

## Diagrammi di Bode

• La funzione di risposta armonica  $F(\omega) = G(j\omega)$  può essere rappresentata graficamente in tre modi diversi: i *Diagrammi di Bode*, i *Diagrammi di Nyquist* e i *Diagrammi di Nichols*.

• I **Diagrammi di Bode** sono due:

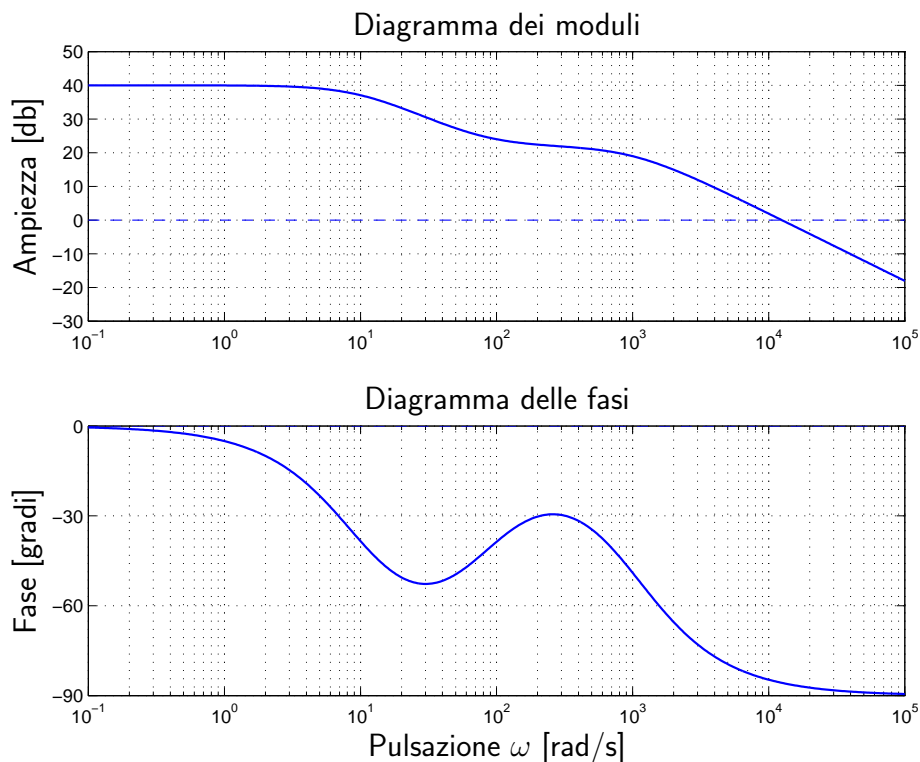
1) Diagramma delle ampiezze: rappresenta il modulo  $|G(j\omega)|$  in funzione della pulsazione  $\omega$ . Sia il modulo  $|G(j\omega)|$  che la pulsazione  $\omega$  vengono espressi in scala logaritmica. Tipicamente per i moduli  $|G(j\omega)|$  si usano i "db" ( $A_{db} = 20 \log_{10} A$ ), mentre per la pulsazione  $\omega$  si usa la scala logaritmica in base 10.

2) Diagramma delle fasi: rappresenta la fase  $\arg G(j\omega)$  in funzione della pulsazione  $\omega$ . In questo caso la fase  $\arg G(j\omega)$  viene espressa in scala lineare, mentre la pulsazione  $\omega$  viene espressa in scala logaritmica base 10.

• Esempio:

$$G(s) = \frac{100 \left(1 + \frac{s}{80}\right)}{\left(1 + \frac{s}{10}\right) \left(1 + \frac{s}{1000}\right)} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{100 \left(1 + j\frac{\omega}{80}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{1000}\right)}$$

• Diagrammi di Bode:



## Conversione delle ampiezze in db

- Il *decibel* è un'unità logaritmica convenzionale che normalmente si impiega per esprimere quantità positive, tipicamente il guadagno di amplificatori:

$$A_{\text{db}} = 20 \log_{10} A$$

- Per la conversione si può utilizzare il seguente diagramma:

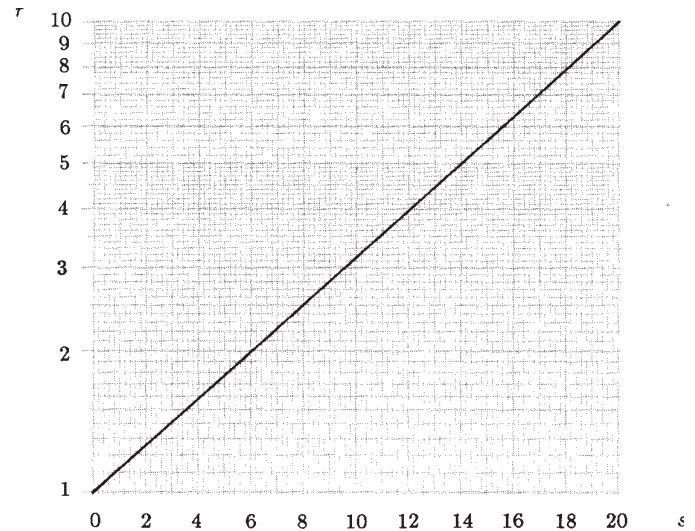
Posto  $A$  nella forma:

$$A = r \cdot 10^n \quad \text{con } 1 \leq r < 10,$$

il valore di  $A$  in decibel è:

$$A_{\text{db}} = 20n + s \text{ db}$$

dove  $s$  si ricava dal diagramma a fianco:  $0 \leq s < 20$ .



- Alcune conversioni di uso frequente:

Le decadi		$A > 1$	
∴	∴	$\sqrt{2}$	3 db
10000	80 db	2	6 db
1000	60 db	5	14 db
100	40 db	20	26 db
10	20 db	50	34 db
1	0 db	$A < 1$	
0.1	-20 db	$1/\sqrt{2}$	-3 db
0.01	-40 db	1/2	-6 db
0.001	-60 db	1/5	-14 db
0.0001	-80 db	1/20	-26 db
∴	∴	1/50	-34 db

– Esempio 1:

$$A = 24$$

$$A = 2.4 \cdot 10^1$$

$$A_{\text{db}} \simeq 20 + 8 = 28$$

– Esempio 2:

$$A = 0.56$$

$$A = 5.6 \cdot 10^{-1}$$

$$A_{\text{db}} \simeq -20 + 15 = -5$$

– Ogni 6 db il valore di  $A$  raddoppia;

