

Risposta al gradino di un sistema del primo ordine

- Si consideri il seguente sistema lineare del primo ordine:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

- L'unico parametro che caratterizza il sistema è la *costante di tempo* τ .
- Se $\tau > 0$ il polo p del sistema è a parte reale negativa (il sistema è stabile):

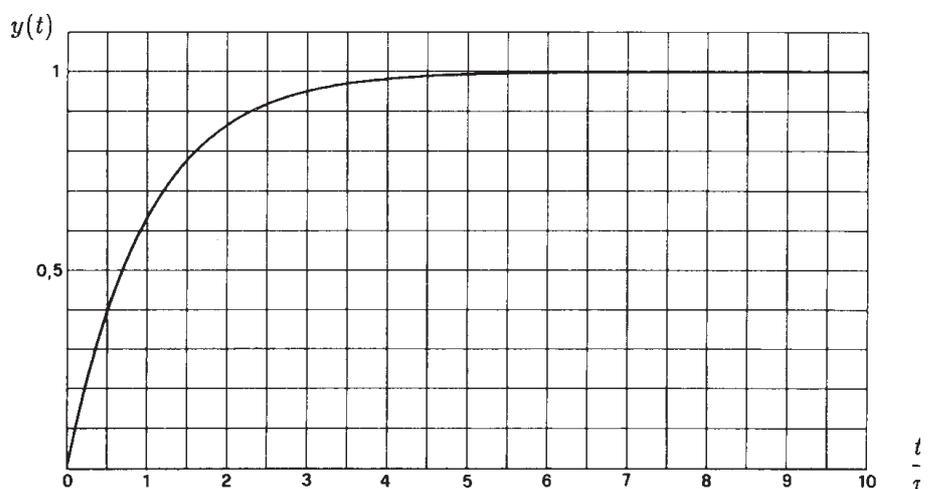
$$p = -\frac{1}{\tau}$$

- La risposta del sistema al gradino unitario è la seguente:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(1 + \tau s)} \right] = \frac{1}{\tau} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s + \frac{1}{\tau})} \right] \\ &= \frac{1}{\tau} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right] = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

- Andamento temporale (la scala dei tempi è normalizzata rispetto a τ):

$$\begin{aligned} t = \tau &\rightarrow 63,2\% \\ t = 2\tau &\rightarrow 86,5\% \\ t = 3\tau &\rightarrow 95,0\% \\ t = 5\tau &\rightarrow 99,3\% \\ t = 7\tau &\rightarrow 99,9\% \end{aligned}$$



- La risposta al gradino $y(t)$ di tutti i sistemi dinamici del primo ordine è di tipo *aperiodico*: si raggiunge il valore finale senza mai superarlo.
- Dopo tre costanti di tempo il sistema ha già raggiunto il 95% del valore finale. Il tempo di assestamento T_a del sistema è:

$$T_a = 3\tau = \frac{3}{|p|}$$

Esempio. Calcolare la risposta al gradino $y(t)$ della seguente equazione differenziale:

$$a \dot{y}(t) + b y(t) = c x(t)$$

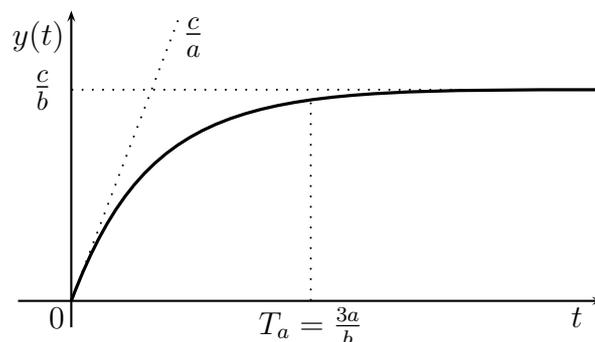
La funzione di trasferimento $G(s)$ associata all'equazione differenziale è:

$$G(s) = \frac{c}{a s + b} \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{c}{b} \frac{1}{\left(\frac{a}{b} s + 1\right)} \quad \text{dove} \quad \tau = \frac{a}{b}$$

La risposta al gradino $y(t)$ del sistema $G(s)$ è quindi la seguente:

$$y(t) = \frac{c}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{a}t}\right)$$

L'andamento temporale della funzione $y(t)$ è di tipo esponenziale aperiodico:



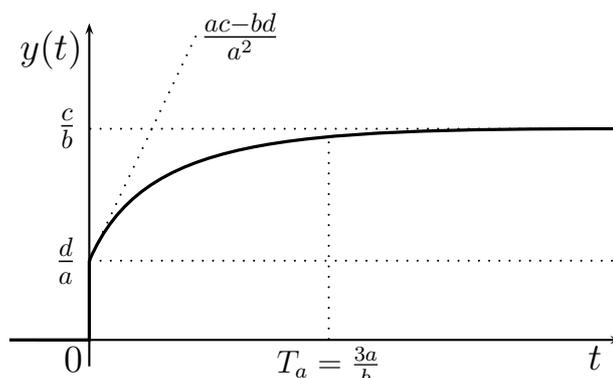
Esempio. Calcolare la risposta al gradino $y(t)$ della seguente funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{d s + c}{a s + b} \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{d}{a} + \left(\frac{c}{b} - \frac{d}{a}\right) \frac{1}{\left(\frac{a}{b} s + 1\right)}$$

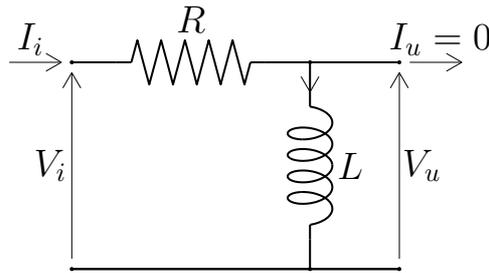
dove $\tau = \frac{a}{b}$. La risposta al gradino $y(t)$ del sistema $G(s)$ è quindi la seguente:

$$y(t) = \frac{d}{a} + \frac{ac - bd}{ab} \left(1 - e^{-\frac{b}{a}t}\right)$$

L'andamento temporale della funzione $y(t)$ è di tipo esponenziale aperiodico:



Esempio. Sistema elettrico RL:



