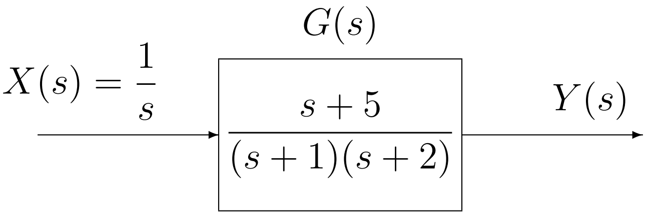
# Risposta temporale: esercizi

**Esercizio.** Calcolare la risposta al gradino $y(t)$ del seguente sistema:




Per ottenere la risposta al gradino $y(t)$ occorre antitrasformare la seguente funzione:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{s+5}{s(s+1)(s+2)}$$

Il valore iniziale $y(0)$ e il valore finale $y(\infty)$ della funzione $y(t)$:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,Y(s) = G(\infty) = 0, \qquad\qquad y(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = G(0) = \frac{5}{2}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+1)} + \frac{K_3}{(s+2)}$$

dove

$$K_1 = \left. s\,Y(s)\right|_{s=0} = \left.\frac{s+5}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{5}{2}$$

$$K_2 = \left.(s+1)\,Y(s)\right|_{s=-1} = \left.\frac{s+5}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -4$$

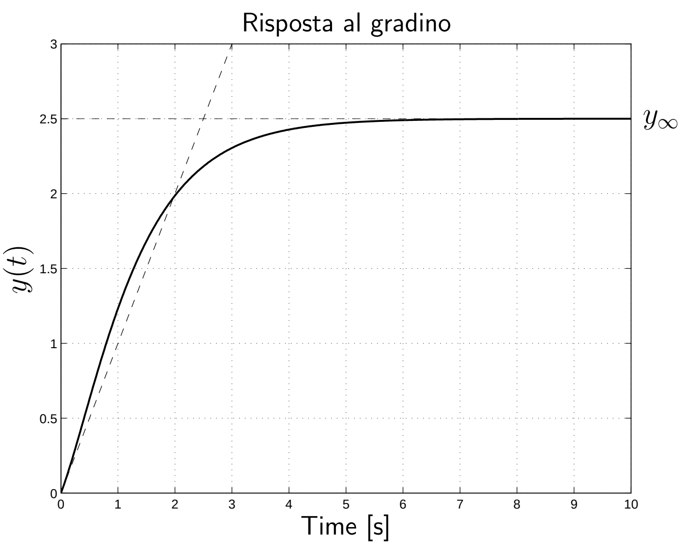
$$K_3 = \left.(s+2)\,Y(s)\right|_{s=-2} = \left.\frac{s+5}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{3}{2}$$

La risposta al gradino del sistema $G(s)$ è quindi la seguente:

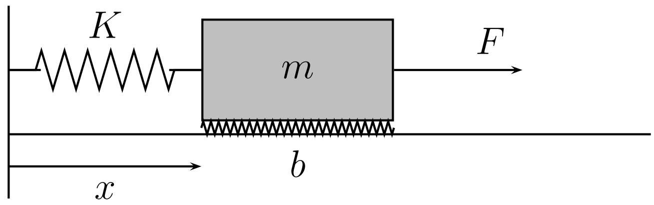
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{5}{2} - 4e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

Si noti che la pendenza del tratto iniziale per $t = 0^+$ è:

$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s\to\infty} sG(s) = 1$$



**Esercizio.** Sistema massa-molla-smorzatore. Calcolare la risposta $x(t)$ del sistema ad un gradino di forza $F(t) = 10$ in ingresso. Utilizzare i parametri $m = 1$, $b = 2$ e $K = 10$.