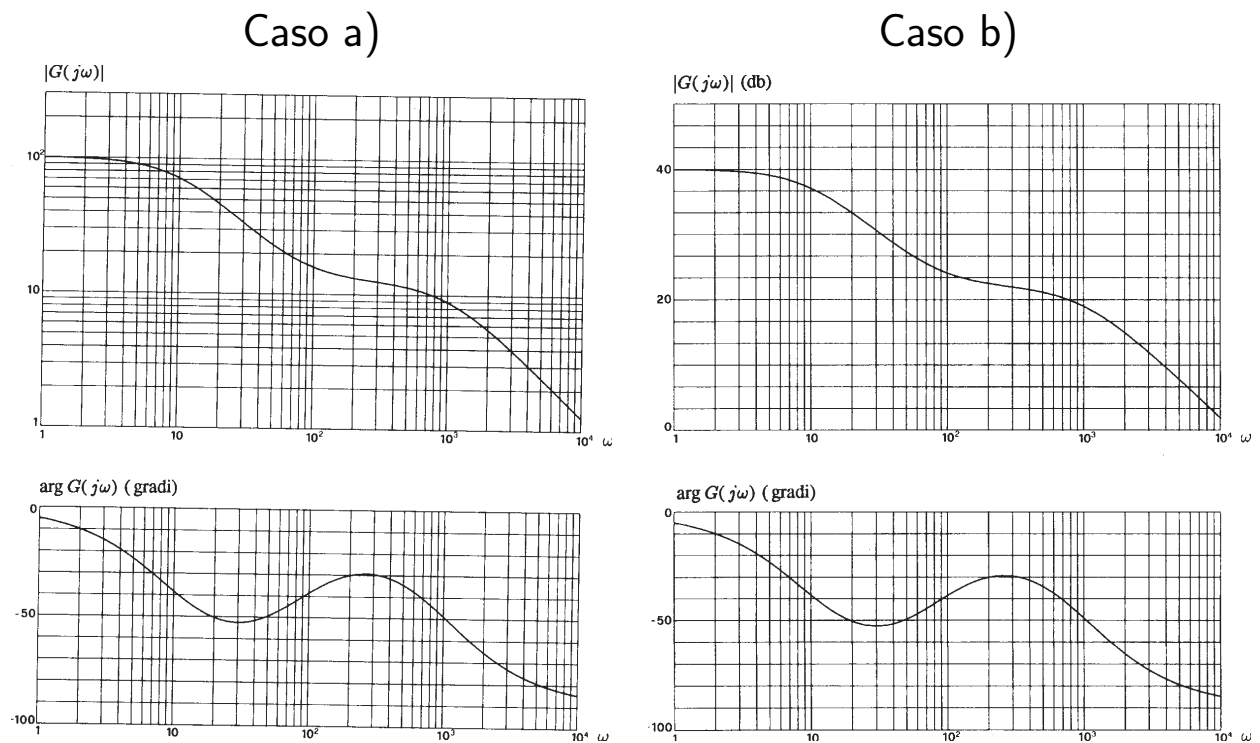
– Ogni 20 db il valore di  $A$  è moltiplicato per 10;

- Per i calcoli teorici si utilizzano tipicamente i logaritmi naturali:

$$\ln G(j\omega) = \ln \left[ |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} \right] = \underbrace{\ln |G(j\omega)|}_{\alpha} + j \underbrace{\arg G(j\omega)}_{\beta}$$

Peraltro, un cambiamento di base dei logaritmi equivale ad un semplice cambiamento di scala.

- Si possono utilizzare due tipi diversi di carta millimetrata:
  - a) carta con doppia scala logaritmica per le ampiezze e carta semilogaritmica per le fasi;
  - b) carta semilogaritmica sia per le ampiezze sia per le fasi. In questo caso la scala delle ampiezze è graduata in decibel:  $A_{\text{db}} = 20 \log_{10} A$ .



- I vantaggi che si hanno impiegando una scala logaritmica sono:

- 1) è possibile avere una rappresentazione dettagliata di grandezze che variano in campi notevolmente estesi;
- 2) i diagrammi di Bode di sistemi in cascata si ottengono come somma dei diagrammi di Bode dei singoli sottosistemi;
- 3) i diagrammi di Bode di una funzione data in forma fattorizzata si ottengono come somma dei diagrammi elementari dei singoli fattori.

- Funzione  $G(s)$  in forma polinomiale :

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^h (s^{n-h} + a_{n-1} s^{n-h-1} + \dots + a_{h+1} s + a_h)}$$

- Il fattore  $s^h$  corrisponde ad un polo nell'origine con grado di molteplicità  $h$ . Se  $h=0$  la funzione  $G(s)$  non presenta poli nell'origine.
- Forma fattorizzata a poli e zeri:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^h (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-h})}$$

- Forma fattorizzata a costanti di tempo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \dots}$$

- Il **logaritmo del modulo** della funzione  $G(s)$ :

$$\begin{aligned} \log |G(s)| = & \log |K| + \log |1 + \tau'_1 s| + \dots + \log \left|1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right| \\ & - \log |s^h| - \log |1 + \tau_1 s| - \dots - \log \left|1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right| \end{aligned}$$

- La **fase** della funzione  $G(s)$ :

$$\begin{aligned} \arg G(s) = & \arg K + \arg(1 + \tau'_1 s) + \dots + \arg \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \\ & - \arg(s^h) - \arg(1 + \tau_1 s) - \dots - \arg \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \end{aligned}$$

- Il diagramma di Bode di una qualunque funzione  $G(s)$  si ottiene come somma dei diagrammi di Bode delle seguenti funzioni elementari:

$$K, \quad s^{\pm 1}, \quad (1 + s\tau)^{\pm 1}, \quad \left(1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$$

### • Guadagno costante:

$$G(s) = K$$

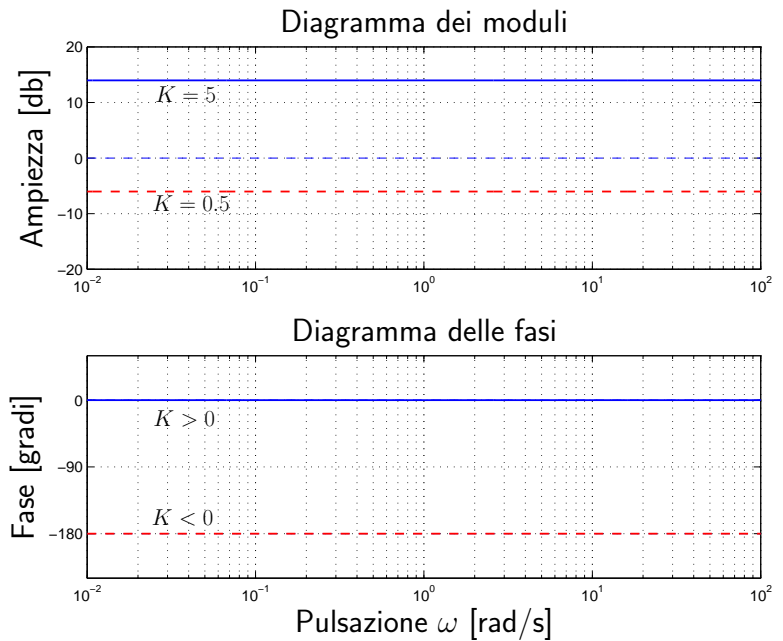
Funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = |K| e^{j\varphi}$$

Modulo:  $|G(j\omega)| = |K|$ .

$$\text{Fase: } \varphi = \begin{cases} 0 & \text{se } K > 0 \\ -\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

I diagrammi dei moduli e delle fasi sono costanti e indipendenti da  $\omega$ .