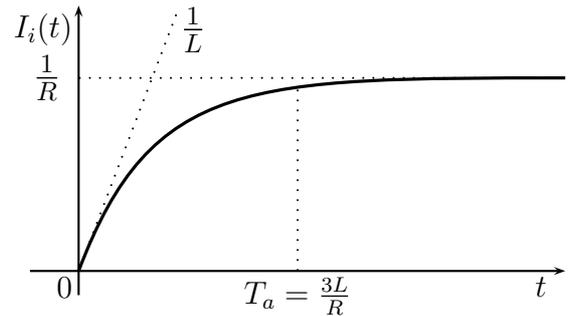
Equazione differenziale:

$$L \dot{I}_i(t) + R I_i(t) = V_i(t)$$

Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{I_i(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{Ls + R}$$

Risposta al gradino $V_i(t) = 1$:



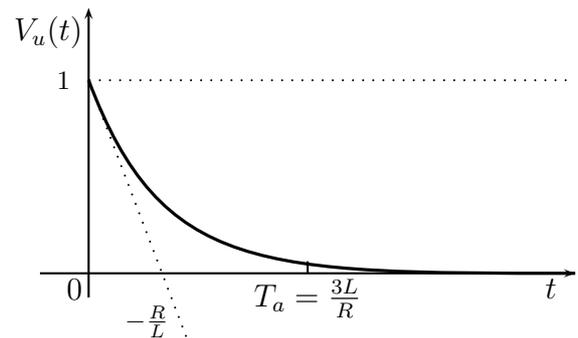
Equazione differenziale:

$$L \dot{V}_u(t) + R V_u(t) = L \dot{V}_i(t)$$

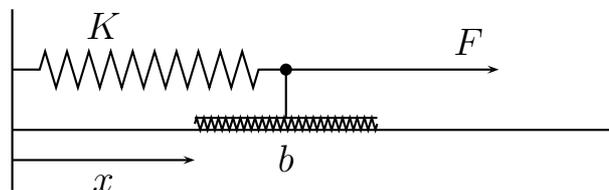
Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{Ls}{Ls + R} = 1 - \frac{R}{Ls + R}$$

Risposta al gradino $V_i(t) = 1$:



Esempio. Sistema molla-smorzatore:



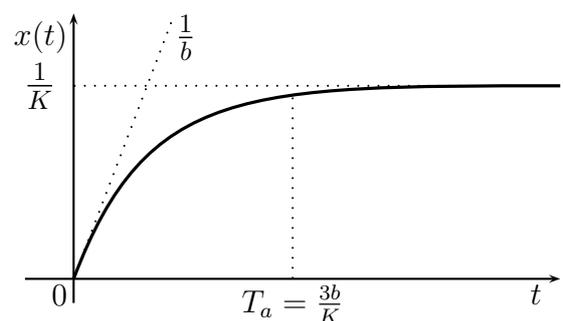
Equazione differenziale:

$$b \dot{x}(t) + K x(t) = F(t)$$

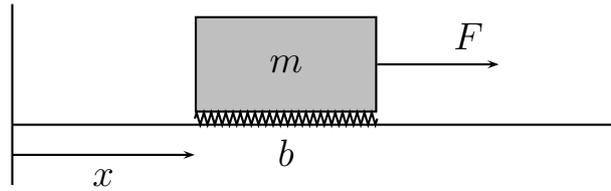
Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{bs + K}$$

Risposta al gradino $F(t) = 1$:



Esempio. Sistema massa-smorzatore.



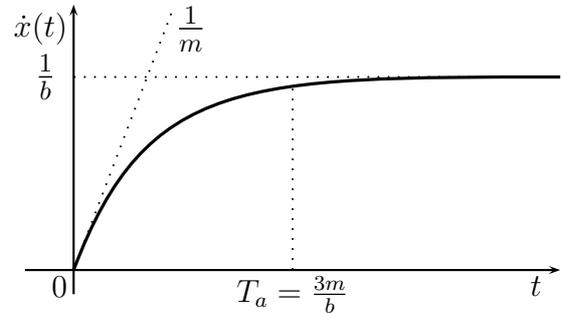
Equazione differenziale:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) = F(t)$$

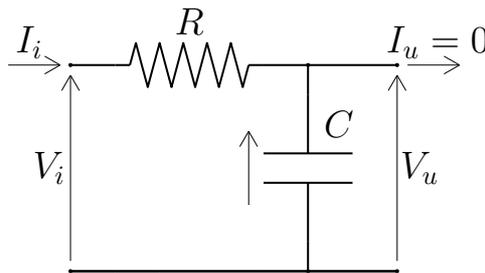
Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\dot{X}(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms + b}$$

Risposta al gradino $F(t) = 1$:



Esempio. Sistema elettrico RC:



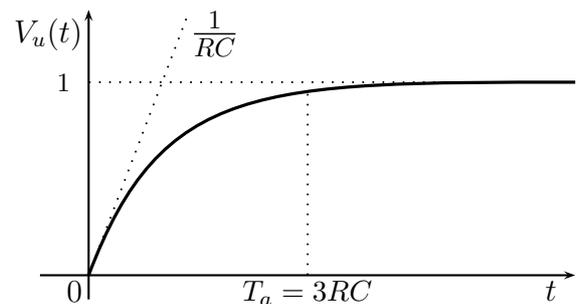
Equazione differenziale:

$$RC \dot{V}_u(t) + V_u(t) = V_i(t)$$

Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

Risposta al gradino $V_i(t) = 1$:



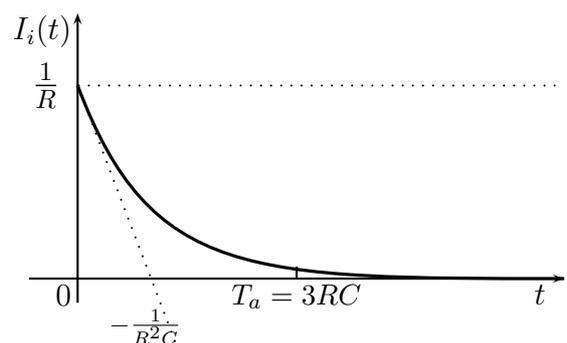
Equazione differenziale:

$$RC \dot{I}_i(t) + I_i(t) = C \dot{V}_i(t)$$

Funzione di trasferimento:

