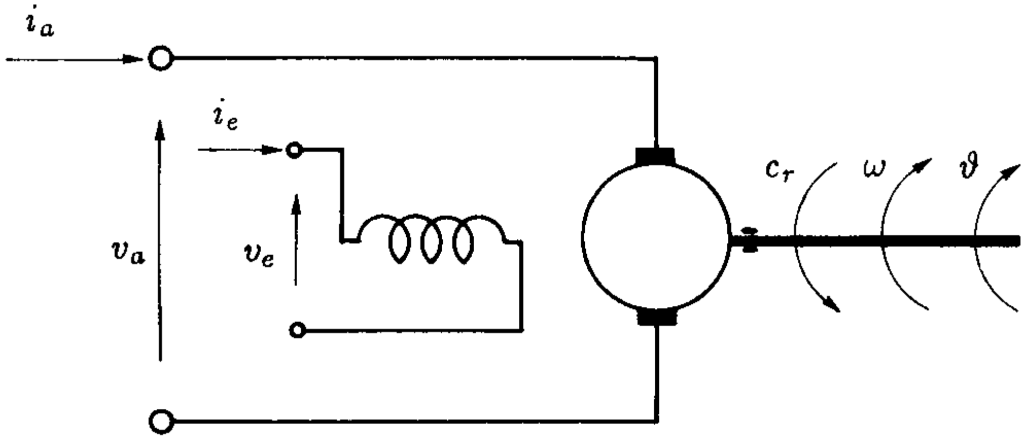
# Sistemi e modelli matematici

- L'*automazione* è un complesso di tecniche volte a sostituire l'intervento umano, o a migliorarne l'efficienza, nell'esercizio di dispositivi e impianti.
- Un importante capitolo della scienza dell'automazione o *automatica* è costituito dalla disciplina denominata *controlli automatici*.
- Tale disciplina studia i dispositivi (detti *regolatori*, *controllori* o *dispositivi di controllo*), mediante i quali si fanno variare automaticamente le grandezze liberamente manipolabili di un sistema (detto *sistema controllato*)
- Un *sistema* è un complesso, normalmente costituito di più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (indicate semplicemente con il nome di *variabili*).
- *Segnali*: sono le funzioni che rappresentano l'andamento delle variabili nel tempo.
- *Variabili di ingresso*: sono le *variabili indipendenti* o *cause*.
- *Variabili di uscita*: sono le *variabili dipendenti* o *effetti*.
- *Sistema orientato*: è un sistema in le cui variabili siano state suddivise in variabili di ingresso e variabili di uscita.
- *Variabili manipolabili*: variabili di ingresso il cui andamento nel tempo può essere arbitrariamente imposto.
- *Variabili non manipolabili* o *disturbi*: variabili sul cui andamento nel tempo non si può influire, in quanto casuale o assegnabile ad arbitrio solo da parte di altro operatore.

## Esempio: motore in corrente continua

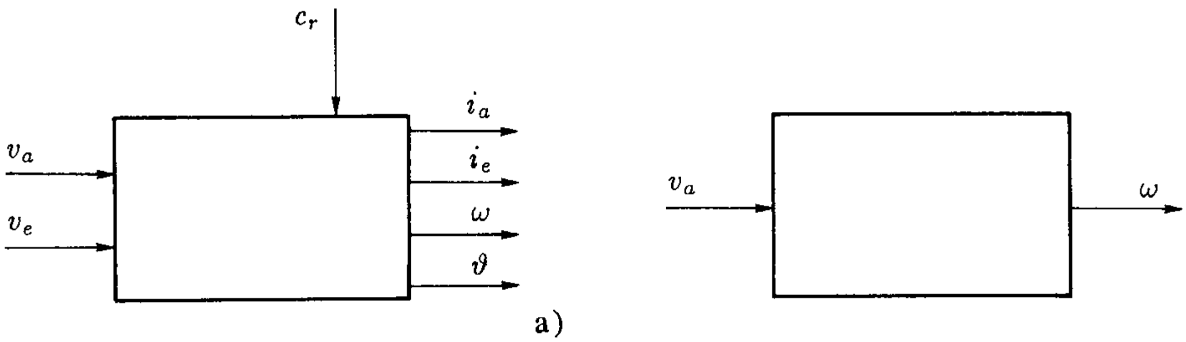
- Il modello semplificato di un motore in corrente continua con eccitazione indipendente è il seguente:



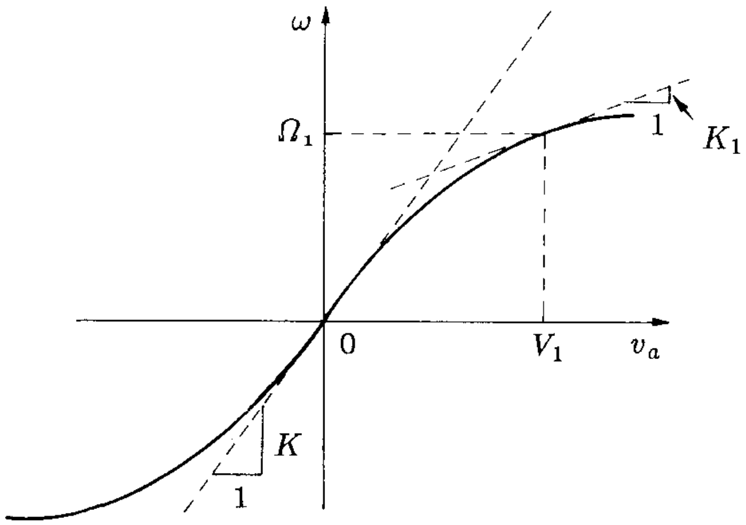

- Variabili di interesse: la tensione e la corrente di armatura $v_a$ e $i_a$, la tensione e la corrente di campo $v_e$ e $i_e$, la coppia resistente all'albero $c_r$, la velocità e la posizione angolare del rotore $\omega$ e $\vartheta$.

- Orientamento del sistema:
  - Cause: $v_a$, $v_e$ e $c_r$;
  - Effetti: $i_a$, $i_e$, $\omega$ e $\vartheta$;
  - Variabili manipolabili: $v_a$ e $v_e$;
  - Variabile non manipolabile: $c_r$;

- Rappresentazione mediante schemi a blocchi:



- *Modello matematico* di un sistema: è l'insieme di equazioni e di parametri che permettono di determinare gli andamenti nel tempo delle uscite, noti quelli degli ingressi.
- Il modello matematico è sempre un compromesso fra *precisione* e *semplicità*: è inutile infatti ricorrere a modelli sofisticati quando i valori dei parametri che in essi compaiono si conoscono solo approssimativamente.
- *Modello statico* o *puramente algebrico*: descrive il legame fra i valori degli ingressi, supposti costanti, e i valori delle uscite una volta che il sistema abbia raggiunto la *condizione di regime stazionario*, cioè la condizione di funzionamento in cui tutti i segnali siano costanti.
- Caratteristica statica del motore elettrico in corrente continua:




- *Caratteristica statica* ingresso-uscita:

$$\omega = f(v_a)$$

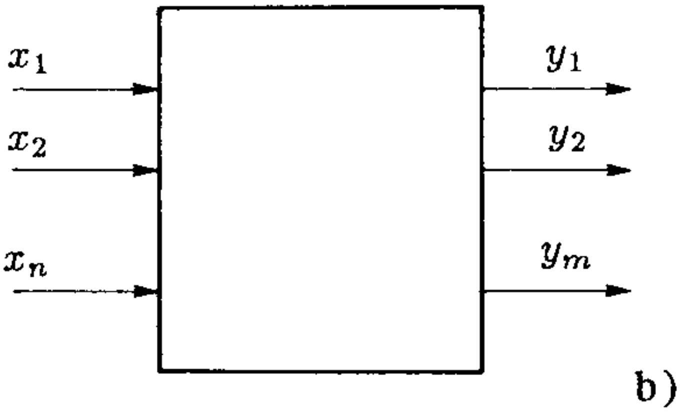
- *Approssimazione lineare* nell'intorno dell'origine: $\omega = K\, v_a$;
- *Linearizzazione* nell'intorno del *punto di lavoro*:

$$\omega - \Omega_1 = K_1(v_a - V_1)$$

- Modello statico di un sistema MIMO (Multi Input Multi Output): consiste in più funzioni (tante quante sono le uscite) di più variabili (tante quanti sono gli ingressi), cioè

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n)$$

- Rappresentazione grafica:




- Punto di lavoro: $(X_1, \ldots, X_n), (Y_1, \ldots, Y_m)$.
- Linearizzazione nell'intorno del punto di lavoro:

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= a_{11}\,\Delta x_1 + \ldots + a_{1n}\,\Delta x_n \ , \\ &\ldots\ldots \\ \Delta y_m &= a_{m1}\,\Delta x_1 + \ldots + a_{mn}\,\Delta x_n \end{aligned}$$

in cui è

$$\begin{aligned} a_{ij} &:= \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_k = X_k\ (k=1,\ldots,n)} \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n) \\ \Delta y_i &:= y_i - Y_i = y_i - f_i(X_1, \ldots, X_n) \quad (i = 1, \ldots, m) \\ \Delta x_j &:= x_j - X_j \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

- I modelli matematici statici non danno alcuna informazione sul *regime transitorio*, cioè sull'andamento nel tempo delle uscite durante il passaggio da uno stato di regime stazionario ad un altro.

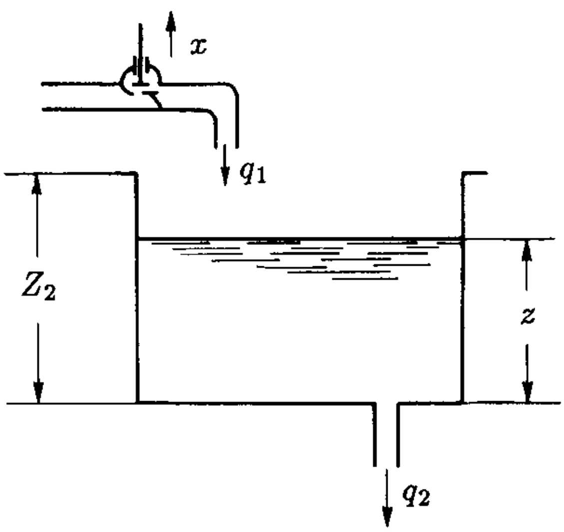
- *Modello dinamico*: è costituito da una o più equazioni differenziali esprimenti legami statici fra le variabili di ingresso, di uscita e le loro derivate rispetto al tempo.