Equazione differenziale del sistema:

$$\frac{d}{dt}[m\dot{x}(t)] = F(t) - b\dot{x}(t) - Kx(t) \qquad \rightarrow \qquad m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t)$$

Funzione di trasferimento del sistema ($m = 1$, $b = 2$ e $K = 10$):

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + K} = \frac{1}{s^2 + 2\,s + 10} = \frac{1}{(s+1)^2 + 3^2}$$

Risposta al gradino di forza $F(t) = 10$:

$$F(s) = \frac{10}{s} \qquad \rightarrow \qquad X(s) = G(s)F(s) = \frac{10}{s[(s+1)^2 + 3^2]}$$

La scomposizione in fratti semplici può essere fatta anche nel seguente modo:

$$X(s) = \frac{10}{s[(s+1)^2 + 3^2]} = \frac{1}{s} - \frac{\alpha s + \beta}{(s+1)^2 + 3^2}$$

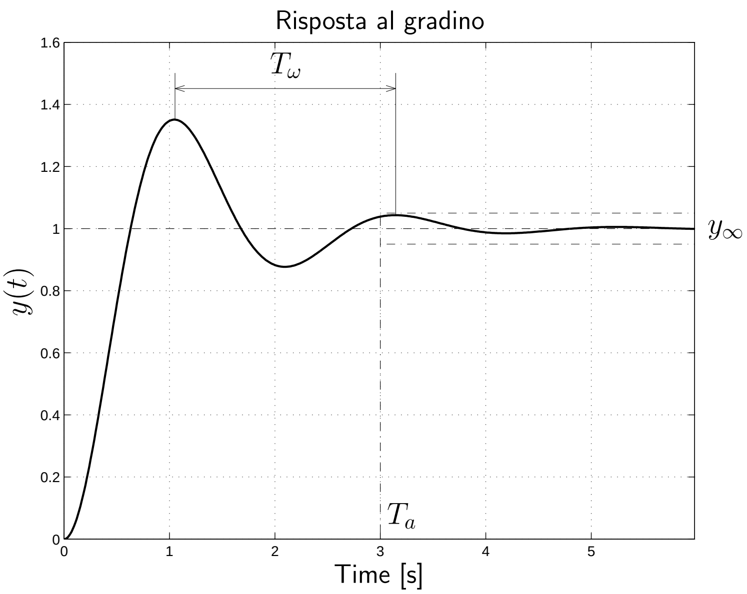
I parametri $\alpha$ e $\beta$ si determinano imponendo l'uguaglianza tra le due funzioni:

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2 + 3^2} = \frac{1}{s} - \left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{1}{3}\frac{3}{(s+1)^2 + 3^2}\right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$x(t) = 1 - e^{-t}\left[\cos(3\,t) + \frac{1}{3}\sin(3\,t)\right]$$

L'andamento temporale è di tipo oscillatorio smorzato:




I poli dominanti del sistema sono:

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega = -1 \pm j3$$

Il tempo di assestamento è:

$$T_a = \frac{3}{\sigma} = 3 \text{ s}$$

Il periodo dell'oscillazione è:

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 2.1 \text{ s}$$

**Esercizio.** Sia dato il seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{800\,(2\,s+30)}{(0.2\,s+3)(2\,s+10)\underbrace{(s^2+s+100)}_{\text{poli dominanti}}(s^2+20s+400)}$$

1) Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino del sistema $G(s)$.

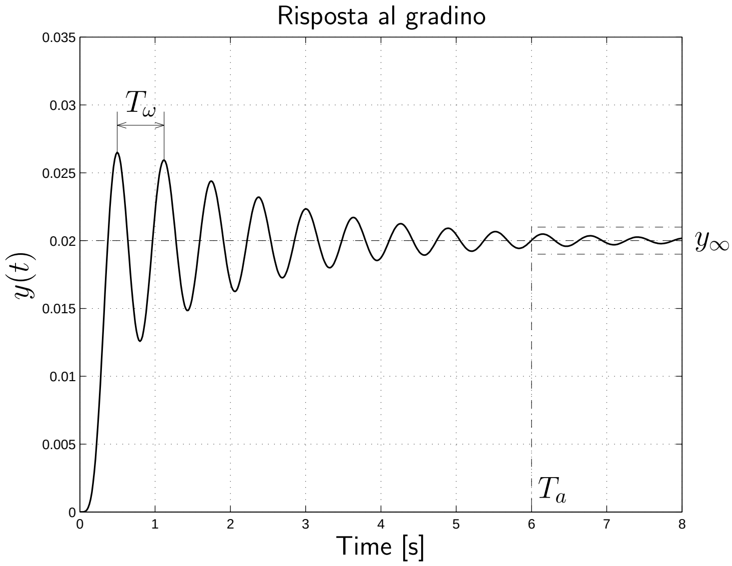
*Soluzione.* Il sistema è dominato dalla coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} \simeq -0.5 \pm j\,10$. L'andamento qualitativo è di tipo oscillatorio smorzato.