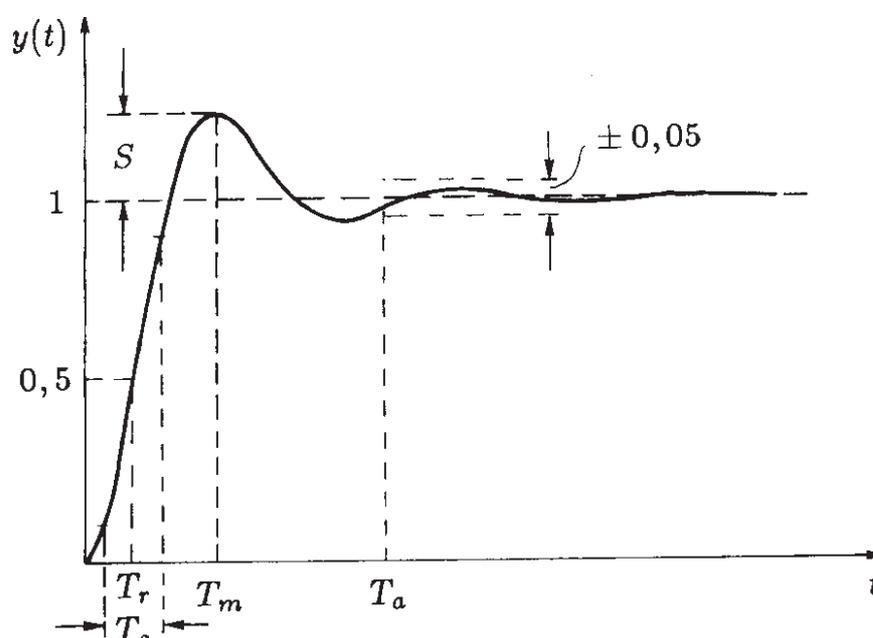
$$G(s) = \frac{I_i(s)}{V_i(s)} = \frac{Cs}{RCs + 1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R(RCs + 1)}$$

Risposta al gradino $V_i(t) = 1$:



Sistema elementare del secondo ordine

- Spesso i sistemi in retroazione, anche se di ordine elevato, presentano una risposta analoga a quella dei sistemi del secondo ordine.
- Ciò accade nel caso di sistemi a *poli dominanti* cioè sistemi caratterizzati dalla presenza di una coppia di poli complessi coniugati più vicini all'asse immaginario rispetto a tutti gli altri poli.
- Il contributo dei poli dominanti nell'espressione del transitorio è notevolmente più importante di quello degli altri poli.



- I parametri più importanti che descrivono il transitorio sono i seguenti:
 1. *Massima sovraelongazione* S : differenza fra il valore massimo dell'uscita e il valore finale. È espresso in % del valore finale.
 2. *Tempo di ritardo* T_r : tempo per raggiungere il 50 % del valore finale.
 3. *Tempo di salita* T_s : tempo occorrente perché l'uscita passi dal 10 al 90 % del valore finale.
 4. *Tempo di assestamento* T_a : tempo occorrente perché l'uscita rimanga entro il ± 5 % del valore finale.
 5. *Istante di massima sovraelongazione* T_m : istante al quale si presenta la massima sovraelongazione.

- Funzione di trasferimento di un tipico sistema del secondo ordine (a meno di un fattore costante):

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

dove $\delta = \cos \varphi$ è il *coefficiente di smorzamento* e ω_n è la *pulsazione naturale* del sistema.

- La risposta al gradino unitario è la seguente:

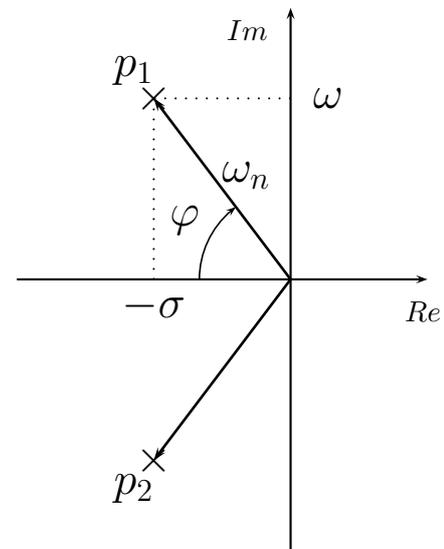
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right]$$

$$= 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

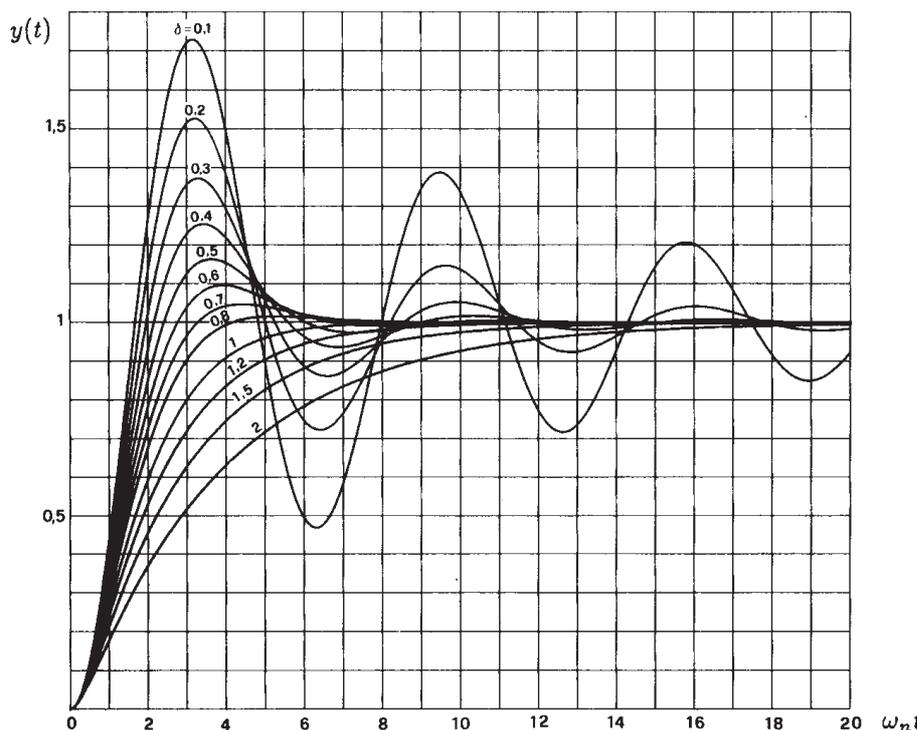
$$\omega := \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$$

$$\sigma := \delta\omega_n$$

$$\varphi := \arccos \delta = \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$