### • Polo nell'origine:

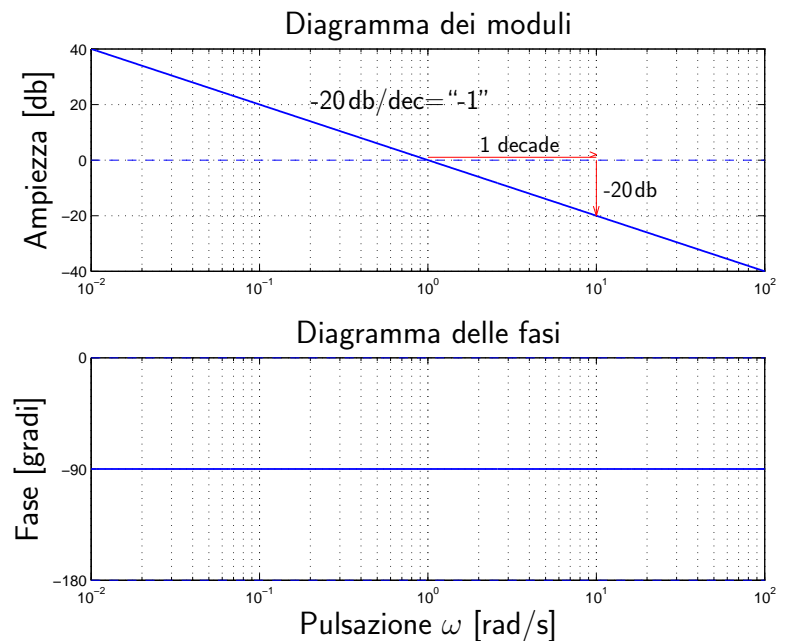
$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Modulo:  $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$

Fase costante:  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$



Il diagramma delle ampiezze è una retta di pendenza “-1” (cioè -20 db/dec) con guadagno unitario in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 1$ .

- **Polo reale:**

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi:

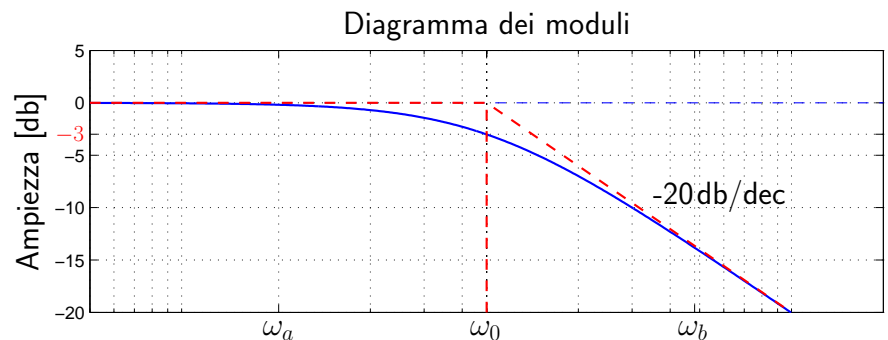
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}, \quad \arg G(j\omega) = -\arctan \omega\tau$$

a) Alle basse frequenze:

$$G(j\omega)|_{\omega \simeq 0} \simeq 1$$

Modulo iniziale:  $G_0 = 1$ .

Fase iniziale:  $\varphi_0 = 0$ .

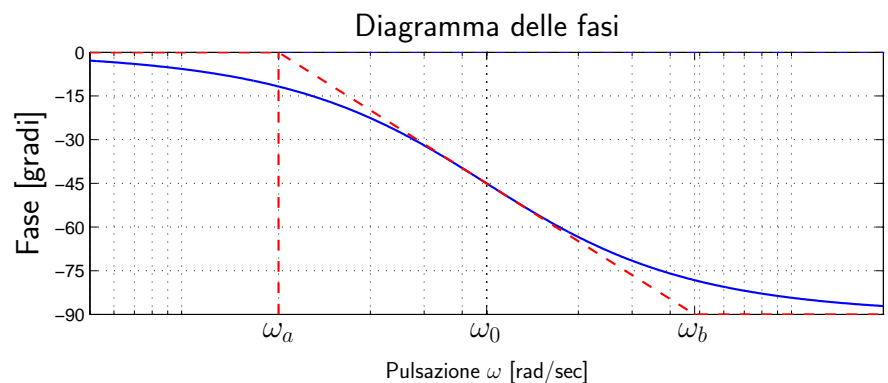


b) Alle alte frequenze:

$$G(j\omega)|_{\omega \simeq \infty} \simeq \frac{1}{j\omega\tau}$$

Modulo finale:  $G_\infty = 0$ .

Fase finale:  $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ .



- È possibile dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} = 4,81$$

- I cambiamenti di pendenza dei diagrammi asintotici avvengono alle pulsazioni:

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}, \quad \omega_a = \frac{\omega_0}{4,81} = \frac{1}{4,81\tau}, \quad \omega_b = 4,81\omega_0 = \frac{4,81}{\tau}$$

- La massima distanza esistente tra la rappresentazione asintotica e l'andamento reale si ha per  $\omega = \omega_0 = 1/\tau$  e vale  $1/\sqrt{2} \simeq -3$  db.

- La pendenza  $-20$  db/decade viene tipicamente indicata con il simbolo “-1”.

- I diagrammi di Bode della funzione  $G(s) = (1 + \tau s)$  si ottengono ribaltando attorno all'asse delle ascisse quelli della funzione  $G(s) = (1 + \tau s)^{-1}$ .

