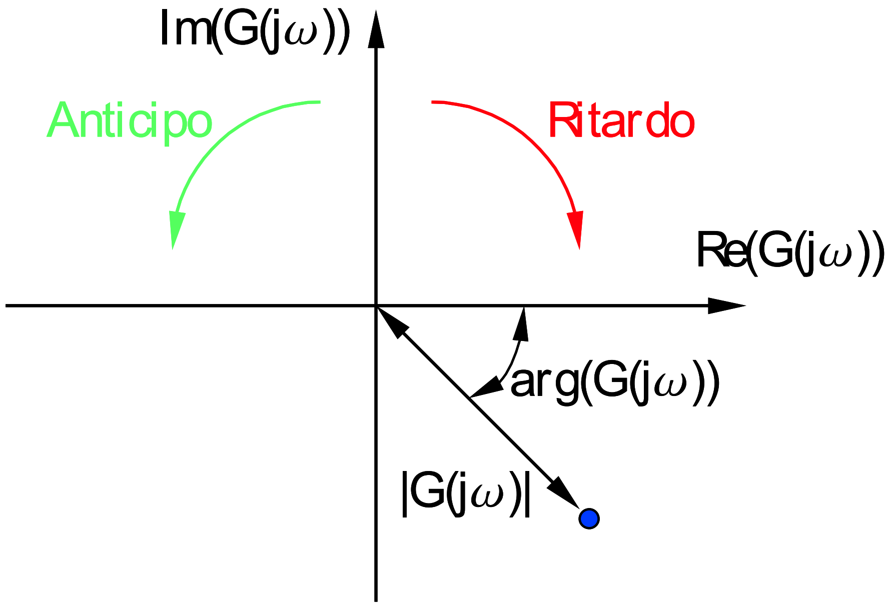
Diagrammi di Nyquist: graficazione qualitativa

- Diagramma di Nyquist: diagramma polare della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$:



- I diagrammi di Nyquist si possono ricavare dai diagrammi di Bode oppure si può adottare un procedimento per la graficazione qualitativa e diretta:

  1. Punto di partenza del diagramma.
  2. Anticipo o ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0.
  3. Determinazione dell'asintoto verticale per i sistemi di tipo 1.
  4. Punto di arrivo.
  5. Graficazione qualitativa.
  6. Punti di intersezione con l'asse reale.
  7. "Chiusura" del diagramma.

- NOTA: Le costanti di tempo di poli o zeri semplici o complessi e coniugati sono definite nel seguente modo:

$$(1+\tau s) \qquad \text{Costante di tempo} \qquad \tau$$

$$\left(1+\frac{2\delta s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right) \qquad \text{Costante di tempo} \quad \tau=\frac{2\delta}{\omega_n}$$

- Esempio:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} = \frac{3}{2}\frac{\left(1+\frac{s}{3}\right)}{s(1+5s)\left(1+\frac{3s}{20}+\frac{s^2}{100}\right)}$$

1. Punto di partenza ($\omega \to 0^+$). Detta K la costante moltiplicativa di $G(s)$ nella forma a costanti di tempo, per un sistema di tipo h il punto iniziale del diagramma è dato da (esempio $K = 3/2$, $h = 1$, $|G(s)| = \infty$, $\varphi_0 = -\pi/2$):

$$|G(s)|_{\omega\to 0^+} = \begin{cases} |K| & \text{per } h = 0 \\ \infty & \text{per } h \geq 1 \end{cases}$$

$$\arg G(s)_{\omega\to 0^+} = \begin{cases} \varphi_0 = -h\frac{\pi}{2} & K > 0 \\ \varphi_0 = -\pi - h\frac{\pi}{2} & K < 0 \end{cases}$$

2. Anticipo o ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0. È sufficiente calcolare il segno della seguente costante:

$$\Delta_a = \sum \tau_i' - \sum \tau_j \to \begin{cases} \Delta_a > 0 & \text{Anticipo (senso antiorario)} \\ \Delta_a < 0 & \text{Ritardo (senso orario)} \end{cases}$$

dove τ_i' e τ_j rappresentano, rispettivamente, le costanti di tempo degli zeri e dei poli della funzione $G(s)$. Nell'esempio $\Delta_a = \frac{1}{3} - 5 - \frac{3}{20} < 0$.