- L'andamento della funzione $y(t)$ al variare di δ è il seguente (la scala dei tempi è normalizzata rispetto ad ω_n):



- Per $\delta = 1$ non si ha alcuna sovraelongazione: $y(t)$ tende asintoticamente al valore finale senza mai superarlo.
- Determinazione dei punti di massimo e di minimo. Posto $A = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$, si deriva rispetto al tempo:

$$\frac{dy}{dt} = -A e^{-\delta\omega_n t} \omega \cos(\omega t + \varphi) + A \delta \omega_n e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Ponendo la derivata uguale a zero, si ottiene:

$$-\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cos(\omega t + \varphi) + \delta \omega_n \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

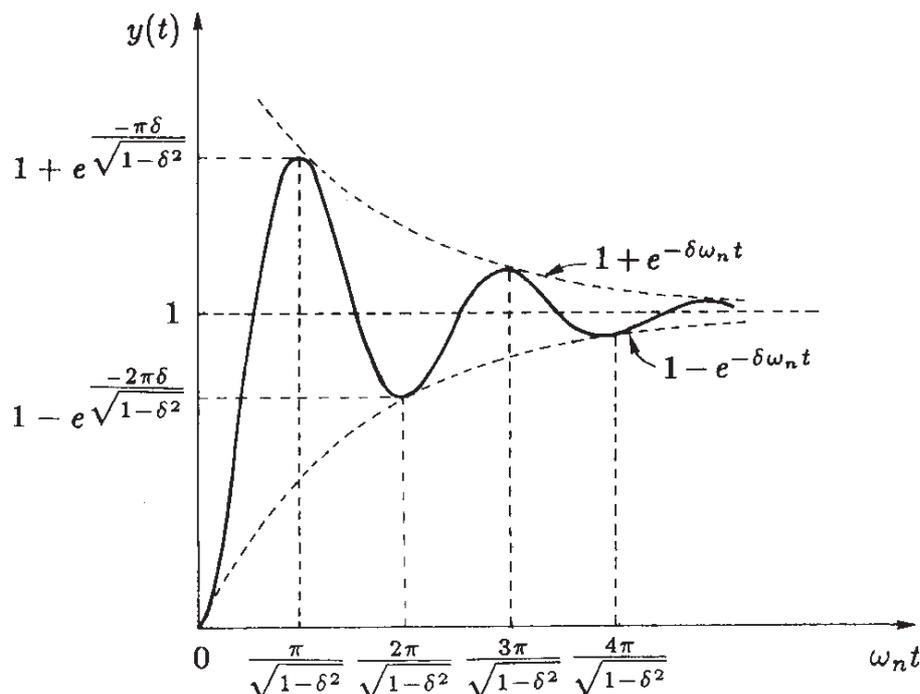
da cui si ricava

$$\tan(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \quad \leftrightarrow \quad \omega t = n\pi$$

(per $n = 0, 1, \dots$), cioè:

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} = \frac{n\pi}{\omega}$$

- L'andamento temporale dei massimi e dei minimi è il seguente:



- Valori dell'uscita in corrispondenza dei massimi e minimi:

$$y(t) \Big|_{\substack{\text{max} \\ \text{min}}} = 1 - \frac{e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \operatorname{sen}(n\pi + \varphi)$$

da cui si ottiene

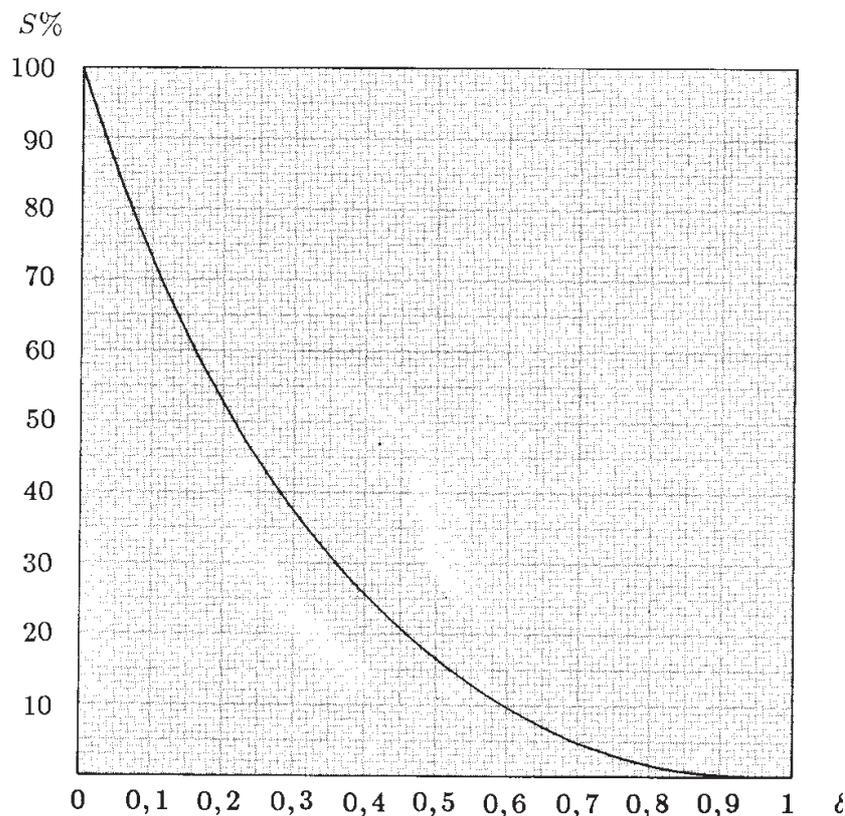
$$y(t) \Big|_{\substack{\text{max} \\ \text{min}}} = 1 - (-1)^n e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