- Quando  $\tau$  è negativa, il diagramma delle ampiezze rimane immutato, mentre il diagramma delle fasi risulta ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

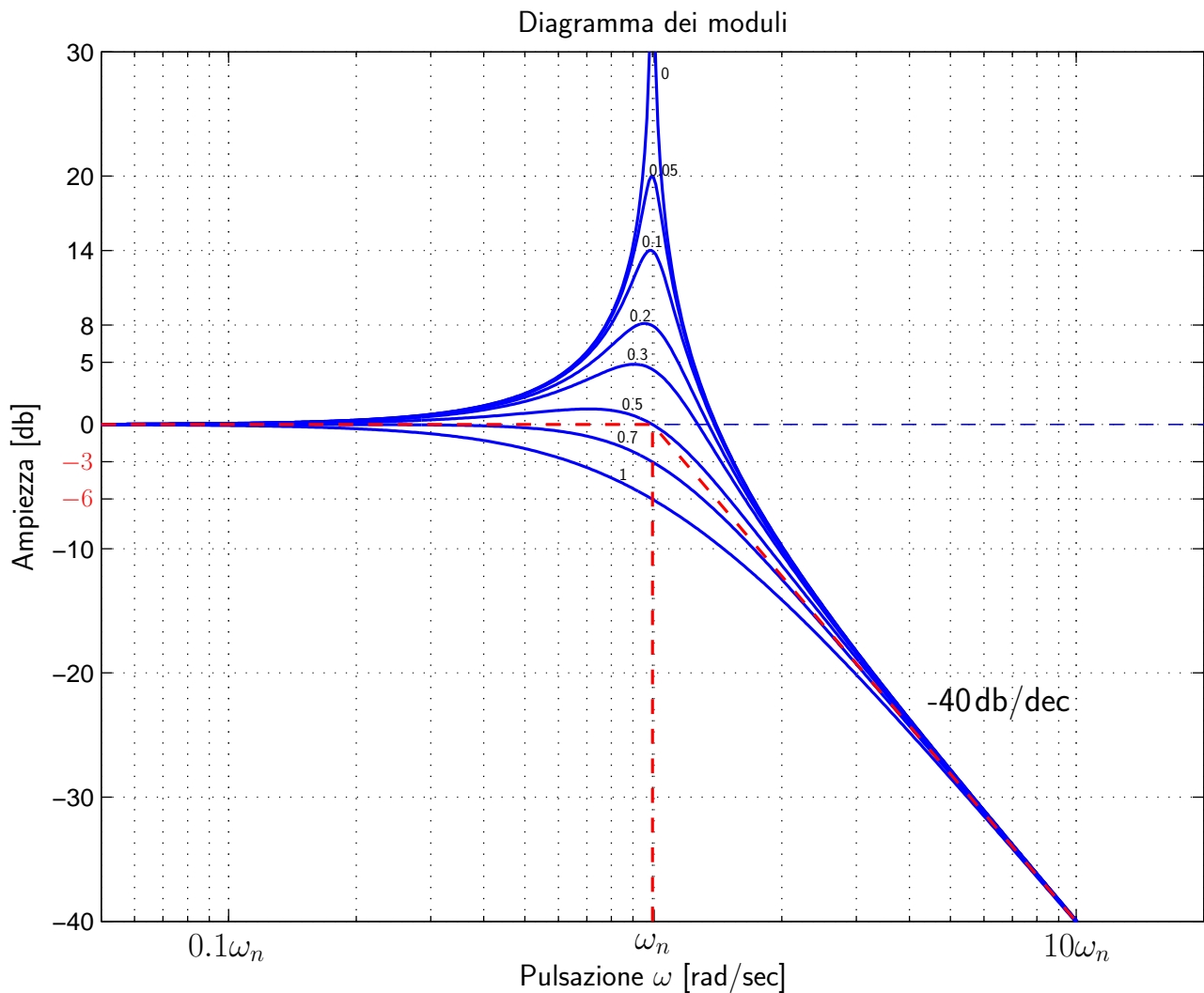
- Poli complessi coniugati ( $0 \leq \delta < 1$ ):

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j 2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}, \quad \arg G(j\omega) = -\arctan \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

- Diagramma di Bode delle ampiezze per  $\delta \in \{0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1\}$ :



- La pendenza  $-40$  db/decade viene tipicamente indicata con il simbolo “ $-2$ ”.

- Per piccoli valori di  $\delta$  il diagramma reale si discosta sensibilmente da quello asintotico. In particolare per  $\delta=0$  lo scostamento è infinito.
- Il diagramma delle ampiezze ha le seguenti proprietà:
  - 1) per  $0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$  il diagramma ha un massimo;
  - 2) per  $0 \leq \delta \leq 1/2$  il diagramma interseca l'asse a destra del punto  $\omega = \omega_n$ ;
  - 3) per  $1/2 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$  il diagramma interseca l'asse a sinistra del punto  $\omega = \omega_n$ ;
  - 4) per  $1/\sqrt{2} \leq \delta \leq 1$  il diagramma non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto tutta al di sotto della sua approssimazione asintotica.
- **Pulsazione di risonanza**  $\omega_R$ . Posto  $u = \omega/\omega_n$ , il massimo dell'ampiezza corrisponde ad un minimo della funzione

$$(1 - u^2)^2 + 4\delta^2 u^2$$

Derivando e uguagliando a zero la derivata, si ottiene

$$-4(1 - u^2)u + 8\delta^2 u = 0$$

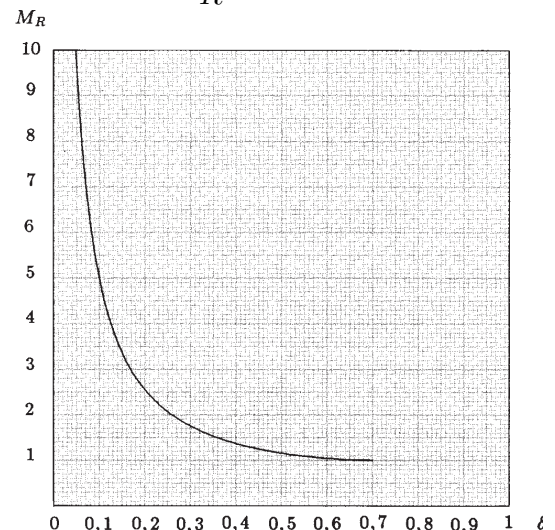
Trascurando la soluzione nulla si ottiene

$$u_R = \sqrt{1 - 2\delta^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}}$$

- **Picco di risonanza**  $M_R$ : si calcola come modulo della funzione di risposta armonica in corrispondenza della pulsazione  $\omega_R$ :

