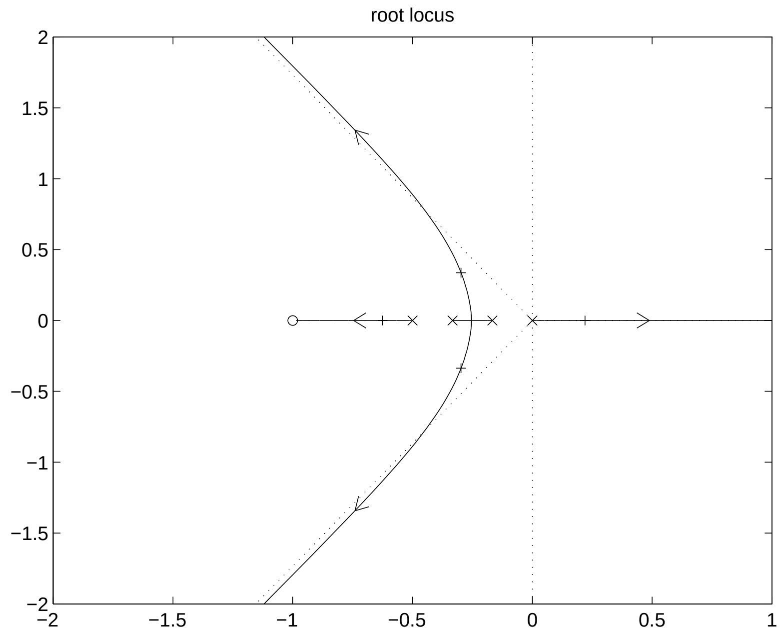


Figura 14: Luogo delle radici del guadagno di anello $G(s)H(s)$ per $K < 0$.

e) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{2(2+\tau s)}{s(s+2)(1-\tau)} = 0$$

Tale equazione può essere trasformata nel seguente modo:

$$(1-\tau)s^2 + 2s + 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 - \frac{\tau s^2}{s(s+2)+4} = 0$$

a cui corrisponde il contorno delle radici riportato in Fig. 15. Il sistema ammette due zeri nell'origine

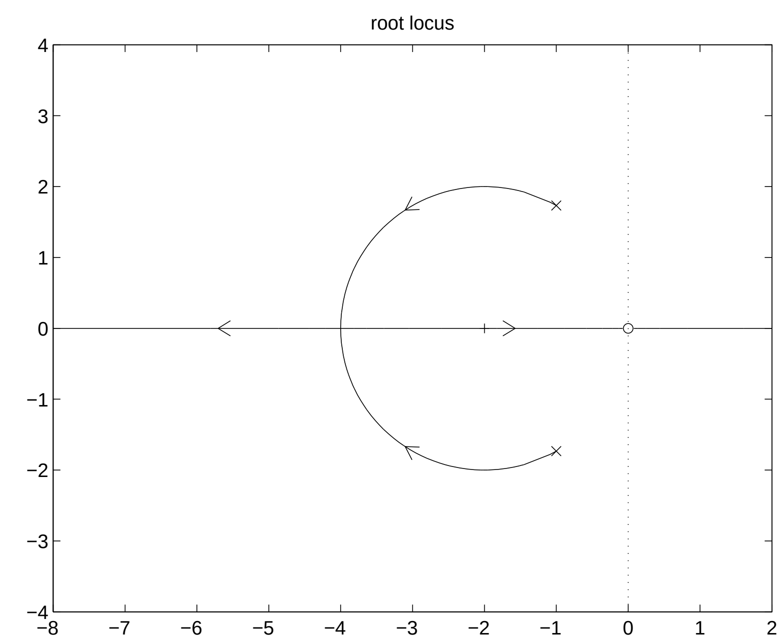


Figura 15: Contorno delle radici.

e una coppia di poli complessi coniugati in $p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$. Il valore di τ corrispondente al punto di diramazione presente sul semiasse negativo si ricava imponendo che le due radici del sistema siano reali coincidenti:

$$b^2 - 4ac = 4 - 16(1-\tau) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \tau = \frac{3}{4} = 0.75 = \tau_0$$