- Il modello dinamico di un sistema permette di determinare l'andamento del segnale di uscita corrispondente a un dato segnale di ingresso, cioè permette di determinare la *risposta* del sistema a una data *eccitazione*.

- Un modello matematico (o un sistema) si dice *lineare* quando soddisfa la *proprietà di sovrapposizione degli effetti*.

- In caso contrario il sistema si dice *non lineare*.

- Molti sistemi ammettono modelli matematici lineari purché i valori delle variabili non escano da determinati campi. Esempio:




- Modello matematico in forma integrale:

$$z(t) = Z_0 + \frac{1}{A}\int_0^t \big(q_1(\tau) - q_2(\tau)\big)\, d\tau = Z_0 + \frac{1}{A}\int_0^t \big(K\, x(\tau) - q_2(\tau)\big)\, d\tau$$

- Modello matematico in forma differenziale:

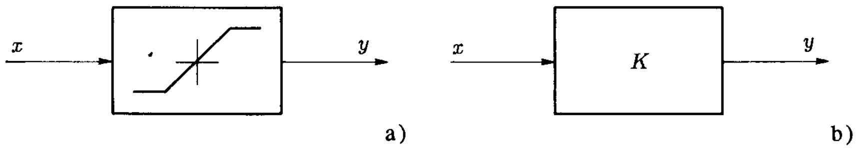
$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{A}\big(q_1(t) - q_2(t)\big)\ , \quad z(0) = Z_0$$

- Tale modello è valido entro i limiti:

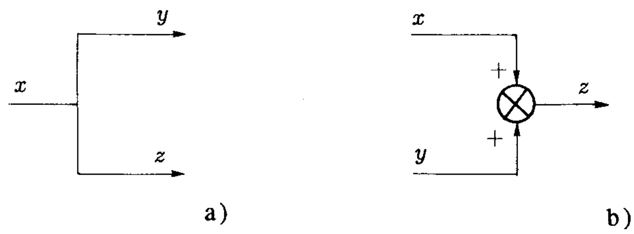
$$X_1 \leq x(t) \leq X_2\ , \quad Z_1 \leq z(t) \leq Z_2$$

# Riduzione degli schemi a blocchi

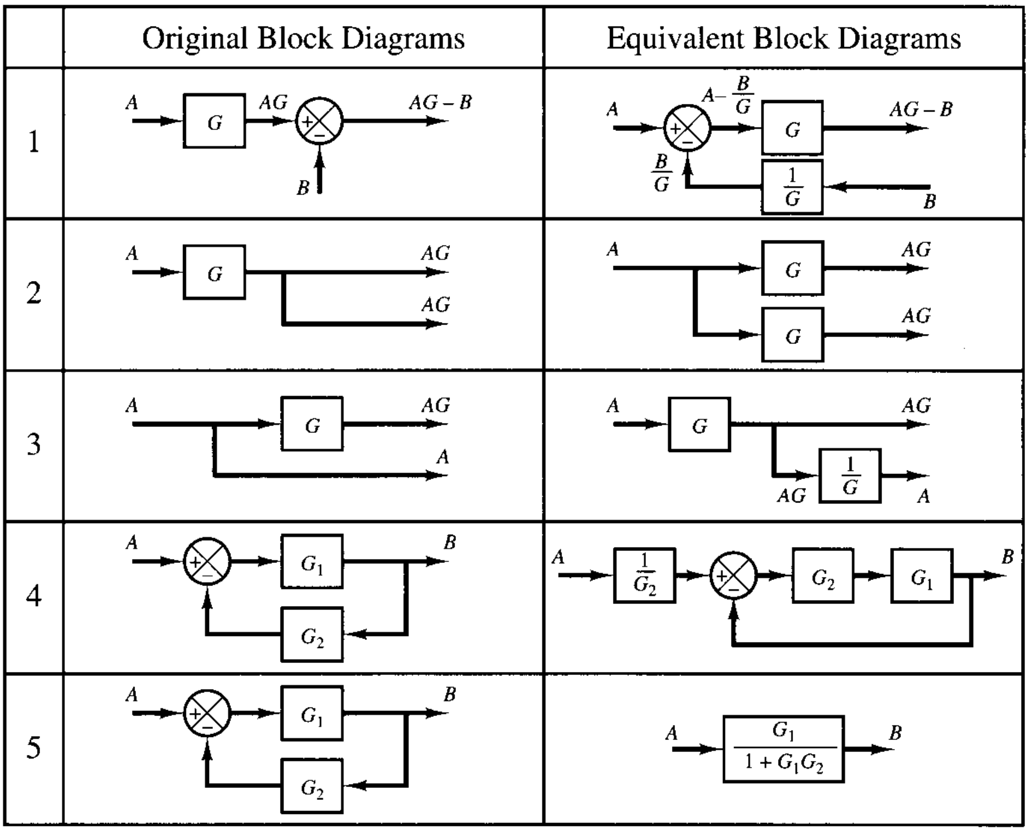
- Spesso i sistemi complessi vengono rappresentati con *schemi a blocchi*, i cui elementi hanno ciascuno un solo ingresso e una sola uscita.
- I blocchi elementari per la rappresentazione di sistemi puramente algebrici sono:



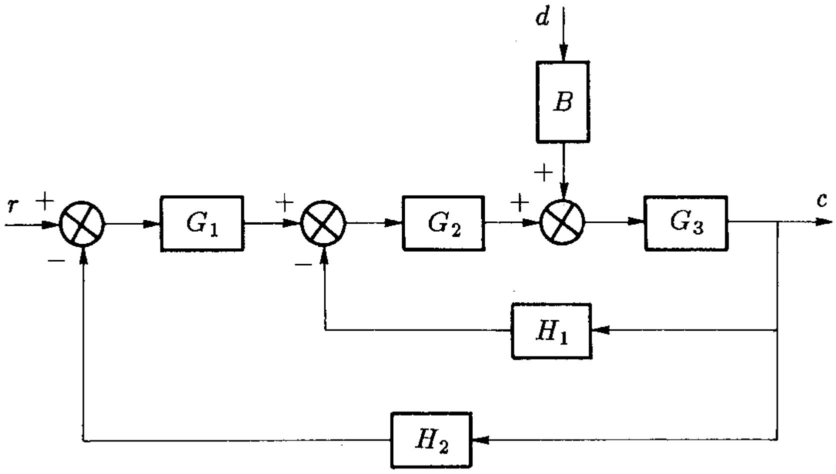

- Negli schemi a blocchi i diversi elementi sono collegati fra loro mediante i *punti di diramazione* e le *giunzioni sommanti*:



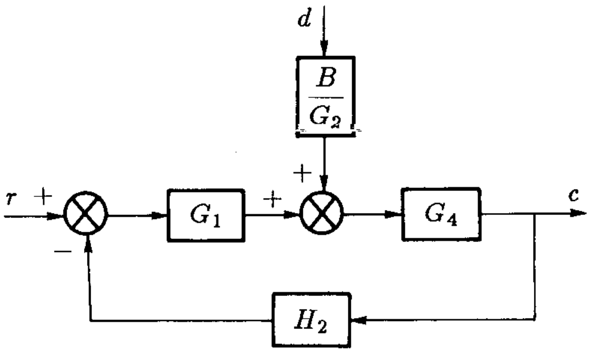

- Principali regole per la riduzione degli schemi a blocchi:



# Esempio di riduzione di schema a blocchi

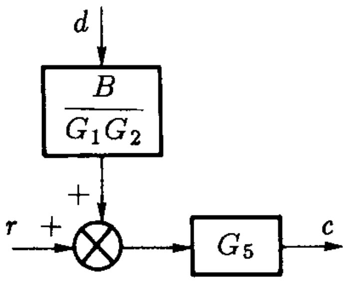



a)



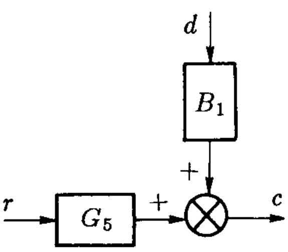

b)

$$G_4 = \frac{G_2 G_3}{1+G_2 G_3 H_1}$$




c)

$$G_5 = \frac{G_1 G_4}{1+G_1 G_4 H_2}$$




d)

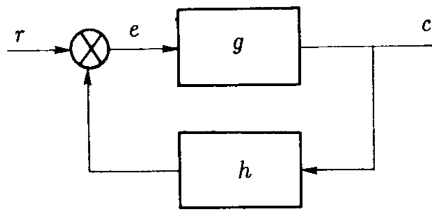
$$B_1 = \frac{B\, G_5}{G_1 G_2}$$

- Forma minima:

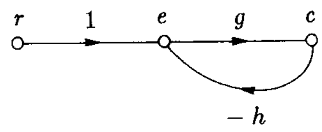
$$c = \frac{G_1 G_2 G_3\, r + B\, G_3\, d}{1 + G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_2}$$

## I grafi di flusso di segnale

- I *grafi di flusso di segnale* sono un mezzo, alternativo agli schemi a blocchi, per la rappresentazione grafica dei sistemi complessi. Esempio:



a)

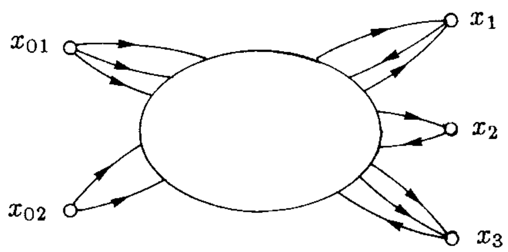


b)

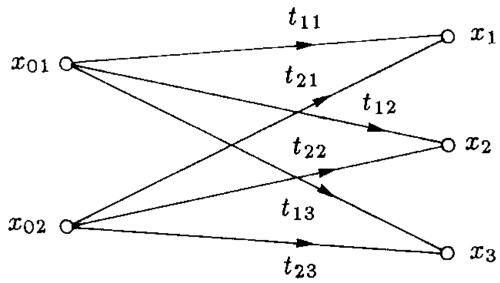
- Rispetto agli schemi a blocchi, essi forniscono una più semplice rappresentazione grafica del sistema.