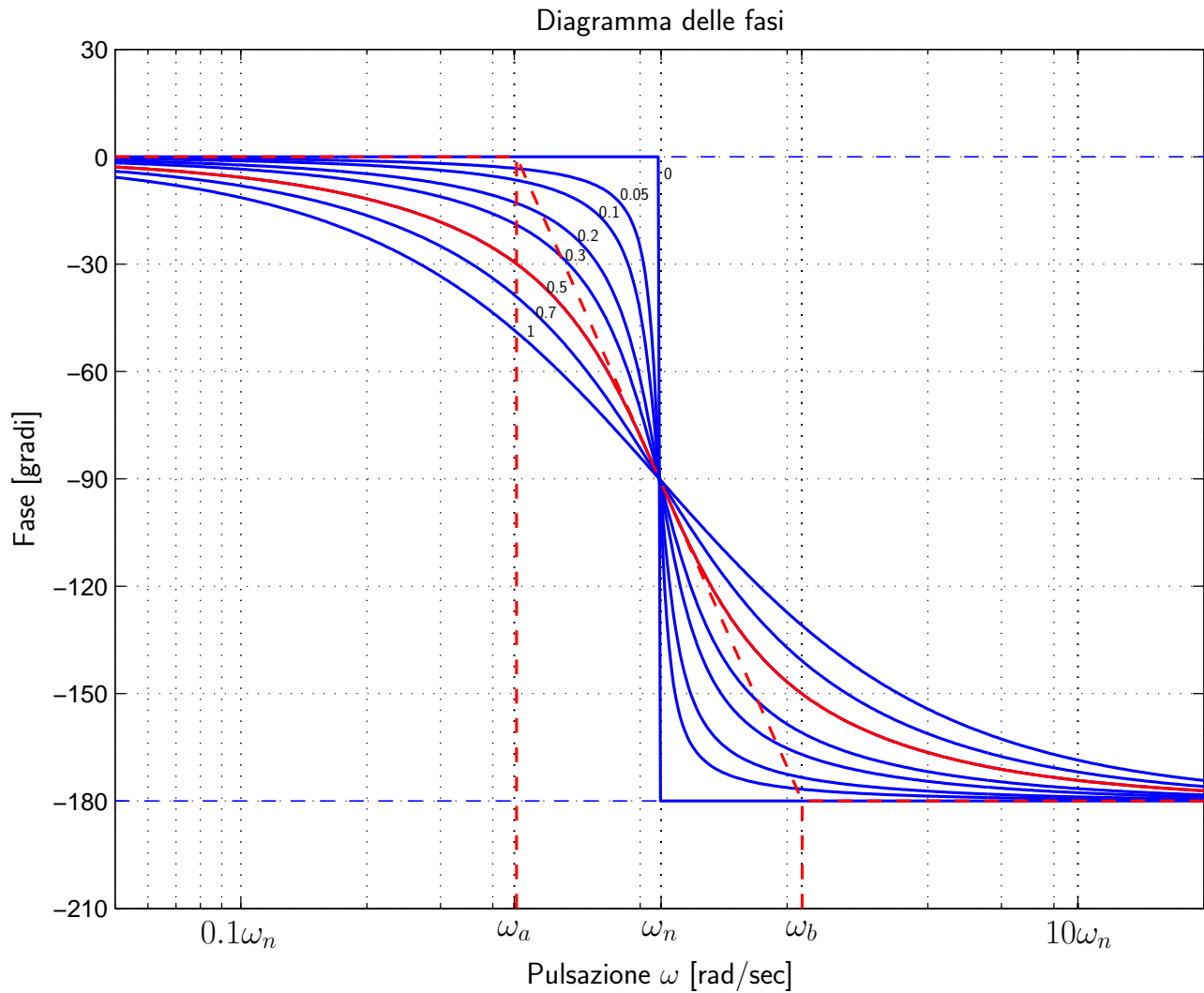
$$M_R = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1 - 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(1 - 2\delta^2)}}$$

$$\boxed{M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}}}$$





- Diagramma di Bode della fasi:



- Le pulsazioni  $\omega_a$  e  $\omega_b$  sono legate alla pulsazione  $\omega_n$  dalla relazione:

$$\frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_n} = e^{\frac{\pi}{2}\delta} = 4,81^\delta$$

- I cambiamenti di pendenza del diagramma asintotico delle fasi avviene alle pulsazioni:

$$\omega_a = \frac{\omega_n}{4.81^\delta}, \quad \omega_b = 4.81^\delta \omega_n$$

- Il coefficiente di smorzamento  $\delta$  può essere calcolato a partire:

1) dal picco di risonanza  $M_R$ :

$$M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} \rightarrow$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M_R^2}} \right)}$$

2) dalle pulsazioni critiche  $\omega_a$  e  $\omega_b$ :

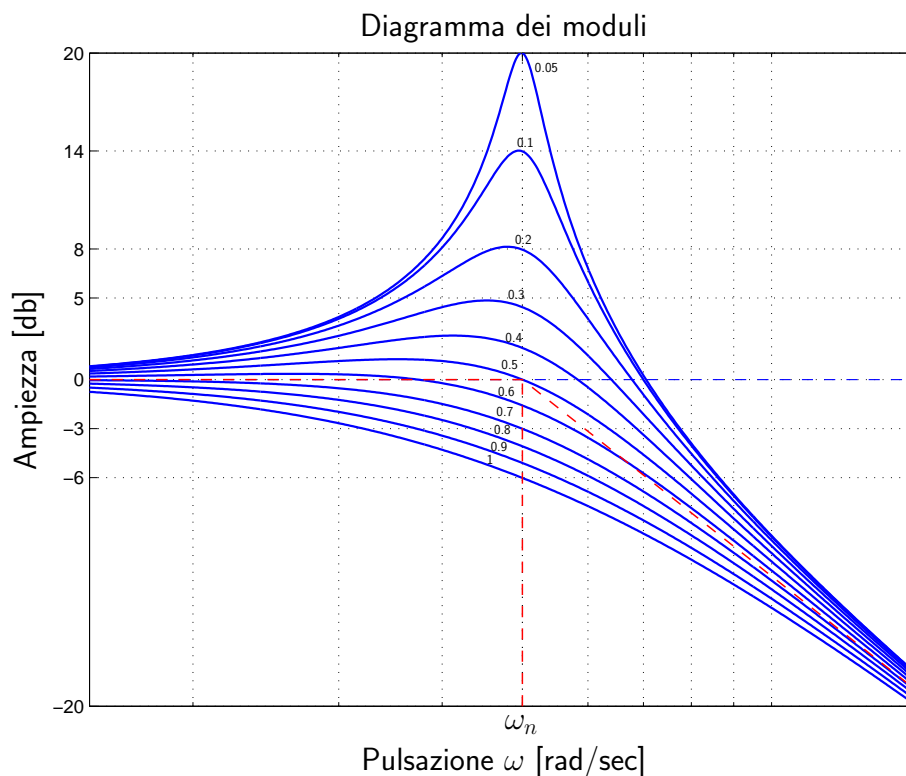
$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = e^{\pi\delta} \rightarrow$$

$$\delta = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\omega_b}{\omega_a}$$

3) dal guadagno  $M_{\omega_n}$  della funzione  $G(j\omega)$  alla pulsazione  $\omega = \omega_n$ :

$$M_{\omega_n} = G(j\omega)|_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\delta} \rightarrow$$

