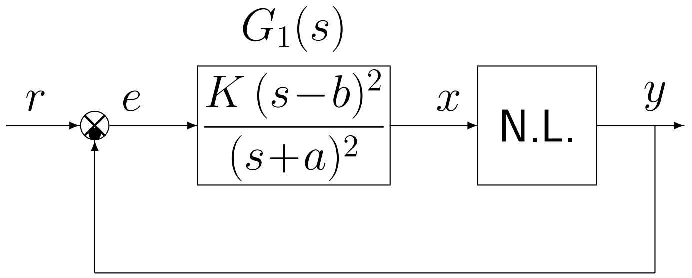
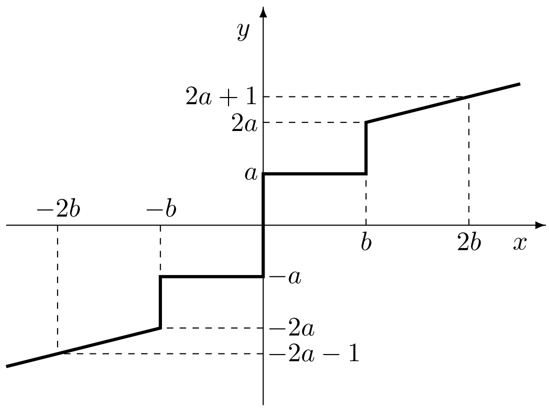
Sistemi non lineari: esempio

Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





1) Posto $K = 1$, determinare per quale valore r^* del riferimento r il punto di lavoro del sistema retroazionato coincide con il punto $(x_0,\, y_0) = (2b,\, 2a+1)$.

<u>*Soluzione.*</u> Posto $K = 1$, la retta di carico della parte lineare del sistema è:

$$x = K_1(r - y) \qquad \text{dove} \qquad K_1 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Imponendo il passaggio della retta per il punto $(x_0,\, y_0) = (2b,\, 2a+1)$ si ottiene:

$$2\,b = \frac{b^2}{a^2}[r^* - (2\,a+1)],$$

da cui si ricava:

$$r^* = 2\,a + 1 + \frac{2\,a^2}{b}. \qquad \xrightarrow{a=3,\; b=5} \qquad r^* = 10.6.$$

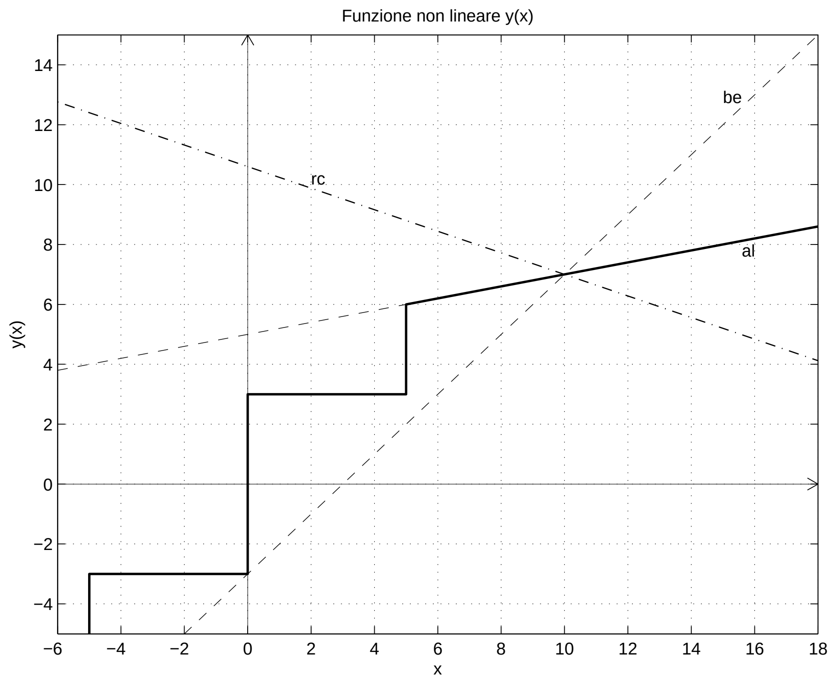
2) Posto $K = 1$, $r = r^*$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro $(x_0,\, y_0) = (2b,\, 2a+1)$.

