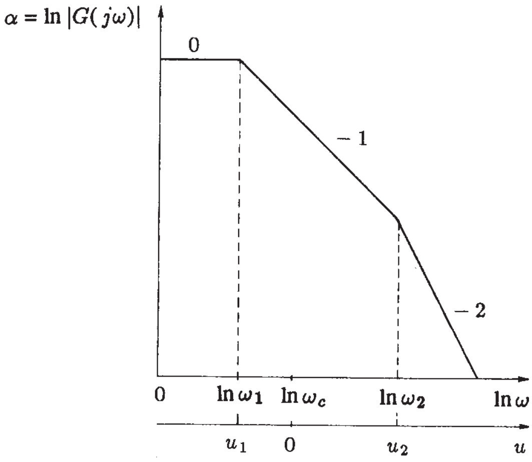
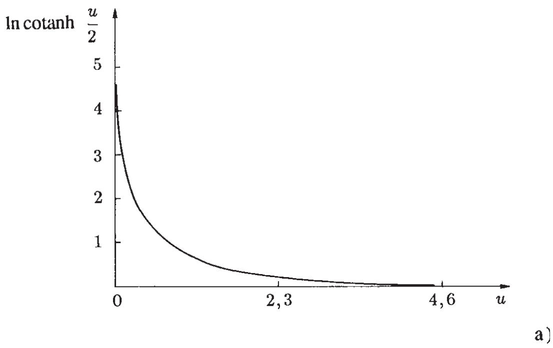
# La formula di Bode

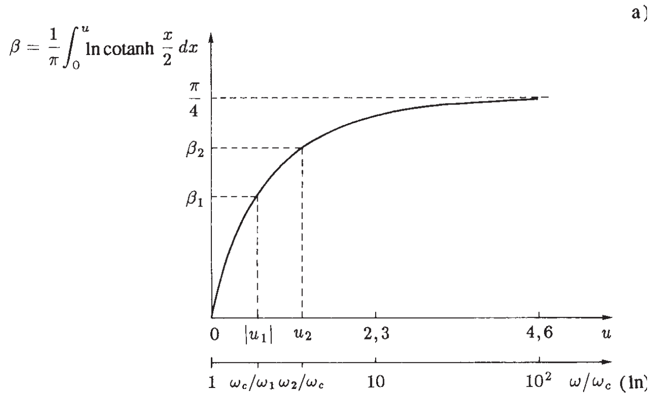
- Una funzione di trasferimento razionale fratta è a <u>*a fase minima*</u> se non ha né poli né zeri nel semipiano destro del piano $s$.
- Per sistemi a fase minima, detta $\omega_c$ la pulsazione in corrispondenza della quale si vuole calcolare la fase $\beta_c$, vale la <u>*formula di Bode*</u>:

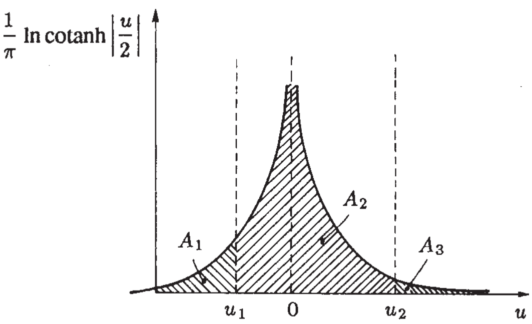
$$\boxed{\beta_c = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,\alpha}{d\,u}\,\ln\operatorname{cotanh}\left|\frac{u}{2}\right| du}$$

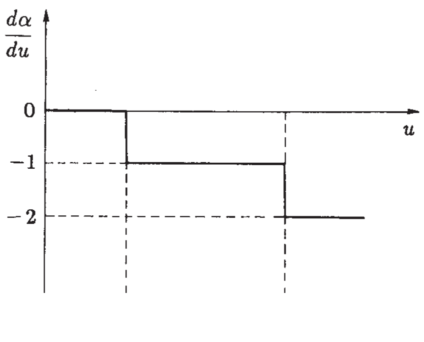
in cui si è posto $\alpha := \ln|G(j\omega)|$, $u := \ln\frac{\omega}{\omega_c} = \ln\omega - \ln\omega_c$.