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}}$$

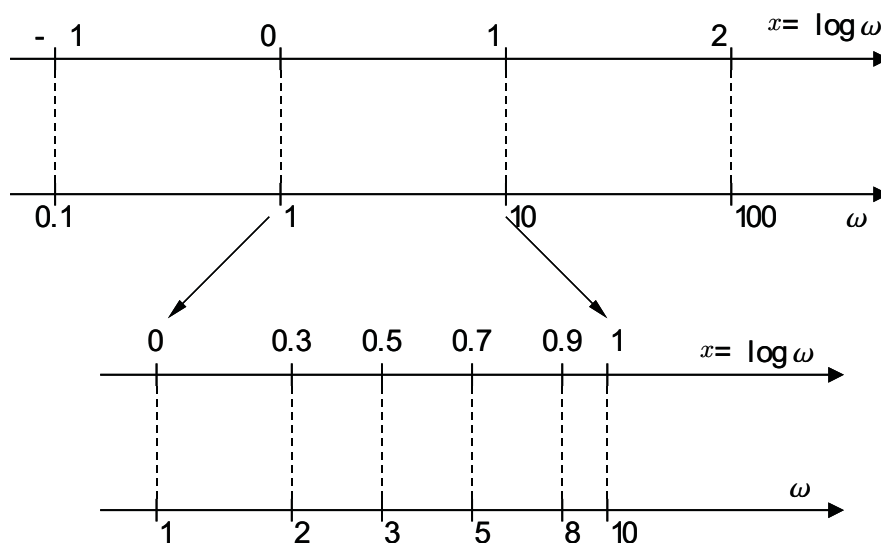


- Nel caso in cui il guadagno statico  $G(0)$  non si unitario, il picco di risonanza  $M_R$  è definito come il rapporto tra il valore massimo  $M_{max}$  e il guadagno statico  $M_0 = G(0)$ :

$$M_R = \frac{M_{max}}{M_0}$$

### Assi nei diagrammi di Bode

- I Diagrammi di Bode usano l'asse orizzontale in scala logaritmica. Considerando l'asse reale  $R$  e fissata una origine, una pulsazione  $\omega$  corrisponde ad un punto sull'asse con coordinata  $x = \log_{10} \omega$ . Accanto all'asse si possono quindi indicare o i valori della coordinata  $x$  oppure direttamente i valori di  $\omega$ ; questa seconda soluzione è la più comoda.



- Per il disegno qualitativo dei diagrammi conviene memorizzare alcuni valori:  
 $\log_{10} 2 \simeq 0.3$     $\log_{10} 3 \simeq 0.5$     $\log_{10} 5 \simeq 0.7$     $\log_{10} 8 \simeq 0.9$
- L'asse verticale nei diagrammi di ampiezza è graduato in decibel (db):

$$A|_{\text{db}} \stackrel{\text{def}}{=} 20 \log_{10} A$$

Con questa scala, le pendenze caratteristiche dei diagrammi di Bode sono  $\pm 20$  db/decade,  $\pm 40$  db/decade, ecc. Per comodità tali pendenze vengono indicate rispettivamente con i SIMBOLI  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ , ecc.

N.B.: se la scala verticale fosse semplicemente logaritmica ( $y = \log_{10} A$ ) le pendenze caratteristiche dei diagrammi di Bode sarebbero  $\pm 1$  e  $\pm 2$ .

- L'asse verticale nei diagrammi di fase può essere graduato sia in radianti sia in gradi. In ogni caso il diagramma delle fasi può essere traslato verso l'alto o verso il basso di multipli interi di  $2\pi$ , o di  $360^\circ$ , mantenendo inalterato il suo significato.

## Graficazione “qualitativa” dei diagrammi asintotici di Bode

### Primo metodo: somma dei singoli contributi

a) La funzione  $G(s)$  viene messa nella forma “a costanti di tempo”:

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)} \quad \rightarrow \quad G(s) = -\frac{10}{25} \frac{(1-s)}{s(1+s)(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})}$$

b) Si tracciano i diagrammi asintotici di Bode delle singole componenti:

$$K = -\frac{10}{25}, \quad G_1(s) = (1-s), \quad G_2(s) = \frac{1}{s}, \quad G_3(s) = \frac{1}{(1+s)}, \quad G_4(s) = \frac{1}{(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})}$$

c) Si sommano i contributi delle singole componenti.

Il contributo del termine  $K$  è costante:  $|K| = -7.96$  db e  $\arg K = -\pi$ .

Lo zero instabile  $(1-s)$  e il polo stabile  $(1+s)^{-1}$  agiscono alla pulsazione  $\omega = 1$  e forniscono due contributi uguali e contrari nel diagramma delle ampiezze. Il loro contributo nel diagramma delle fasi si somma: l'ampiezza complessiva per  $\omega \rightarrow \infty$  è  $-\pi$ .