- La massima sovralongazione è data dalla relazione

$$S = 100 \frac{(y_{\max} - y_{\infty})}{y_{\infty}}$$

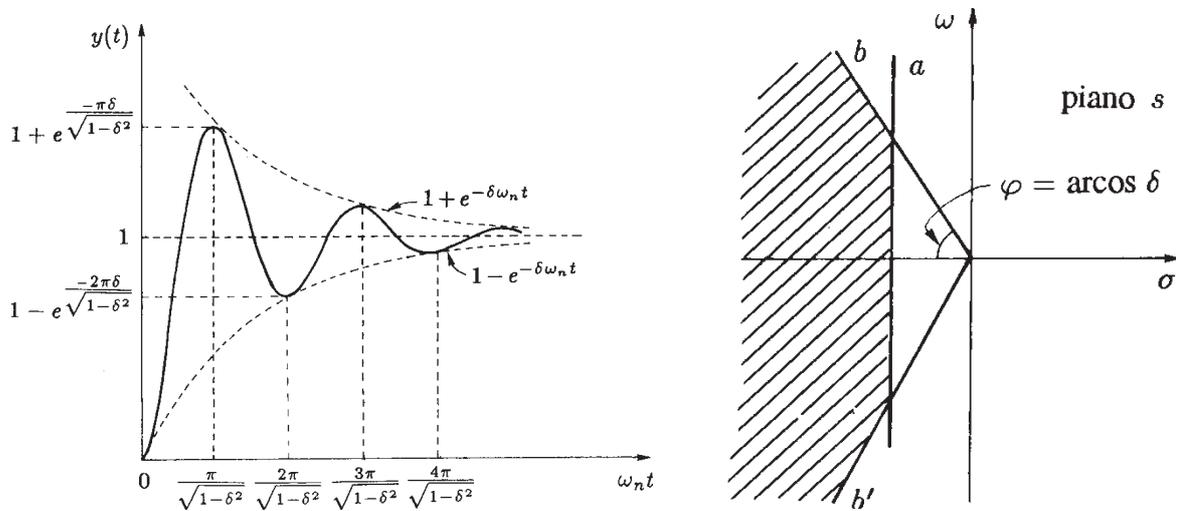
$$S = 100 e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

- La massima sovralongazione S è funzione unicamente del coefficiente di smorzamento δ ed è uguale al 100 % quando tale coefficiente è nullo:



- La pulsazione naturale ω_n non influenza la massima sovralongazione S .

- La massima sovraelongazione non supera un valore assegnato se i poli del sistema sono compresi nel settore delimitato da due rette b e b' univocamente determinate dal coefficiente di smorzamento δ .



- Un limite superiore per il tempo di assestamento T_a si ricava dalla relazione

$$e^{-\delta\omega_n T_a} = 0.05$$

da cui si deduce

$$\delta\omega_n T_a = 3, \quad \text{cioè}$$

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{|\sigma|}$$

- Il tempo di assestamento non è superiore al valore assegnato T_a se

$$\delta\omega_n \geq \frac{3}{T_a}$$

dove $\delta\omega_n$ è il modulo della parte reale σ dei poli del sistema.

- Il vincolo sul tempo di assestamento è rispettato se i poli del sistema sono posizionati a sinistra di una retta verticale a .
- Entrambe le specifiche, sul tempo di assestamento e sulla massima sovraelongazione, sono rispettate se i poli del sistema sono posizionati all'interno della zona tratteggiata.

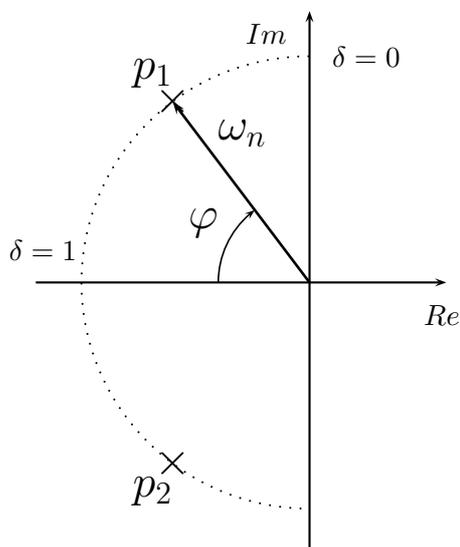
Pulsazione naturale ω_n costante

- Mantenere costante ω_n e far variare δ vuol dire spostare i poli del sistema lungo una circonferenza di raggio ω_n :

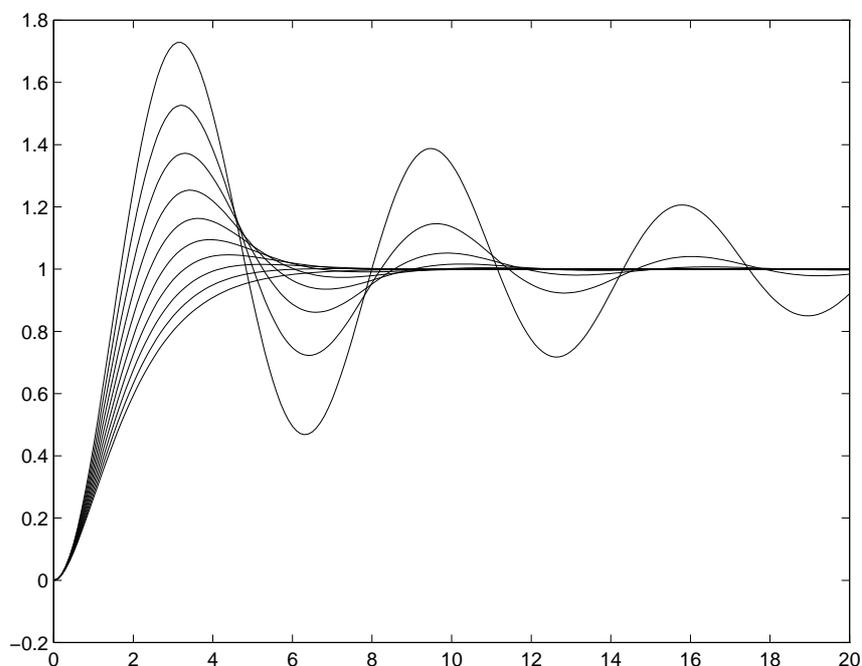
$$0 < \delta < 1$$

$$\frac{\pi}{2} > \varphi > 0$$

ω_n costante



- La risposta del sistema $G(s)$ al gradino unitario al variare del parametro $\delta \in [0.1, 0.2, \dots, 1]$ è mostrata nel seguente grafico:



- Il coefficiente δ influenza direttamente la massima sovraelongazione $S\%$:

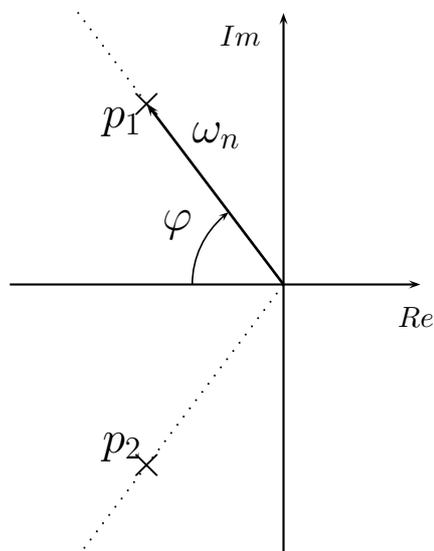
$$S\% = 100 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

Coefficiente di smorzamento δ costante

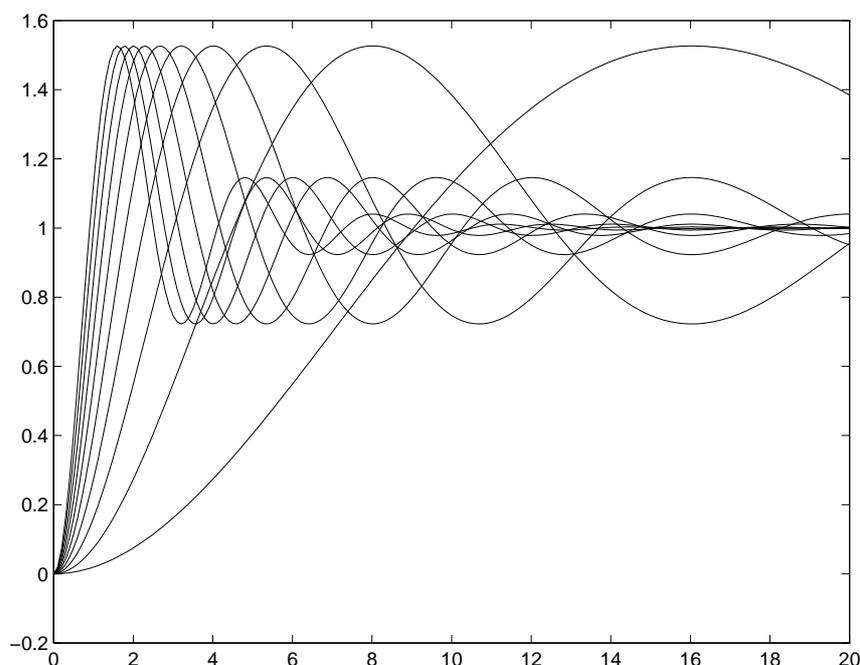
- Mantenere costante δ e far variare ω_n vuol dire spostare i poli del sistema lungo una retta uscente dall'origine che forma un angolo $\varphi = \arccos \delta$ con il semiasse reale negativo:

δ costante

$\omega_n > 0$



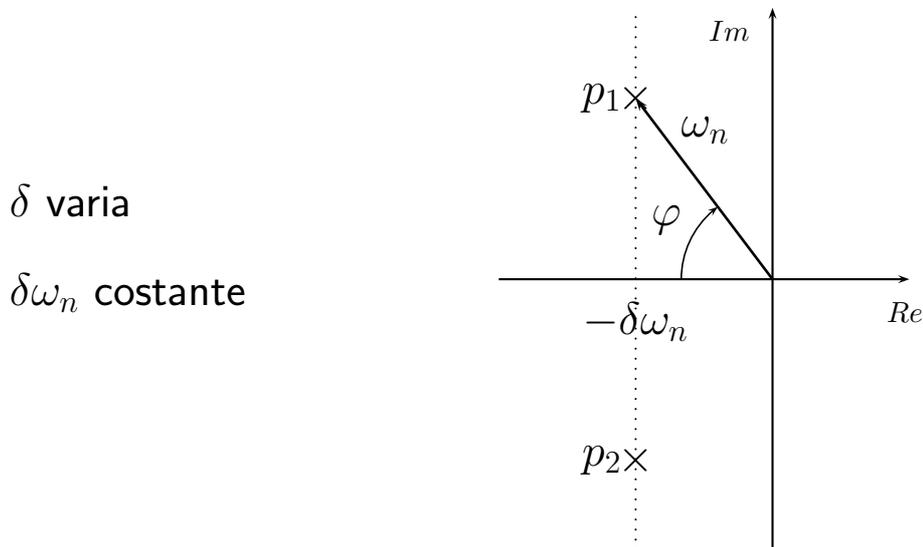
- Se si mantiene costante $\delta = 0.2$ e si fa variare $\omega_n \in [0.2, 0.4, \dots, 2]$ si ottengono i seguenti andamenti temporali:



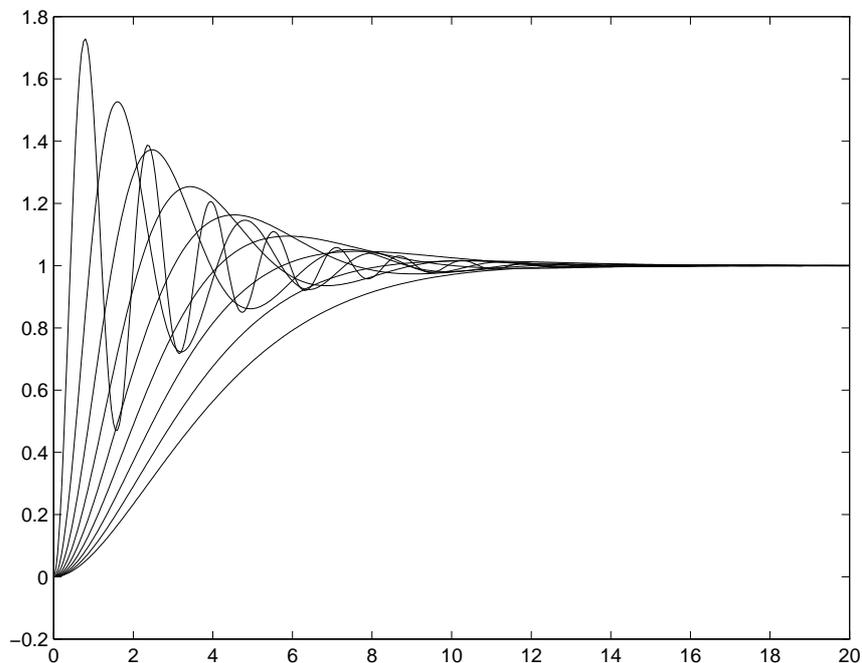
- Cambiare ω_n equivale, in pratica, a cambiare l'asse dei tempi: più ω_n è elevato, più l'asse dei tempi è contratto.