3. Determinazione dell'asintoto verticale per i sistemi di tipo 1. L'ascissa σ_a dell'asintoto veriticale è:

$$\sigma_a = K\left(\sum \tau_i' - \sum \tau_j\right) = K\Delta_a = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - 5 - \frac{3}{20}\right) = -7.23$$

L'ascissa σ_a deve essere coerente con i risultati dei punti 1 e 2.

4. Punto di arrivo ($\omega \to \infty$). Detta K_p la costante moltiplicativa di $G(s)$ nella forma a poli e zeri, per un sistema di grado relativo r il punto di arrivo del diagramma è dato da (esempio $K_p = 10$, $r = 3$, $|G(s)| = 0$, $\varphi_\infty = -3\pi/2$):

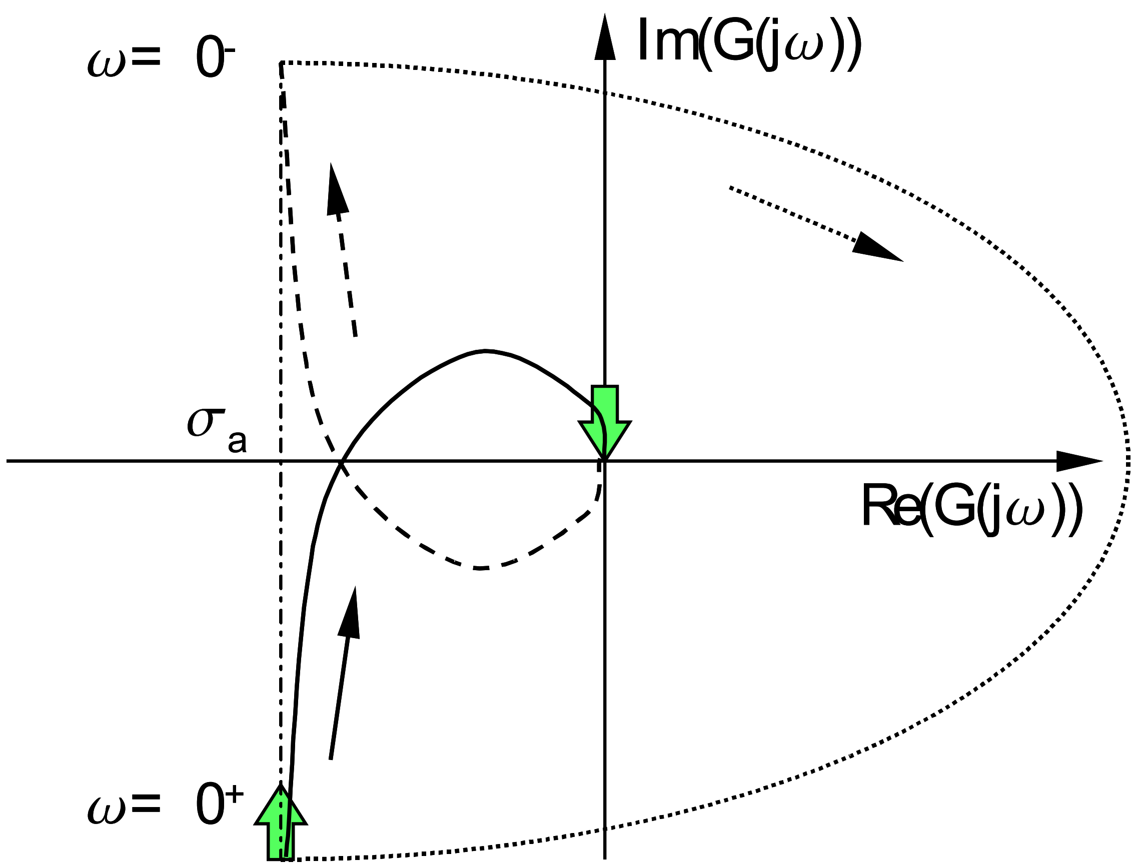
$$
\begin{aligned}
|G(s)|\big|_{\omega\to\infty} &= \begin{cases} |K_p| & \text{per } r = 0 \\ 0 & \text{per } r \geq 1 \end{cases} \\
\arg G(s)_{\omega\to\infty} &= \begin{cases} \varphi_\infty = -r\dfrac{\pi}{2} & K_p > 0 \\ \varphi_\infty = -\pi - r\dfrac{\pi}{2} & K_p < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

5. Graficazione qualitativa. Si collega il punto iniziale del diagramma di Nyquist ($\omega \to 0^+$) con il punto finale ($\omega \to \infty$) facendo attenzione a muoversi nel piano complesso in modo congruente ai poli e agli zeri stabili/instabili di $G(s)$ che si incontrano progressivamente al crescere di ω.