2) Calcolare il valore a regime $y_\infty$ dell'uscita $y(t)$ del sistema:

$$y_\infty = G(0) = 0.02.$$

3) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento $T_a$ del sistema e il periodo $T_\omega$ dell'eventuale oscillazione smorzata:

$$T_a \;\simeq\; \frac{3}{0.5}\ \text{s} = 6\ \text{s},$$
$$T_\omega \;\simeq\; \frac{2\pi}{10}\ \text{s} = 0.63\ \text{s}.$$




**Esercizio.** Sia dato il seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(3+0.2\,s)(s^2+60\,s+1800)}{\underbrace{(2+0.8\,s)}_{\text{polo dominante}}(8+0.2\,s)(s^2+16\,s+80)}$$

1) Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino del sistema $G(s)$.

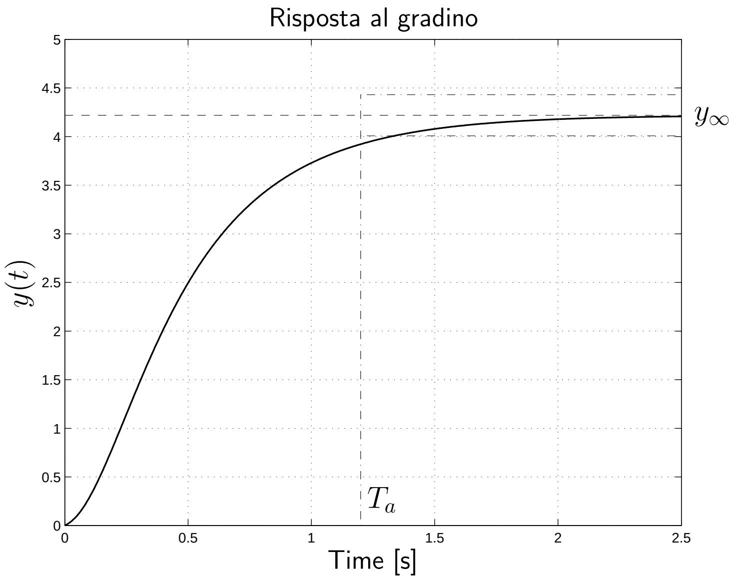
*Soluzione.* Il sistema è dominato dal polo reale $p = -2.5$. L'andamento qualitativo è di tipo aperiodico.

2) Calcolare il valore a regime $y_\infty$ dell'uscita $y(t)$ del sistema:

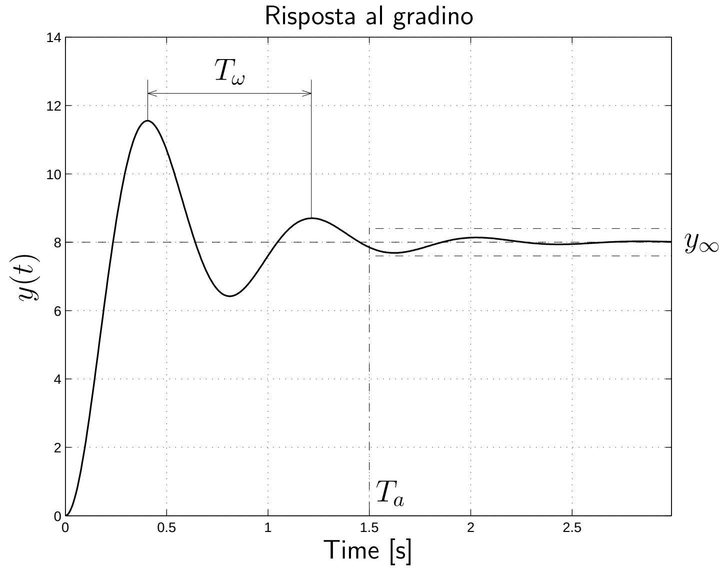
$$y_\infty = G(0) = 4.22.$$

3) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento $T_a$ del sistema e il periodo $T_\omega$ dell'eventuale oscillazione smorzata:

$$T_a \;\simeq\; \frac{3}{2.5}\ \text{s} = 1.2\ \text{s},$$
$$T_\omega \;\simeq\; \nexists.$$



**Esercizio.** In figura è mostrata la risposta $y(t)$ al gradino $x(t) = X_0 = 10$ di un sistema dinamico $G(s)$ caratterizzato solamente da 2 poli stabili. Determinare:




1) I poli dominanti del sistema:

$$\sigma = \frac{3}{T_a} \simeq \frac{3}{1.5}, \quad \omega = \frac{2\,\pi}{T_\omega} \simeq \frac{6.28}{0.81},$$

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\,\omega = -2 \pm j\,7.75.$$

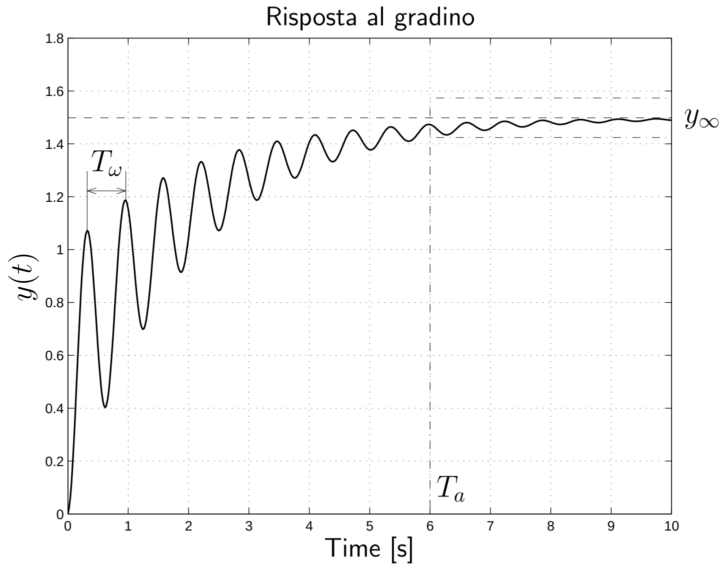
2) Il guadagno statico del sistema:

$$G_0 = \frac{y_\infty}{X_0} = \frac{8}{10} = 0.8.$$

3) La pulsazione naturale $\omega_n$:

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \simeq 8.$$

**Esercizio.** In figura è riportata la risposta $y(t)$ al gradino unitario di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima i cui tre poli $p_{1,2}$ e $p_3$ hanno la stessa parte reale. Nei limiti della precisione del grafico determinare:




1) Il guadagno statico del sistema:

$$G_0 = y_\infty \simeq 1.5.$$

2) La posizione del polo reale $p_3$:

$$p_3 = -\sigma = -\frac{3}{T_a} \simeq -0.5$$

3) La parte immaginaria $\omega$ dei poli complessi coniugati $p_{1,2}$:

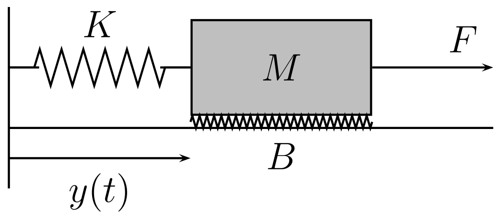
$$\omega = \frac{2\,\pi}{T_\omega} \simeq \frac{6.28}{0.63} \simeq 10.$$