<u>*Soluzione.*</u> Le pendenze α e β di 2 rette che centrate in $(x_0,\, y_0) = (2b,\, 2a+1)$ racchiudono a settore tutta la non linearità sono:

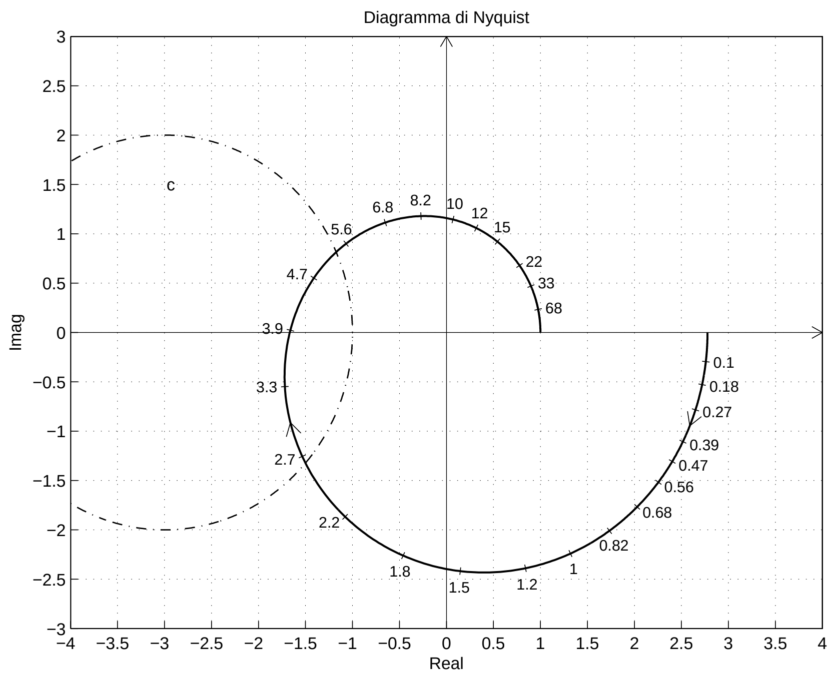
$$\alpha = \frac{1}{b}, \quad \beta = \frac{3\,a+1}{2\,b} \qquad \xrightarrow{a=3,\; b=5} \qquad \alpha = 0.2, \quad \beta = 1$$

La pendenza β è stata calcolata facendo riferimento al punto $(x_1, y_1) = (0, -a)$. Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -b, \qquad -\frac{1}{\beta} = -\frac{2\,b}{3\,a+1}.$$



Cerchio critico e diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ per $a = 3$ e $b = 5$.



L'intersezione con il semiasse reale negativo si trova scrivendo l'equazione caratteristica del sistema retroazionato e applicando il criterio di Routh:

$$1+\frac{K\,(s-b)^2}{(s+a)^2}=0 \quad\rightarrow\quad (s+a)^2+K\,(s-b)^2=0,$$

da cui si ricava:

$$(1+K)s^2+2(a-Kb)s+a^2+Kb^2=0$$

Il sistema retroazionato è stabile per:

$$-\frac{a^2}{b^2}<K<\frac{a}{b}=\bar{K}^*, \qquad\qquad \omega^*=\sqrt{a\,b}.$$

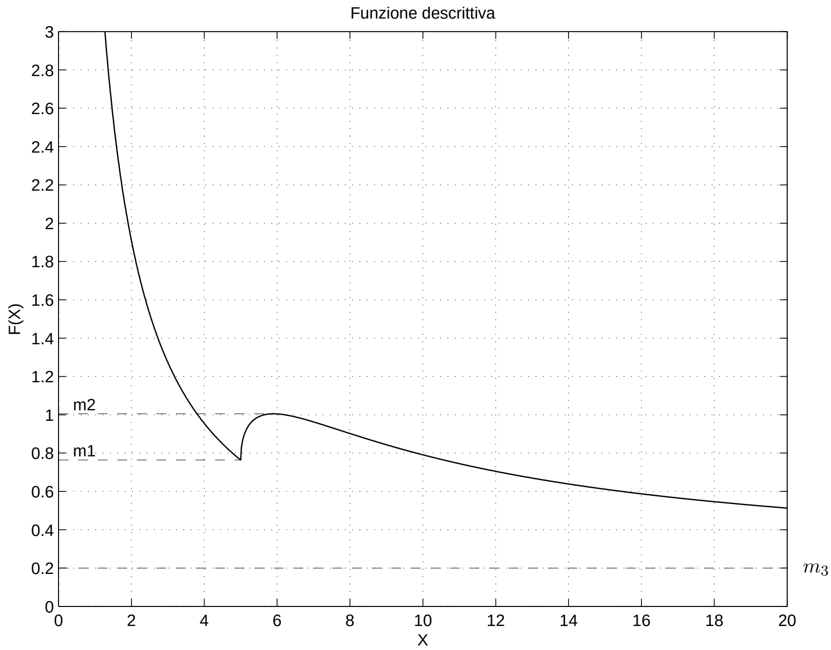
Per $a, b \in [1,\, 2,\, \ldots, 10]$ il valore di $\bar{K}^*$ è sempre maggiore di α e minore di β

$$\alpha<\bar{K}^*<\beta \qquad\leftrightarrow\qquad \frac{1}{b}<\frac{a}{b}<\frac{3\,a+1}{2b}.$$

Ne segue che il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ interseca sempre il cerchio critico e quindi utilizzando il criterio del cerchio non è possibile concludere niente a riguardo della stabilità o meno del sistema non lineare retroazionato.