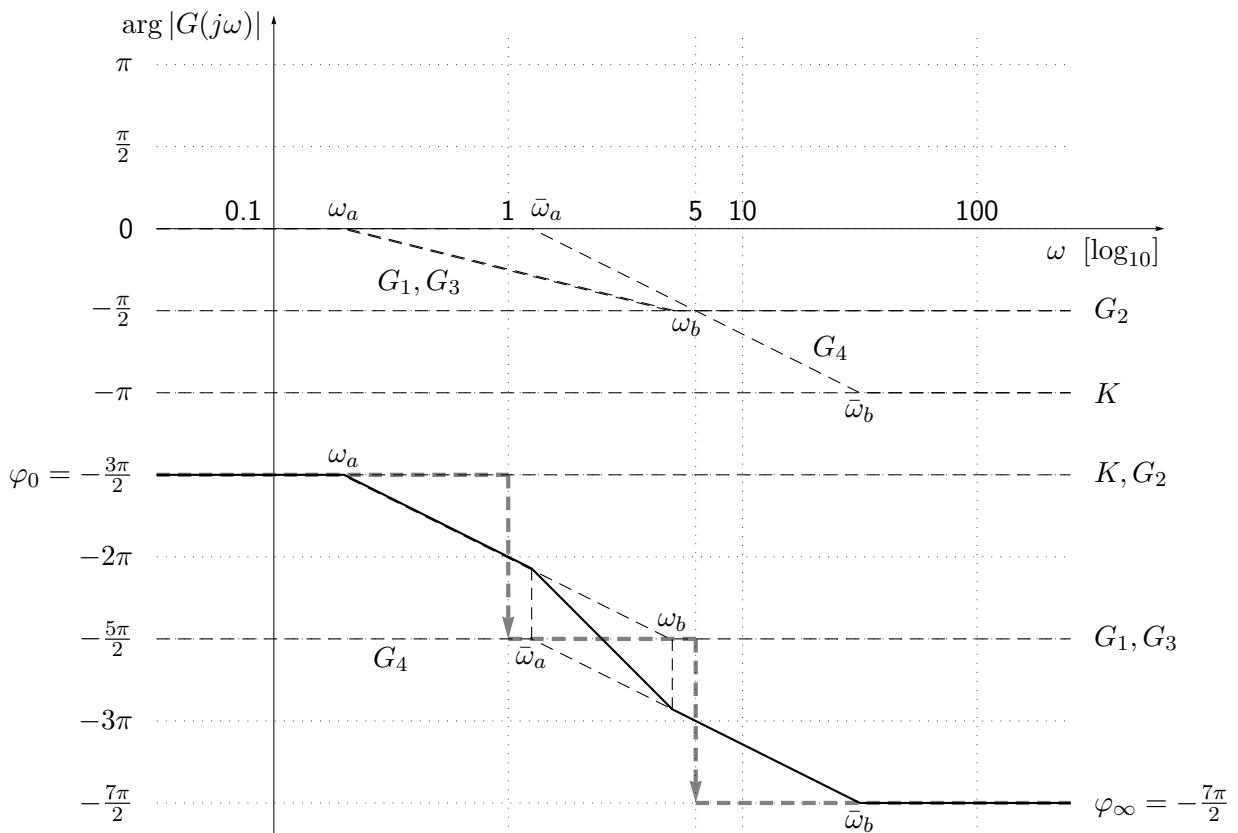
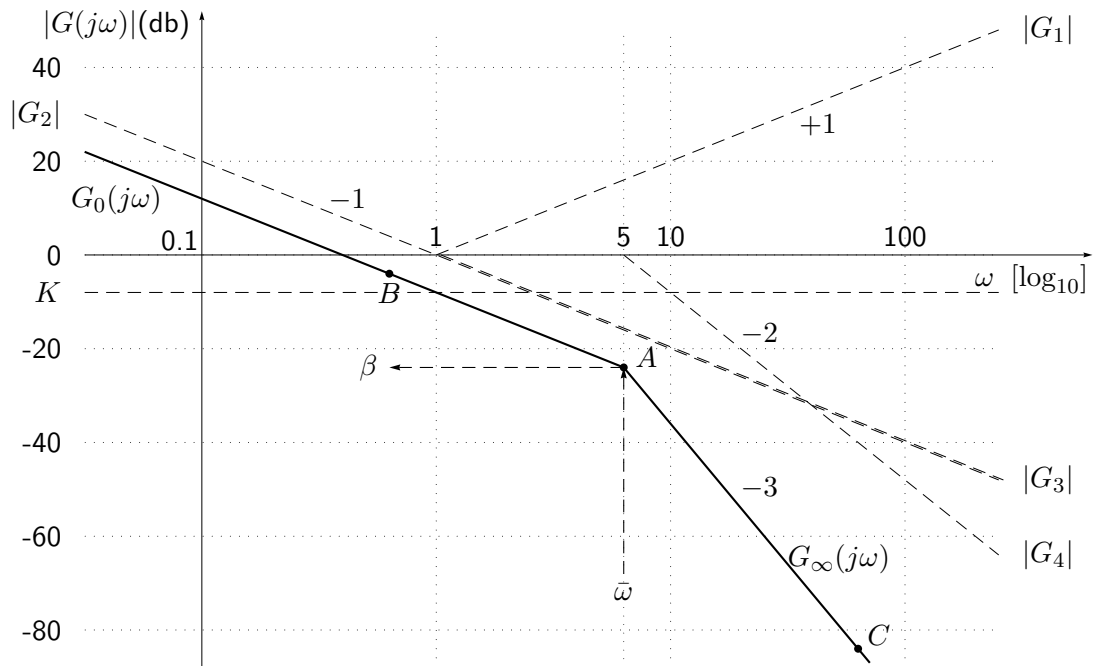
La coppia di poli complessi coniugati  $(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})^{-1}$  determina sul diagramma asintotico delle ampiezze una attenuazione di  $-40$  db/dec a partire dalla pulsazione  $\omega_n = 5$ . Il contributo al diagramma delle fasi è negativo di ampiezza complessiva  $-\pi$  al variare di  $\omega$ . Le pulsazioni alle quali si ha un cambiamento di pendenza del diagramma asintotico delle fasi sono le seguenti

$$\omega_a = \frac{1}{4.81}, \quad \omega_b = 4.81, \quad \bar{\omega}_a = \frac{\omega_n}{4.81^\delta}, \quad \bar{\omega}_b = \omega_n 4.81^\delta$$

dove  $\delta = 0.8$  è il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati.

La difficoltà nell'utilizzare questo metodo sta nel fatto che la somma dei singoli contributi non è sempre agevole.

Diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione  $G(s)$



## Funzioni approssimanti

- Nei diagrammi di Bode e di Nyquist il comportamento frequenziale di una generica funzione  $G(s)$  per  $s \rightarrow 0^+$  e per  $s \rightarrow \infty$  si può studiare facendo riferimento alle funzioni approssimanti  $G_0(s)$  e  $G_\infty(s)$ .

- Consideriamo, per esempio, la seguente funzione:

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)}$$

- La funzione approssimante  $G_0(s)$  si ottiene dalla  $G(s)$  per  $s \simeq 0$ , cioè trascurando tutti i termini in  $s$  ad esclusione dei poli o degli zeri nell'origine:

$$G_0(s) = \lim_{s \simeq 0} G(s) = \lim_{s \simeq 0} \frac{10(\cancel{s}-1)}{s(\cancel{s}+1)(\cancel{s}^2+8\cancel{s}+25)} = \frac{-10}{25s}$$

- In generale si ottiene una funzione del tipo  $G_0(s) = \frac{K_0}{s^h}$ , dove  $h$  è il numero di poli di  $G(s)$  nell'origine, cioè il "tipo" di sistema in oggetto.
- La funzione approssimante  $G_\infty(s)$  si ottiene dalla  $G(s)$  per  $s \simeq \infty$ , cioè considerando all'interno di ogni fattore della funzione  $G(s)$  solo il termine in  $s$  a grado più elevato:

$$G_\infty(s) = \lim_{s \simeq \infty} G(s) = \lim_{s \simeq \infty} \frac{10(s-\cancel{1})}{s(s+\cancel{1})(s^2+8\cancel{s}+25)} = \frac{10}{s^3}$$

- In generale si ottiene una funzione del tipo  $G_\infty(s) = \frac{K_p}{s^r}$ , dove  $r = n - m$  è il grado relativo della  $G(s)$ .
- Per le funzioni approssimanti  $G_0(s)$  e  $G_\infty(s)$  è immediato calcolare i moduli e le fasi delle corrispondenti funzioni di risposta armonica:

$$G_0(s) = \frac{-10}{25s} \quad \Rightarrow \quad G_0(j\omega) = \begin{cases} |G_0(j\omega)| = \frac{10}{25\omega} \\ \varphi_0 = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