- Un grafo di flusso di segnale è una rete composta di *nodi* e di *rami orientati*. I *nodi indipendenti* (o *nodi sorgente*) sono nodi a cui non giunge nessun ramo. I *nodi dipendenti* sono nodi ai quali giunge almeno un ramo. Ogni ramo è caratterizzato da un *coefficiente* o *trasmittanza*.

- Per i grafi di flusso di segnale esistono regole di riduzione che sono simili a quelle degli schemi a blocchi. Mediante riduzione, ogni grafo di flusso di segnale può essere portato in *forma minima*:



a)



b)

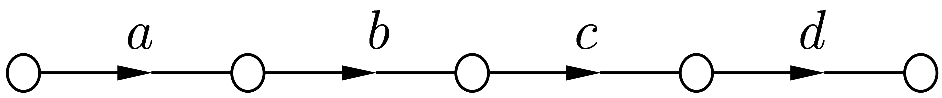
- Per calcolare la forma minima si utilizza la *Formula di Mason*

## Formula di Mason - Determinante di un grafo

La formula di Mason permette di calcolare la trasmittanza $T$ di ogni singolo ramo (da un nodo sorgente a un nodo dipendente) di un grafo in forma minima. Essa utilizza il concetto di **determinante** $\Delta$ di un grafo.

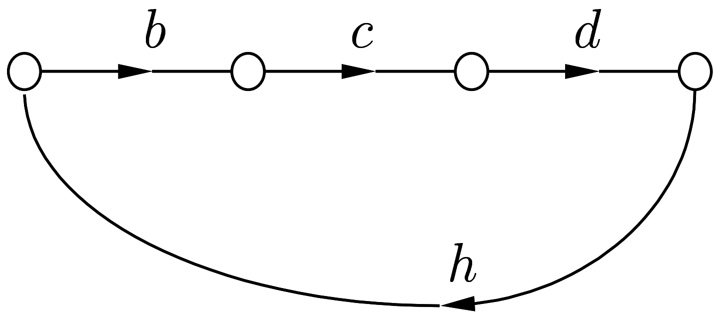
Alcune definizioni:

- **Percorso**: successione di rami e nodi adiacenti senza anelli, ogni nodo viene attraversato una sola volta. Il **coefficiente** $P$ del percorso è il prodotto delle trasmittanze dei rami che lo compongono. Esempio:




$$P = abcd$$

- **Anello**: percorso chiuso. Il **coefficiente** $A$ dell'anello è il prodotto delle trasmittanze dei rami che lo compongono. Esempio:

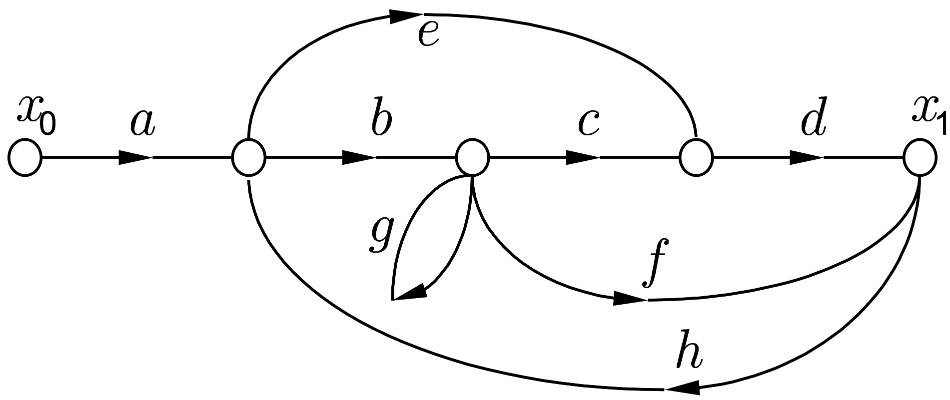



$$A = bcdh$$

- Due percorsi o due anelli **non si toccano** quando non hanno nessun nodo in comune.

## Formula di Mason - Determinante di un grafo

Per calcolare il determinante D di un grafo è necessario individuare alcuni insiemi di indici. Consideriamo come esempio il seguente grafo:




$\mathcal{P}$) Insieme degli indici di tutti i percorsi del grafo dal nodo sorgente $x_0$ a quello dipendente (uscita) $x_1$. Ad ogni indice si associa il coefficiente $P_i$ del corrispondente percorso. Esempio ($\mathcal{P} = \{1, 2, 3\}$):

$$\begin{array}{lll} i = 1 & \text{percorso: a b c d} & P_1 = abcd \\ i = 2 & \text{percorso: a e d} & P_2 = aed \\ i = 3 & \text{percorso: a b f} & P_3 = abf \end{array}$$