6. Punti di intersezione con l'asse reale. Si calcolano i valori di ω per i quali $\mathrm{Im}(G(j\omega)) = 0$. Questo procedimento può essere molto lungo quindi è preferibile usare il CRITERIO DI ROUTH.

7. “Chiusura” del diagramma. Si definisce diagramma polare completo la curva “chiusa” che il punto $G(j\omega)$ descrive sul piano complesso al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$. Il diagramma di Nyquist descritto ai punti precedenti fa riferimento al caso $\omega > 0$. La parte del diagramma di Nyquist relativa ad $\omega < 0$ si ottiene dalla precedente semplicemente ribaltando il diagramma rispetto all'asse reale. Nel caso in cui la funzione $G(s)$ abbia dei poli nell'origine, il diagramma così ottenuto è ancora “aperto”. Per chiuderlo correttamente occorre seguire la seguente regola: il diagramma di Nyquist va chiuso all'infinito partendo da $G(j0^-)$, arrivando a $G(j0^+)$ e inserendo tante semi-circonferenze percorse in senso orario quanti sono (h) i poli nell'origine della funzione $G(s)$.

- Nell'esempio in esame si ha:



Funzioni approssimanti

- Sia nei diagrammi di Bode, sia in quelli di Nyquist il comportamento di una generica $G(s)$ per $s \to 0^+$ e per $s \to \infty$ si può studiare considerando rispettivamente le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$.

- $G_0(s)$ è la funzione approssimante di $G(s)$ per $s \to 0^+$. Si ottiene trascurando tutti i termini in s ad esclusione dei poli nell'origine, QUALUNQUE sia la forma di $G(s)$:

$$G_0(s) = \frac{10(\cancel{s}+3)}{s(\cancel{s}+0.2)(\cancel{s}^2+15\,\cancel{s}+100)} = \frac{30}{20s} = \frac{3}{2s}$$

$$G_0(s) = \frac{3}{2}\frac{\left(1+\frac{\cancel{s}}{3}\right)}{s(1+\cancel{5s})\left(1+\frac{\cancel{3s}}{20}+\frac{\cancel{s}^2}{100}\right)} = \frac{3}{2s}$$

- $G_\infty(s)$ è la funzione approssimante di $G(s)$ per $s \to \infty$. Si ottiene considerando solo le potenze di s dominanti all'interno di ogni fattore, QUALUNQUE sia la forma di $G(s)$:

$$G_\infty(s) = \frac{10(s+\cancel{3})}{s(s+\cancel{0.2})(s^2+\cancel{15s}+\cancel{100})} = \frac{10s}{s\;s\;s^2} = \frac{10}{s^3}$$

$$G_\infty(s) = \frac{3}{2}\frac{\left(\cancel{1}+\frac{s}{3}\right)}{s(\cancel{1}+5s)\left(\cancel{1}+\frac{\cancel{3s}}{20}+\frac{s^2}{100}\right)} = \frac{3}{2}\frac{\left(\frac{s}{3}\right)}{s(5s)\left(\frac{s^2}{100}\right)} = \frac{10}{s^3}$$

- Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ si possono usare al posto delle formule introdotte in precedenza per determinare velocemente i punti di partenza e di arrivo sia dei diagrammi di Nyquist sia di quelli di Bode perchè sono caratterizzate solo da costanti moltiplicative e da eventuali poli nell'origine. Esempio:

$$G_0(s) = \frac{3}{2s} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{\omega\to 0^+} = \infty \\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$G_\infty(s) = \frac{10}{s^3} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{\omega\to \infty} = 0 \\ \varphi_\infty = -3\frac{\pi}{2} \end{cases}$$