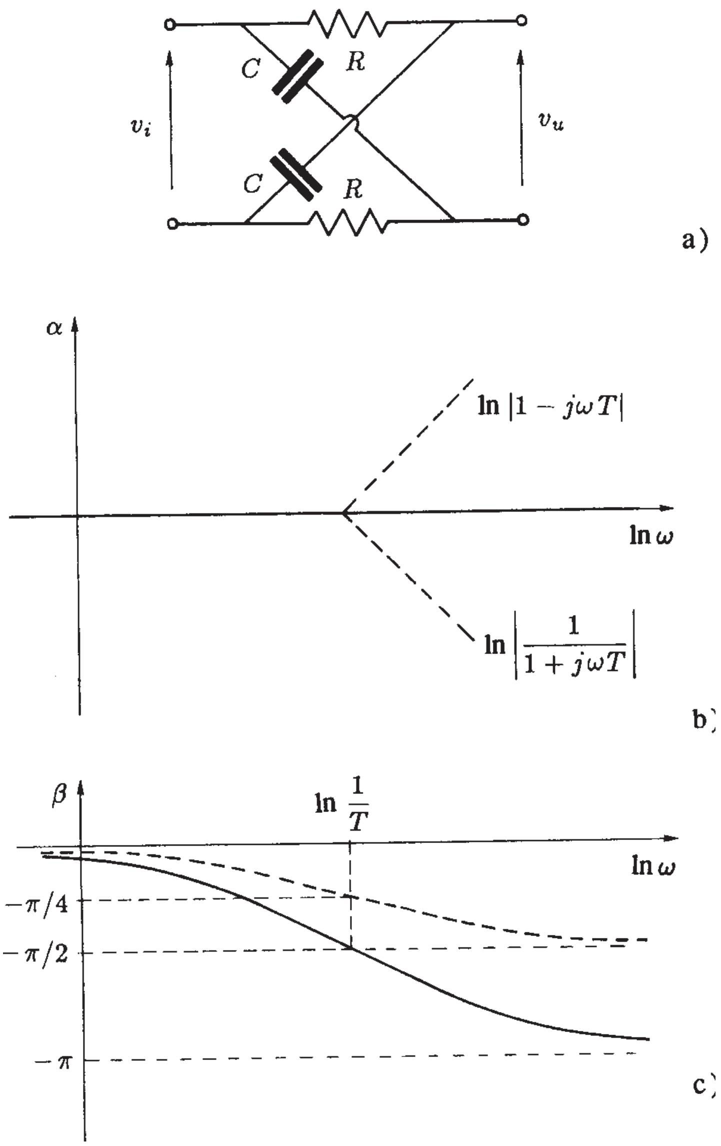

- La fase $\beta_c$ in corrispondenza di una data pulsazione $\omega_c$ dipende essenzialmente dalla pendenza $\frac{d\,\alpha}{d\,u}$ del diagramma delle ampiezze nell'intorno di quella pulsazione $\omega_c$.
- Esempio: $\beta_c = 0\cdot A_1 - 1\cdot A_2 - 2\cdot A_3$ dove:

$$A_1 = \frac{\pi}{4} - \beta_1,\ A_2 = \beta_1 + \beta_2,\ A_3 = \frac{\pi}{4} - \beta_2$$

- Significato della variabile di integrazione $u$: se il diagramma $\alpha$ è riferito ai logaritmi naturali, la variabile $u$ non è altro che l'ascissa $\ln\omega$ con l'origine traslata in $\ln\omega_c$.

- La condizione necessaria e sufficiente per la validità della formula di Bode, cioè il fatto che la funzione di trasferimento sia a fase minima, è soddisfatta per la quasi totalità dei sistemi che normalmente si considerano.

- Esempio di rete elettrica a fase non minima:




- Funzione di trasferimento:

$$V_u(s) = \frac{1/Cs - R}{R+1/Cs} V_i(s)$$

Posto $T = RC$ si ha:

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1-T\,s}{1+T\,s}$$

cioè una funzione non a fase minima;

- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi: il diagramma delle ampiezze è costante $\alpha = 0$ ($|G(j\omega)| = 1$), mentre il diagramma delle fasi varia gradualmente da $0°$ a $-180°$.

- È chiaro che applicando la formula di Bode all'esempio si sarebbe invece dedotta una fase identicamente nulla.

- La funzione di trasferimento:

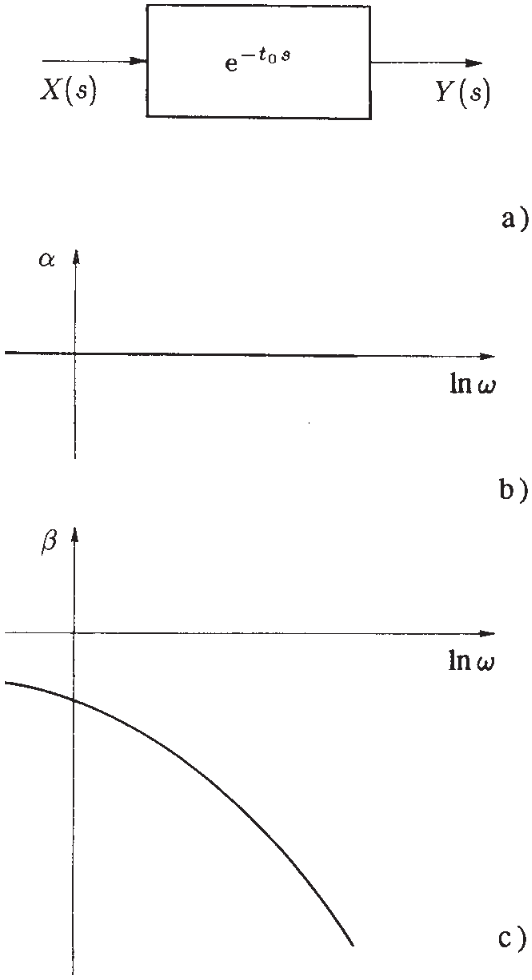
$$G(s) = e^{-t_0\, s}$$

che rappresenta un ritardo finito di valore $t_0$, non è a fase minima.

- Essendo

$$G(j\omega) = e^{-j\omega t_0} = \cos\omega\, t_0 - j\,\mathrm{sen}\,\omega\, t_0\ ,$$

la funzione di risposta armonica ha modulo identicamente unitario e fase crescente linearmente con la frequenza.




- Per ricavare i diagrammi di Bode, si scrive

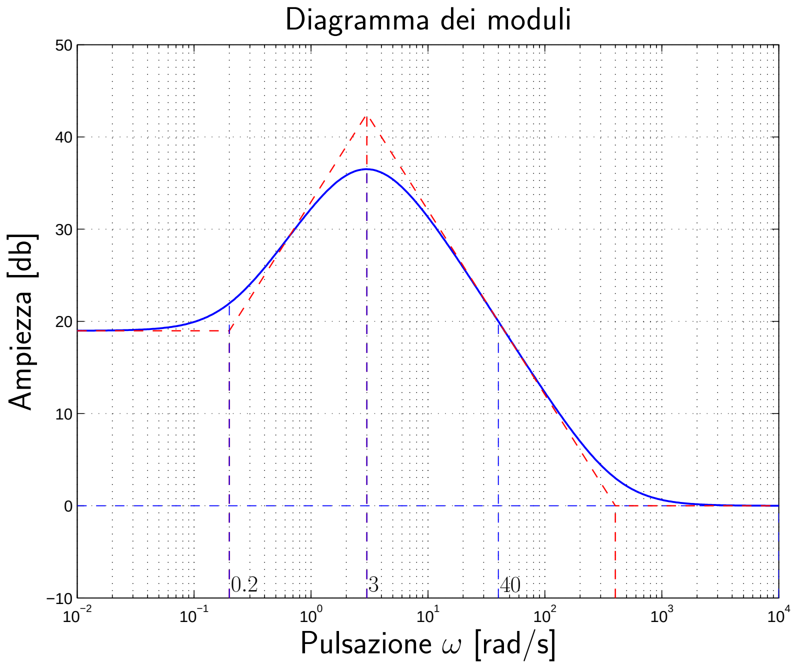
$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\,\beta = 0 - j\,\omega\, t_0 = 0 - j\, t_0\, e^{\ln\omega}$$

relazione dalla quale si deduce che il diagramma delle fasi ha un andamento esponenziale. Anche in questo caso l'applicazione della formula di Bode avrebbe condotto ad un risultato errato ($\beta = 0$).

**Esempio.** Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli mostrato in figura relativo ad un sistema $G(s)$ a fase minima.

Utilizzando in modo qualitativo la formula di Bode, calcolare in modo approssimato la fase $\varphi$ del sistema $G(s)$ in corrispondenza delle seguenti pulsazioni $\omega$:

$$\omega_1 = 0.2 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 \simeq \frac{\pi}{4},$$
$$\omega_2 = 3 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 \simeq 0,$$
$$\omega_3 = 40 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 \simeq -\frac{\pi}{2},$$
$$\omega_4 = 10000 \quad \rightarrow \quad \varphi_4 \simeq 0.$$




**Esempio.** Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli mostrato in figura relativo ad un sistema $G(s)$ a fase minima.

Utilizzando in modo qualitativo la formula di Bode, calcolare in modo approssimato la fase $\varphi$ del sistema $G(s)$ in corrispondenza delle seguenti pulsazioni $\omega$:

$$\omega_1 = 0.01 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 \simeq -\frac{\pi}{2},$$
$$\omega_2 = 0.1 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 \simeq -\frac{\pi}{4},$$
$$\omega_3 = 10 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 \simeq 0,$$
$$\omega_4 = 100 \quad \rightarrow \quad \varphi_4 \simeq -\frac{\pi}{2}.$$