$\mathcal{I}_1$) Insieme degli indici di tutti gli anelli del grafo. Ad ogni indice si associa il coefficiente $A_i$ del corrispondente anello. Esempio ($\mathcal{I}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$):

$$\begin{array}{lll} i = 1 & \text{anello: e d h} & A_1 = edh \\ i = 2 & \text{anello: b c d h} & A_2 = bcdh \\ i = 3 & \text{anello: b f h} & A_3 = bfh \\ i = 4 & \text{anello: g} & A_4 = g \end{array}$$

$\mathcal{I}_2$) Insieme delle COPPIE di indici degli anelli del grafo che NON si toccano a due a due. Esempio:

$$\text{anelli 1 e 4} \rightarrow \ \mathcal{I}_2 = \{(1, 4)\}$$

$\mathcal{I}_n$) Insieme delle N-PLE di indici degli anelli del grafo che NON si toccano a N a N. Esempio:

$$\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_4 = \ldots = \mathcal{I}_n = \{ \ \}$$

## Formula di Mason - Determinante di un grafo

Dati gli insiemi di indici $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, ..., $\mathcal{I}_n$ e noti i coefficienti $A_i$ di tutti gli anelli, per determinante $\Delta$ dell'intero grafo si intende la quantità:

$$\Delta \stackrel{def}{=} 1 - \sum_{i \in \mathcal{I}_1} A_i + \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_2} A_i A_j - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{I}_3} A_i A_j A_k + \ldots$$

Esempio:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_1} A_i = edh + bcdh + bfh + g$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_2} A_i A_j = edhg$$

$$\Delta = 1 - edh - bcdh - bfh - g + edhg$$

Noto il determinante $\Delta$ di un grafo, la formula di Mason permette di calcolare la trasmittanza $T$ di un singolo ramo (da un nodo sorgente a un nodo dipendente) del grafo in forma minima come:

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$$

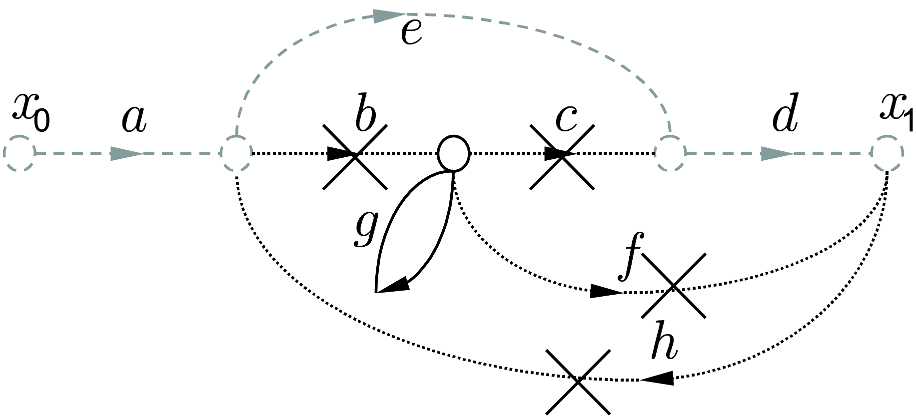
dove: $\mathcal{P}$ è l'insieme degli indici di tutti i percorsi fra i due nodi considerati, $P_i$ è il coefficiente del percorso $i$-esimo, $\Delta_i$ è il determinante del grafo parziale che si ottiene eliminando tutti i nodi e tutti i rami appartenenti al percorso $i$-esimo.

Osservazioni:

- Il determinante di un grafo dipende SOLO dalla struttura degli anelli, non dal particolare percorso tra due nodi. Esso è dunque una proprietà del grafo.
- Per quanto detto, tutti i rami del grafo in forma minima sono caratterizzati dallo stesso determinante $\Delta$.

## Formula di Mason - Determinante di un grafo

Esempio, calcolo del determinante $\Delta_2$ relativo al percorso 2 (a, e, d). I rami e i nodi appartenenti al percorso 2 devono essere eliminati dal grafo. Successivamente si cancellano tutti i rami che partono o arrivano in un nodo precedentemente eliminato (rami b, c, f, h). $\Delta_2 = 1 - g$ è il determinante del grafo rimanente (anello g).




$$
\begin{array}{lll}
i = 1 & P_1 = abcd & \Delta_1 = 1 \\
i = 2 & P_2 = aed & \Delta_2 = 1 - g \\
i = 3 & P_3 = abf & \Delta_3 = 1
\end{array}
$$

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i = abcd(1) + aed(1-g) + abf(1)$$

