

Contorno delle radici: esempi

Si faccia riferimento all'equazione differenziale che descrive il comportamento dinamico di un sistema "massa, molla, smorzatore":

$$M \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + K x(t) = F(s)$$

La corrispondente funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M s^2 + b s + K}$$

Il comportamento dinamico del sistema dipende dalla posizione dei poli e quindi dal valore dei parametri M , b e K .

Analisi parametrica al variare del parametro b . L'equazione che descrive la dinamica del sistema:

$$M s^2 + b s + K = 0$$

può essere riscritta mettendo in evidenza il parametro b :

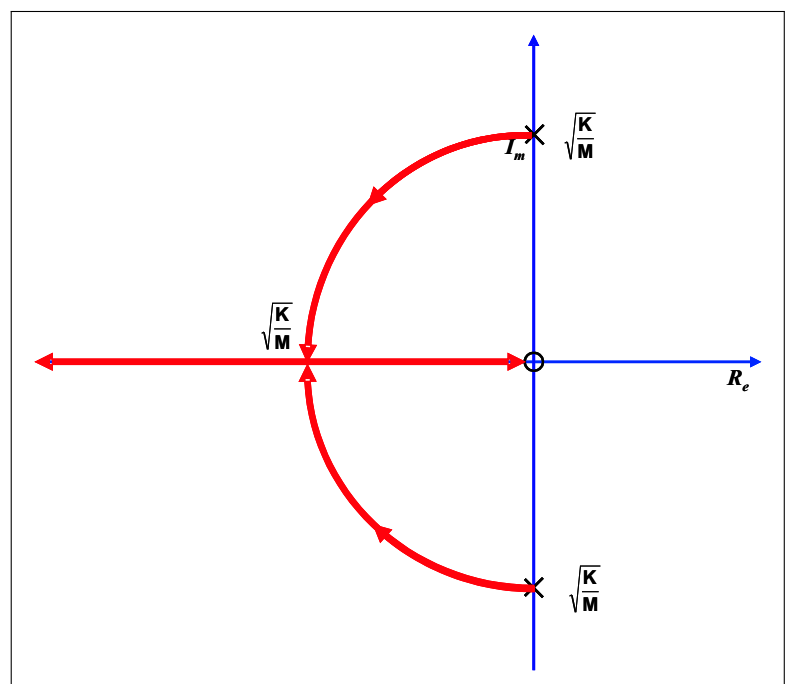
$$1 + \frac{b s}{M s^2 + K} = 0$$

Il corrispondente luogo delle radici al variare di $b > 0$ mostra che la condizione di minimo tempo di assestamento si ha in corrispondenza del punto di diramazione in

$$\sigma_a = -\sqrt{\frac{K}{M}}$$

Il corrispondente valore "ottimale" di b è:

$$b^* = -\left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=\sigma_a} = 2 \sqrt{K M}$$



Analisi parametrica al variare del parametro M . L'equazione che descrive la dinamica del sistema può essere riscritta mettendo in evidenza il parametro M :

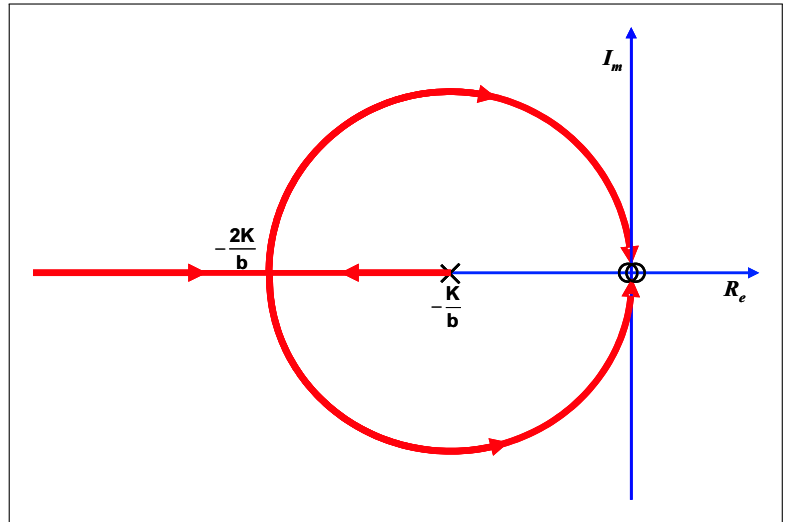
$$1 + \frac{M s^2}{b s + K} = 0$$

Il corrispondente luogo delle radici al variare di $M > 0$ mostra che la condizione di minimo tempo di assestamento si ha in corrispondenza del punto di diramazione in

$$\sigma_d = -\frac{2K}{b}$$

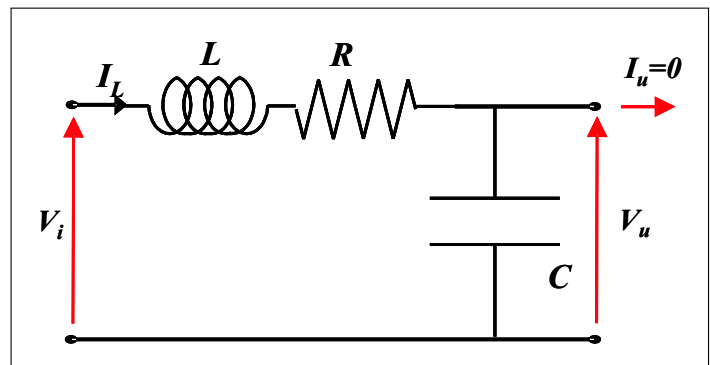
Il corrispondente valore "ottimale" di M è:

$$M^* = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=\sigma_d} = \frac{b^2}{4K}$$



Sistema elettrico R, L, C .

La funzione di trasferimento del sistema fisico riportato di fianco si ricava agevolmente utilizzando la formula del partitore di tensione applicato alle impedenze complesse:



$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{\frac{1}{C}}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$

A meno del guadagno $\frac{1}{C}$, l'analisi parametrica di questo sistema può essere ricondotta a quella del sistema meccanico illustrato sopra utilizzando la seguente analogia:

$$L \leftrightarrow M, \quad R \leftrightarrow b, \quad C \leftrightarrow \frac{1}{K}$$