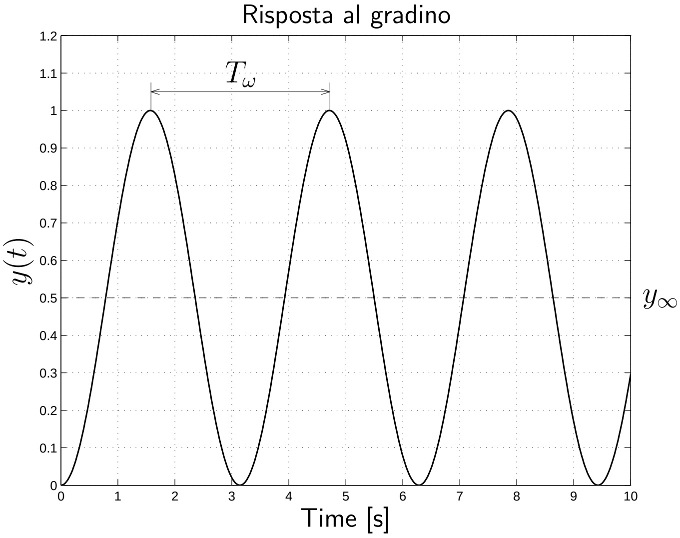
La posizione dei 3 poli risulta quindi essere la seguente: $p_{1,2} = -0.5 \pm 10\,j$ e $p_3 = -0.5$.

**Esercizio.** Stimare il tempo di assestamento $T_a$ del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{(s+37)(s+225)}{(s+350)(10\,s+15)\underbrace{(40\,s+2)}_{\text{polo dominante}}(s^2+2\,s+20)} \qquad \rightarrow \qquad T_a = 60 \text{ s.}$$

**Esercizio.** Sia dato il sistema massa-molla-smorzatore mostrato in figura. Esso è caratterizzato dall'equazione differenziale $M\,\ddot{y}(t) + B\,\dot{y}(t) + K\,y(t) = F(t)$. Viene inoltre fornita la risposta $y(t)$ del sistema ad un gradino di forza $F = 10\,N$.




Nei limiti della precisione del grafico si chiede di determinare:

1) La funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema in forma simbolica:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{M\,s^2 + B\,s + K}.$$

2) La pulsazione $\omega$ della risposta al gradino del sistema:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_\omega} = \frac{2\pi}{3.14} \simeq 2.$$

3) I valori numerici della massa $M$, del coefficiente di attrito $B$ e della rigidità $K$:

$$M = 5, \qquad B = 0, \qquad K = 20.$$

La risposta al gradino $y(t)$ mostra chiaramente che il sistema è semplicemente stabile e privo di dissipazioni: $B = 0$, $\delta = 0$. Sostituendo $B = 0$ nell'equazione caratteristica si ha:

$$B = 0 \quad \rightarrow \quad M\,s^2 + K = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{K}{M}} = \pm j\,\omega_n = \pm j\,\omega.$$

Essendo $\delta = 0$, la pulsazione naturale $\omega_n$ coincide con la pulsazione $\omega$:

$$\omega_n = \omega = 2.$$

Il valore a regime $y_\infty$ del segnale in uscita $y(t)$ coincide con il valore medio $y_\infty = 0.5$ ed è uguale al prodotto tra l'ampiezza $F = 10$ dell'ingresso e il guadagno statico $G(0)$ del sistema:

$$x_\infty = F \cdot G(0) \qquad \rightarrow \qquad 0.5 = 10 \cdot \frac{1}{K} \qquad \rightarrow \qquad K = 20.$$

Il valore di $M$ si determina facilmente sostituendo $K$ nell'espressione di $\omega$:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = 2 \qquad \rightarrow \qquad M \simeq \frac{K}{4} = 5.$$