La trasmittanza $T$ del ramo $x_0$ - $x_1$ nel grafo in forma minima risulta quindi:

$$T = \frac{abcd + aed(1-g) + abf}{1 - edh - bcdh - bfh - g + edhg}$$

## La formula di Mason

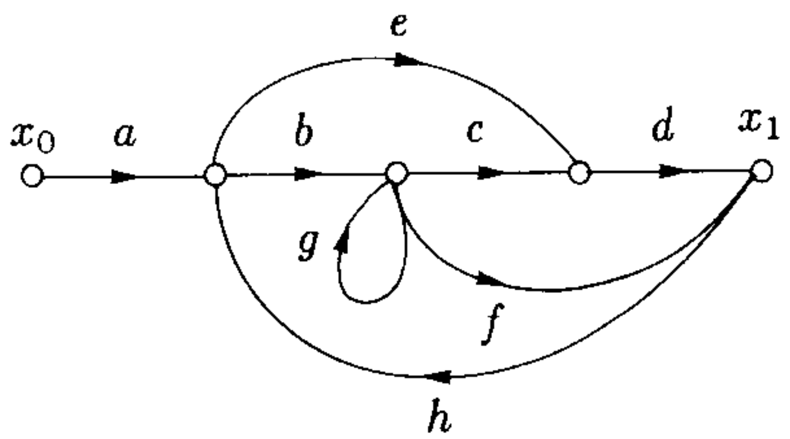
- Fornisce il *coefficiente di trasmittanza* $T$ di ogni singolo ramo del grafo in forma minima:

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \, \Delta_i$$

- $\mathcal{P}$ è l'insieme degli indici di tutti i percorsi esistenti tra i due nodi considerati; $P_i$ è il coefficiente dell'$i$-esimo percorso, cioè il prodotto dei coefficienti di tutti i rami che compongono il percorso; $\Delta$ è il determinante dell'intero grafo:

$$\Delta := 1 - \sum_{i \in \mathcal{J}_1} A_i + \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}_2} A_i \, A_j - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{J}_3} A_i \, A_j \, A_k + \; \ldots$$

- $\Delta_i$ è il determinante del grafo parziale che si ottiene eliminando tutti i nodi e i rami appartenenti al percorso $i$-esimo; $A_i$ è il coefficiente dell'$i$-esimo anello; $\mathcal{J}_1$ è l'insieme degli indici di tutti gli anelli del grafo; $\mathcal{J}_n$ è l'insieme delle $n$-ple di indici di tutti gli anelli del grafo che non si toccano $n$ ad $n$;




- Coefficienti di tutti i percorsi e di tutti gli anelli:

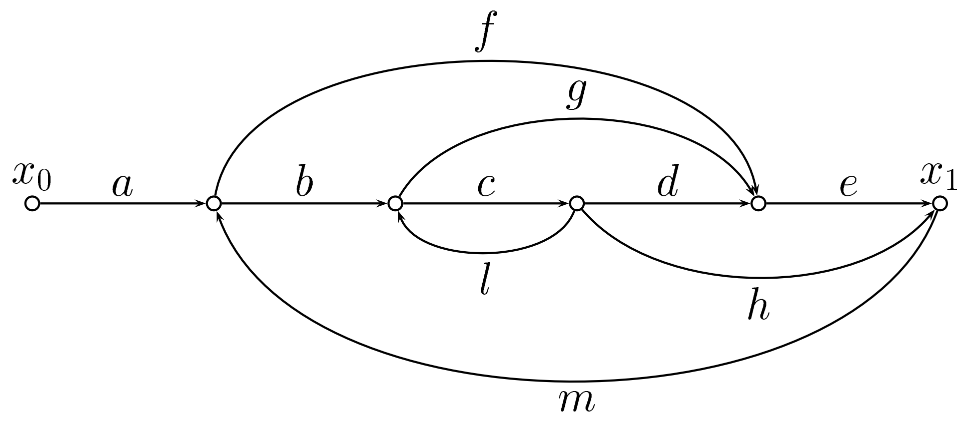
$$P_1 = a\, b\, c\, d \;, \quad P_2 = a\, e\, d \;, \quad P_3 = a\, b\, f$$

$$A_1 = e\, d\, h \;, \quad A_2 = b\, c\, d\, h \;, \quad A_3 = b\, f\, h \;, \quad A_4 = g$$

- Trasmittanza:

$$T = \frac{a\, b\, c\, d + a\, e\, d\,(1-g) + a\, b\, f}{1 - e\, d\, h - b\, c\, d\, h - b\, f\, h - g + e\, d\, h\, g}$$

- **Esempio 1**:

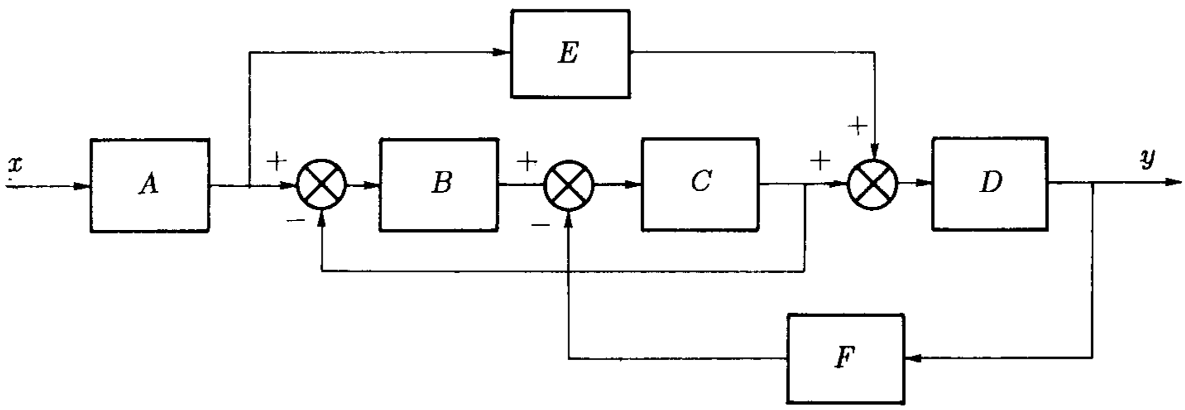



- Nel grafo sono presenti quattro percorsi di segnale $P_1 = a\,f\,e$, $P_2 = a\,b\,g\,e$, $P_3 = a\,b\,c\,h$, $P_4 = a\,b\,c\,d\,e$ e i cinque anelli $A_1 = f\,e\,m$, $A_2 = b\,g\,e\,m$, $A_3 = b\,c\,h\,m$, $A_4 = b\,c\,d\,e\,m$, $A_5 = c\,l$

- Trasmittanza:

$$T = \frac{a\,f\,e(1-c\,l) + a\,b\,g\,e + a\,b\,c\,h + a\,b\,c\,d\,e}{1 - f\,e\,m - b\,g\,e\,m - b\,c\,h\,m - b\,c\,d\,e\,m - c\,l + f\,e\,m\,c\,l}$$

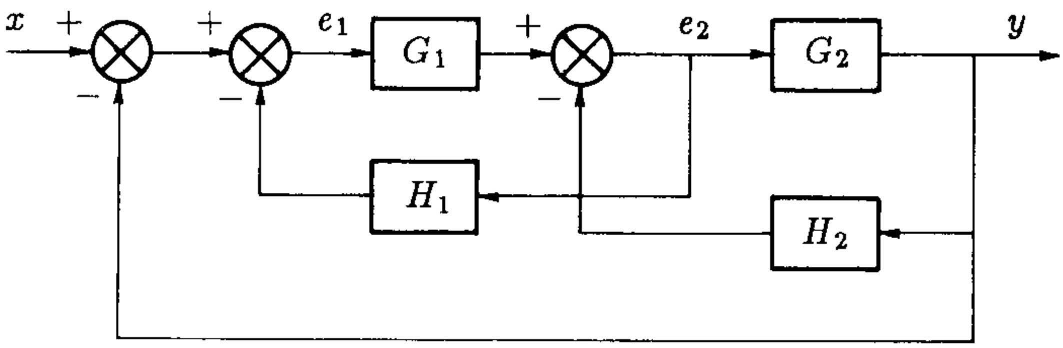
- **Esempio 2**:




- Trasmittanza:

$$\frac{y}{x} = A\,D\,\frac{B\,C + E\,(1{+}B\,C)}{1 + B\,C + C\,D\,F}$$

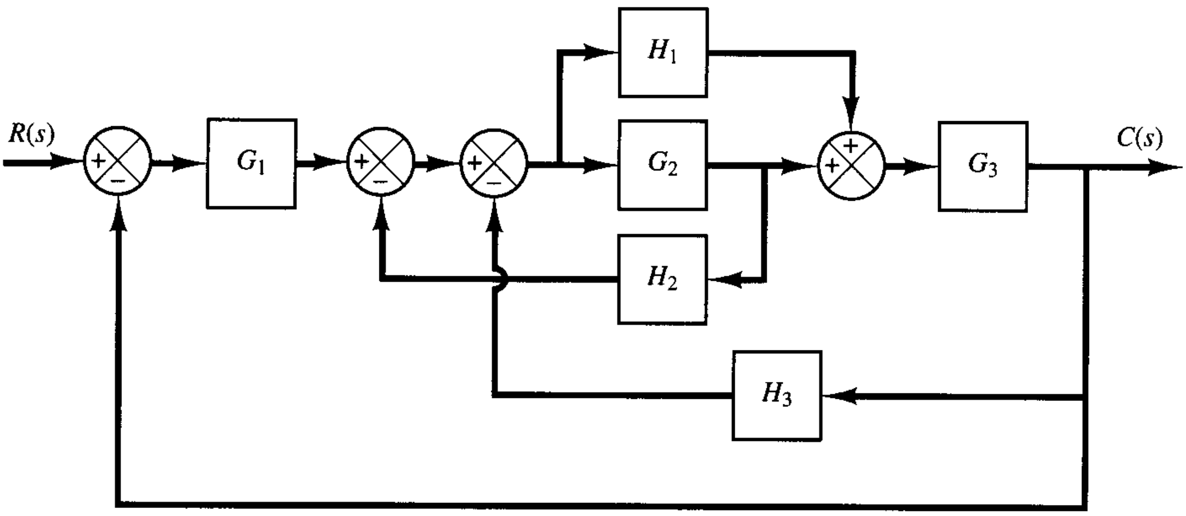
- **Esempio 3**:




- Trasmittanza:

$$\frac{y}{x} = \frac{G_1\, G_2}{1 + G_1\, H_1 + G_2\, H_2 + G_1\, G_2}$$

- **Esempio 4**:




- Trasmittanza:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1H_1G_3}{1 + G_1G_2G_3 + G_1H_1G_3 + G_2H_2 + G_2G_3H_3 + H_1G_3H_3}$$