3) Posto $r=0$ il punto di lavoro coincide con l'origine. Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare le variabili $m_1,\ m_2,\ \ldots$ per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

Soluzione. Andamento della funzione descrittiva $F(X)$ quando $a = 3$ e $b = 5$..



Per $X < b$ la funzione descrittiva $F(X)$ coincide con quella di un relè:

$$F(X) = \frac{4\,a}{\pi\,X}.$$

Il valore m_1 del primo minimo si ottiene dalla $F(X)$ in corrispondenza di $X = b$:

$$m_1 = F(X)|_{X=b} = \frac{4\,a}{\pi\,b}.$$

Il valore m_2 del massimo intermedio può essere calcolato solo conoscendo la $F(X)$ per $X > b$. Per $X \to \infty$ la $F(X)$ tende al valore finale $m_3 = \frac{1}{b}$.

4) Discutere "qualitativamente" (in funzione dei parametri m_1, m_2, ...) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Soluzione. Per $K = 1$, il margine di ampiezza $\bar{K}^*$ del sistema $G_1(s)$ è $\bar{K}^* = \frac{a}{b}$. Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K\,G_1(s)$ è $K^* = \frac{\bar{K}^*}{K}$. Al variare di K^* si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:

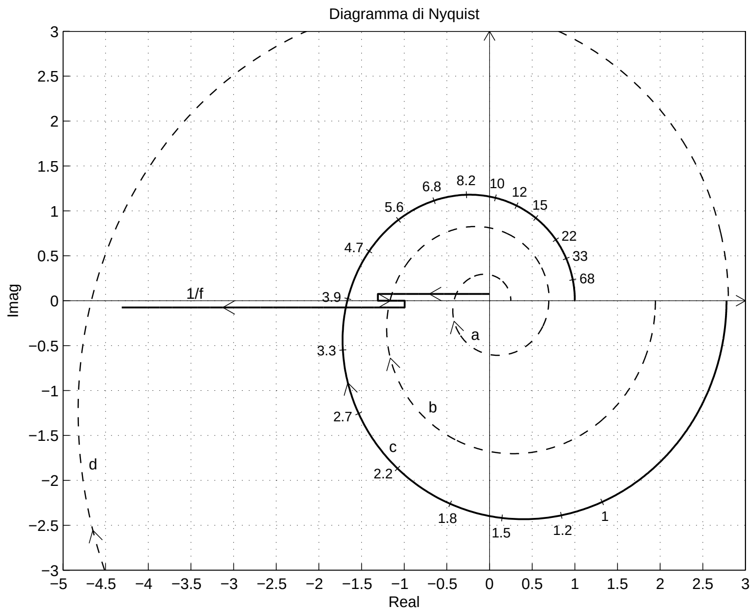
a) Per $K^* > m_2$ il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

b) Per $m_1 < K^* < m_2$ il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in tre punti a cui corrispondono tre cicli limite di cui due stabili (quelli esterni) e uno instabile (quello intermedio).

c) Per $m_3 < K^* < m_1$ il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

d) Per $K^* < m_3$, la funzione $-1/F(X)$ è tutta interna al diagramma completo della $G_1(s)$ per cui non vi sono cicli limite e il sistema retroazionato è instabile.

Descrizione grafica delle varie condizioni operative.



5) Posto $K = 0.5$, determinare l'ampiezza X^* e la pulsazione ω^* di un eventuale ciclo limite stabile presente nel sistema retroazionato.

__Soluzione.__ Posto $K = 0.5$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K\,G_1(s)$ è $K^* = \frac{a}{b\,K} = \frac{2\,a}{b}$. Tale valore è sempre maggiore di m_1 per cui nel sistema retroazionato è presente almeno un ciclo limite stabile di cui è possibile calcolare l'ampiezza X^* utilizzando la funzione descrittiva $F(X)$ del relè ideale:

$$F(X^*) = K^* \qquad \rightarrow \qquad \frac{4\,a}{\pi\,X^*} = \frac{2\,a}{b} \qquad \rightarrow \qquad X^* = \frac{4\,b}{2\,\pi}.$$

La pulsazione ω^* del ciclo limite coincide con quella del punto di intersezione della $G_1(s)$ con il semiasse reale negativo: $\omega^* = \sqrt{a\,b} = \sqrt{15} = 3.873$.