Tempo di assestamento costante

- Mantenere costante il prodotto $\delta\omega_n$ e far variare (per esempio) δ , vuol dire spostare i poli del sistema lungo una retta verticale di ascissa $-\delta\omega_n$:



- Gli andamenti temporali che si ottengono facendo variare $\delta \in [0.1 : 0.9]$, mantenendo però costante il prodotto $\delta\omega_n = 0.4$ sono i seguenti:



- Il tempo di assestamento T_a (5%) è inversamente proporzionale a $\delta\omega_n$:

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n}$$

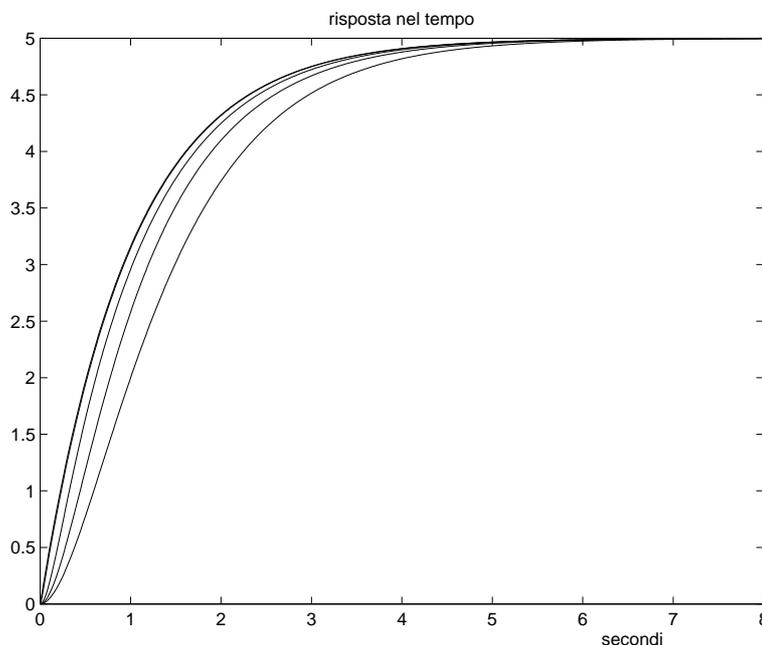
Sistemi a polo dominante

- I seguenti sistemi del secondo ordine hanno tutti guadagno statico $G_i(0) = 5$, hanno tutti un polo in -1 e differiscono per la posizione del secondo polo posizionato, rispettivamente, in -2 , -4 , -10 , -100 e -1000 :

$$G_1(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}, \quad G_2(s) = \frac{20}{(s+1)(s+4)}, \quad G_3(s) = \frac{50}{(s+1)(s+10)}$$

$$G_4(s) = \frac{500}{(s+1)(s+100)}, \quad G_5(s) = \frac{5000}{(s+1)(s+1000)}, \quad \left[G(s) = \frac{5}{(s+1)} \right]$$

- La risposta al gradino unitario di questi sistemi è la seguente:



- Nel grafico l'andamento più lento è quello relativo al sistema $G_1(s)$, quello più veloce è relativo al sistema $G_5(s)$.
- Nel caso di sistemi stabili, si definisce **polo dominante** il polo che si trova più vicino all'asse immaginario.
- La risposta del sistema cambia "abbastanza poco" quando i poli non "dominanti" sono a parte reale molto più negativa del polo "dominante".
- I poli che si trovano una decade "più in basso" rispetto al polo dominante influenzano poco la risposta temporale del sistema.

Deformazione lineare K del piano s

- I sistemi $G_i(s)$ posti nella forma “a costanti di tempo”:

$$G_1(s) = \frac{5}{(1+s)(1+\frac{s}{2})}, \quad G_2(s) = \frac{5}{(1+s)(1+\frac{s}{4})}, \quad G_3(s) = \frac{5}{(1+s)(1+\frac{s}{10})}$$

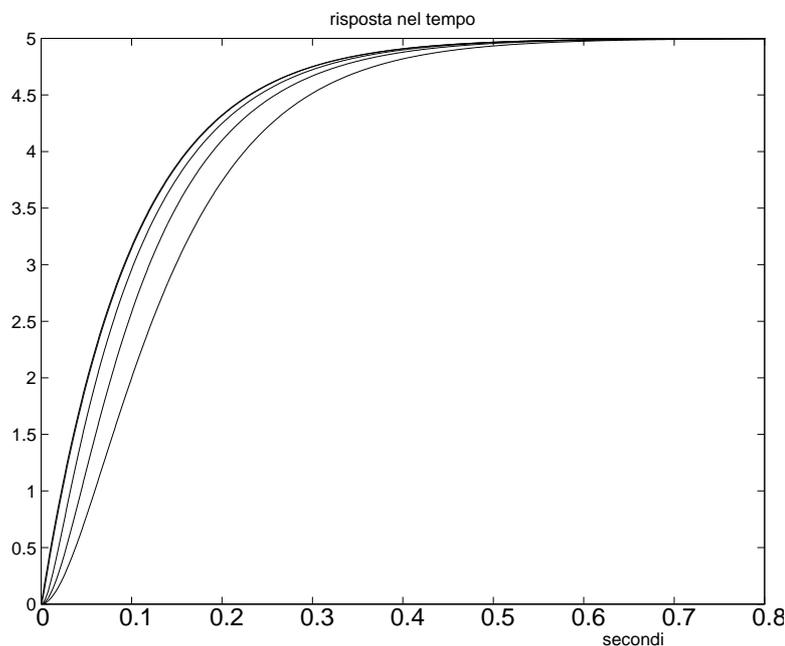
$$G_4(s) = \frac{5}{(1+s)(1+\frac{s}{100})}, \quad G_5(s) = \frac{5}{(1+s)(1+\frac{s}{1000})}, \quad \left[G(s) = \frac{5}{(1+s)} \right]$$