Il punto di diramazione σ_0 è localizzato in

$$\sigma_0 = \left.\sqrt{\frac{4}{(1-\tau)}}\right|_{\tau=\tau_0} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_0 = -4$$

f) Il tempo di assestamento $T_a = 1.5\,s$ si ha quando la parte reale σ dei poli dominanti (o del polo dominante) del sistema retroazionato vale $\sigma = -2$:

$$T_a = 1.5 = \frac{3}{|\sigma|} \qquad \rightarrow \qquad \sigma = -2$$

Per determinare i valori di τ cercati occorre fare un cambiamento di coordinate in modo da portare l'asse immaginario in $\sigma = -2$. Posto $w = s + 2$, l'equazione caratteristica si trasforma come segue

$$(1-\tau)s^2 + 2s + 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad (1-\tau)(w-2)^2 + 2(w-2) + 4 = 0$$

da cui si ottiene

$$(1-\tau)w^2 + (4\tau - 2)w + 4 = 0$$

Per $\tau = 0.5$ si hanno due poli complessi coniugato in $p_{1,2} = -2 \pm 2j$, e per $\tau = 1$ si ha un polo in $p_{1,2} = -2$. Un modo alternativo per calcolare i parametri τ e $p_{1,2}$ è quello di utilizzare l'equazione caratteristica del 2^o ordine ed imporre che

$$\delta\omega_n = \frac{1}{1-\tau} = 2 \qquad \text{da cui} \qquad \tau = 0.5$$

Sostituendo $\tau = 0.5$ nell'equazione caratteristica e calcolando le radici si trova $p_{1,2} = -2$.

g) Il sistema $G_3(s)$ è un sistema composto da un ritardo finito in cascata ad un integratore. Tale sistema è stabile per

$$0 < K < \frac{2\pi}{3}$$

la prima intersezione con il semiasse negativo si ha in corrispondenza della pulsazione

$$\omega = \frac{\pi}{6}$$

Controlli Automatici - 19 Maggio 1997 - Domande teoriche

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. Per un sistema lineare, la stabilità asintotica implica la stabilità ingresso limitato-uscita limitata

   ⊗ sempre

   ○ solo quando il sistema ha poli reali

   ○ solo se l'errore a regime per un ingresso a gradino è nullo

2. Un ritardo puro $G(s) = e^{-s\theta}$

   ⊗ è un sistema lineare

   ○ è un sistema a fase minima

3. Un sistema di tipo 2

   ⊗ ha due poli nell'origine

   ○ ha due zeri nell'origine

   ⊗ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino

   ⊗ ha un errore a regime non nullo nella risposta alla parabola

4. Il criterio di Routh applicato all'equazione caratteristica ed eventualmente esteso derivando l'equazione ausiliaria

   ○ fornisce il numero dei poli a parte reale negativa, ma non dà indicazioni su quelli immaginari e a parte reale positiva

   ○ fornisce il numero totale dei poli a parte reale negativa e nulla non distinguendo però fra di essi

   ⊗ fornisce il numero dei poli a parte reale negativa, quello dei poli a parte reale nulla e quello dei poli a parte reale positiva

5. L'equazione ausiliaria che di ottiene dalla tabella di Routh quando tutti gli elementi di una riga sono nulli

   ○ è composta solo da termini di grado dispari in s

   ⊗ è composta solo da termini di grado pari in s

   ⊗ ha radici simmetriche rispetto all'asse reale

   ⊗ ha radici simmetriche rispetto all'asse immaginario

6. Tra i luoghi ad M costante relativi ai diagrammi polari, quello relativo ad $M = 1$

   ○ è una circonferenza unitaria avente l'origine al proprio interno

   ○ è una circonferenza unitaria avente il punto -1 al proprio interno

   ⊗ è una retta verticale

   ○ è una retta orizzontale

7. In corrispondenza di un polo multiplo, il luogo delle radici presenta la confluenza di un numero di rami

   ○ uguale al grado n del denominatore

   ○ uguale ad grado m del numeratore

   ○ uguale ad $n - m$

   ⊗ uguale all'ordine di molteplicità del polo

8. Dato il sistema $G(s) = N(s)/D(s)$ in retroazione unitaria negativa, le radici "doppie" del corrispondente luogo delle radici si determinano risolvendo rispetto ad s l'equazione

   ⊗ $\frac{dG(s)}{ds} = 0$

   ⊗ $\frac{dN(s)}{ds}D(s) - \frac{dD(s)}{ds}N(s) = 0$

   ○ $\frac{dD(s)}{ds} + K\frac{dN(s)}{ds} = 0$