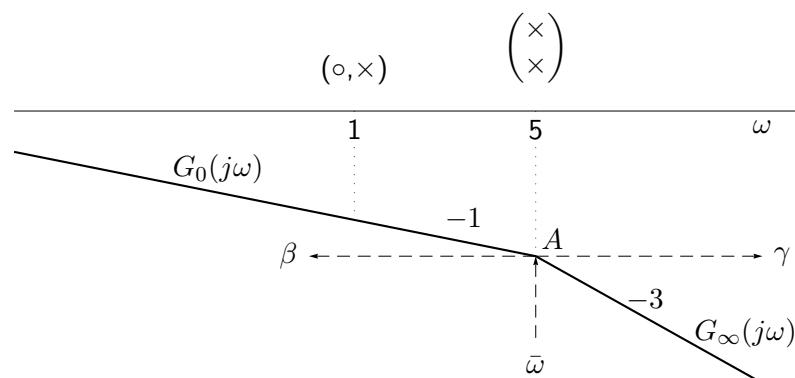
$$G_\infty(s) = \frac{10}{s^3} \quad \Rightarrow \quad G_\infty(j\omega) = \begin{cases} |G_\infty(j\omega)| = \frac{10}{\omega^3} \\ \varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

## Secondo metodo: graficazione “rapida”

### Diagramma delle ampiezze

- a) Si individua nella funzione  $G(s)$  tutte le pulsazioni in corrispondenza delle quali si ha un cambiamento di pendenza. Tali pulsazioni coincidono con gli zeri reali, i poli reali e le pulsazioni naturali  $\omega_n$  delle coppie di poli e zeri complessi coniugati della funzione  $G(s)$ . Nel caso in esame si ha  $\omega = 1$  e  $\omega = 5$ . Tali pulsazioni vengono ordinate in ordine crescente di modulo.
- b) Tenendo conto del fatto che gli zeri (reali o complessi coniugati) determinano un incremento di pendenza (rispettivamente di  $+1$  e di  $+2$ ) e che, viceversa, i poli (reali o complessi coniugati) determinano un decremento della pendenza (rispettivamente di  $-1$  e di  $-2$ ), risulta chiaro che la “forma” del diagramma asintotico è già nota a priori.

Nel caso in esame si ha:



In corrispondenza della pulsazione  $\omega = 1$  non si ha cambiamento di pendenza perchè in quel punto agisce sia un polo che uno zero.

- c) La posizione “verticale” del diagramma si determina nel seguente modo:
- 1) Se la funzione  $G(s)$  è di tipo 0, il posizionamento verticale è determinato dal calcolo del guadagno statico  $G(0)$ .
  - 2) Se il sistema è di tipo 1, o in generale di tipo  $h$ , il posizionamento verticale viene fatto calcolando l’esatta posizione di un qualsiasi punto  $A$  appartenente al diagramma asintotico a spezzata. Tale calcolo può essere fatto in modo agevole utilizzando le funzioni approssimanti  $G_0(s)$  e  $G_\infty(s)$ .

Per calcolare la coordinata  $\beta$  del punto  $A$  di ascissa  $\bar{\omega} = 5$  è infatti possibile utilizzare la funzione approssimante  $G_0(s)$ :

$$\beta = |G_0(s)|_{s=j\bar{\omega}} = \left| \frac{-10}{25s} \right|_{s=j5} = \frac{2}{25} = -21.94 \text{ db.}$$

In questo caso è possibile utilizzare anche la funzione approssimante  $G_\infty(s)$ :

$$\gamma = |G_\infty(s)|_{s=j\bar{\omega}} = \left| \frac{10}{s^3} \right|_{s=j5} = \frac{2}{25} = -21.94 \text{ db.}$$

d) È ora possibile tracciare il diagramma asintotico complessivo tracciando, a partire dal punto  $A$ , i vari tratti della “spezzata”, ognuno con la propria pendenza.

Nel caso in esame, per esempio, il tratto di spezzata che precede il punto  $A$  si determina individuando il punto  $B$ . Questo punto si calcola a partire da  $A$  diminuendo la pulsazione di una decade ed aumentando di 20 db l'ampiezza:  $B = (0.5, \beta + 20)$ .

Allo stesso modo si procede per determinare la pendenza del tratto che segue il punto  $A$ . In questo caso la pendenza è -3 e quindi il punto  $C$  si determina aumentando la pulsazione di una decade e diminuendo l'ampiezza di 60 db:  $C = (50, \beta - 60)$ .

## Diagramma delle fasi

Anche la graficazione del diagramma asintotico delle fasi può essere fatta “rapidamente” se si procede nel modo seguente.

1) Si individua la fase di partenza  $\varphi_0$  del diagramma asintotico calcolando la fase iniziale della funzione approssimante  $G_0(s)$ :

$$\varphi_0 = \arg G_0(j\omega) = \arg \left( \frac{-10}{25s} \right)_{s=j\omega} = -\frac{3\pi}{2}.$$

La fase iniziale  $\varphi_0$  è comprensiva del segno negativo della costante  $K$  e della fase costante  $-\frac{\pi}{2}$  introdotta dal polo nell'origine.



2) A partire da  $\varphi_0$  si costruisce un diagramma a gradoni i cui punti di discontinuità coincidono con le pulsazioni critiche  $\omega_c$  di tutti i poli e zeri della funzione  $G(s)$ . L'ampiezza di ciascuna discontinuità è pari alla variazione di fase  $\Delta\varphi_i$  introdotta dal termine dinamico che ha generato la discontinuità.

Le variazioni di fase  $\Delta\varphi_i$  sono sempre un multiplo di  $\frac{\pi}{2}$  e possono essere sia positive che negative in funzione del fatto che il termine dinamico considerato sia un polo, uno zero, sia stabile o instabile.

Nel caso in esame i primi due termini da prendere in considerazione sono il polo stabile  $(s+1)^{-1}$  e lo zero instabile  $(s-1)$  alla pulsazione  $\omega=1$ . Ciascuno di essi introduce uno sfasamento pari a  $-\frac{\pi}{2}$  per cui il loro contributo complessivo è  $-\pi$  che va disegnata verso il basso a partire dalla fase iniziale  $\varphi = -\frac{3\pi}{2}$ .

I due poli complessi coniugati stabili  $(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})^{-1}$  introducono uno sfasamento di ampiezza  $-\pi$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega_n=5$ . Il loro contributo va disegnato verso il basso nella fascia  $[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}]$ .

3) Il diagramma asintotico delle fasi si ottiene infine dal *diagramma a gradoni* sostituendo ad ogni discontinuità l'interpolazione asintotica specifica dell'elemento dinamico che agisce in quel punto  $\bar{\omega}$ : a) nel caso di poli o zeri reali si utilizzano i valori  $\omega_a = \bar{\omega}/4.81$  e  $\omega_b = 4.81\bar{\omega}$ ; b) nel caso di poli o zeri complessi coniugati si utilizzano i valori  $\omega_a = \bar{\omega}/4.81^\delta$  e  $\omega_b = 4.81^\delta \bar{\omega}$ .