- Se si moltiplica per un fattore $K = 10$ tutti i poli di $G_i(s)$ si ottiene:

$$\bar{G}_1(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{20})}, \quad \bar{G}_2(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{40})}, \quad \bar{G}_3(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{100})}$$

$$\bar{G}_4(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{1000})}, \quad \bar{G}_5(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{10000})}, \quad \left[G(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})} \right]$$

- Gli andamenti temporali alla risposta al gradino sono i seguenti:



- A parte la riduzione di un fattore $K = 10$ della scala dei tempi, gli andamenti ottenuti sono identici a quelli del caso precedente.
- Moltiplicare per un fattore K tutti i poli di un sistema $G(s)$ equivale a renderlo più “veloce” dello stesso fattore K .

Sistemi a “poli” dominanti

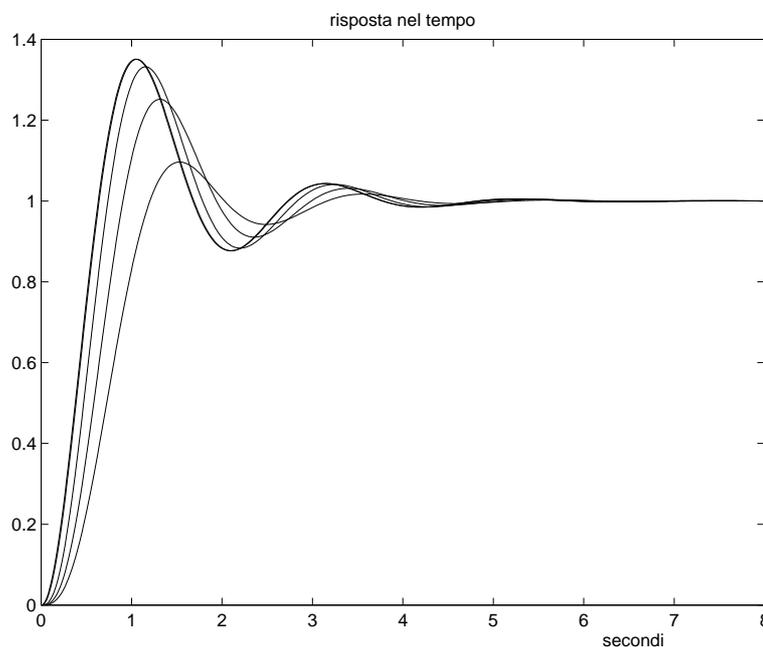
- Le stesse considerazioni valgono anche per sistemi “dominati” da una coppia di poli complessi coniugati.
- Si definiscono “**poli dominanti**” di un sistema asintoticamente stabile i due poli complessi coniugati che si trovano più vicino all’asse immaginario rispetto ad un qualunque altro polo del sistema.
- La risposta al gradino unitario dei seguenti sistemi:

$$G_1(s) = \frac{10}{[(s+1)^2 + 3^2](1 + \frac{s}{2})}, \quad G_2(s) = \frac{10}{[(s+1)^2 + 3^2](1 + \frac{s}{4})}$$

$$G_3(s) = \frac{10}{[(s+1)^2 + 3^2](1 + \frac{s}{10})}, \quad G_4(s) = \frac{10}{[(s+1)^2 + 3^2](1 + \frac{s}{100})}$$

$$G_5(s) = \frac{10}{[(s+1)^2 + 3^2](1 + \frac{s}{1000})}, \quad \left[G(s) = \frac{10}{[(s+1)^2 + 3^2]} \right]$$

è quella riportata nel seguente grafico:



- Anche in questo caso, i poli che si trovano una decade “più in basso” rispetto alla coppia di “poli dominanti” influenzano poco la risposta temporale del sistema.

Sistema dinamico del secondo ordine

- Un qualunque sistema dinamico del secondo ordine privo di zeri:

$$G(s) = \frac{c}{s^2 + a s + b}$$

può sempre essere trasformato nel modo seguente:

$$G(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- La pulsazione naturale ω_n , il coefficiente di smorzamento δ e il guadagno statico K sono definiti come segue:

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{b}, \quad \delta = \frac{a}{2\sqrt{b}}}, \quad K = \frac{c}{b} = G(s)|_{s \rightarrow 0}$$

- Il significato geometrico dei parametri sul piano complesso è il seguente:

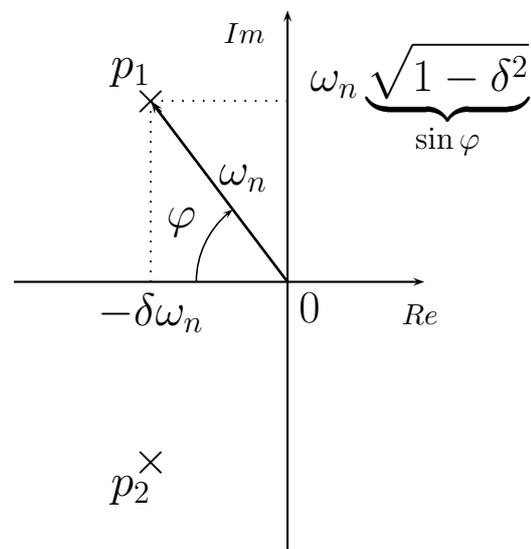
$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ &= -\sigma \pm j\omega \end{aligned}$$

$$\delta = \cos \varphi$$

$$\sigma = \delta \omega_n$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} = |p_1| = |p_2|$$



- Sul piano complesso s , la *pulsazione naturale* ω_n è la distanza dei poli complessi coniugati $p_{1,2}$ dall'origine.
- Il *coefficiente di smorzamento* δ è uguale al coseno dell'angolo φ che il segmento $\overline{p_1 0}$ forma con il semiasse negativo.
- Nel seguito, si considera solo il caso $K = 1$.