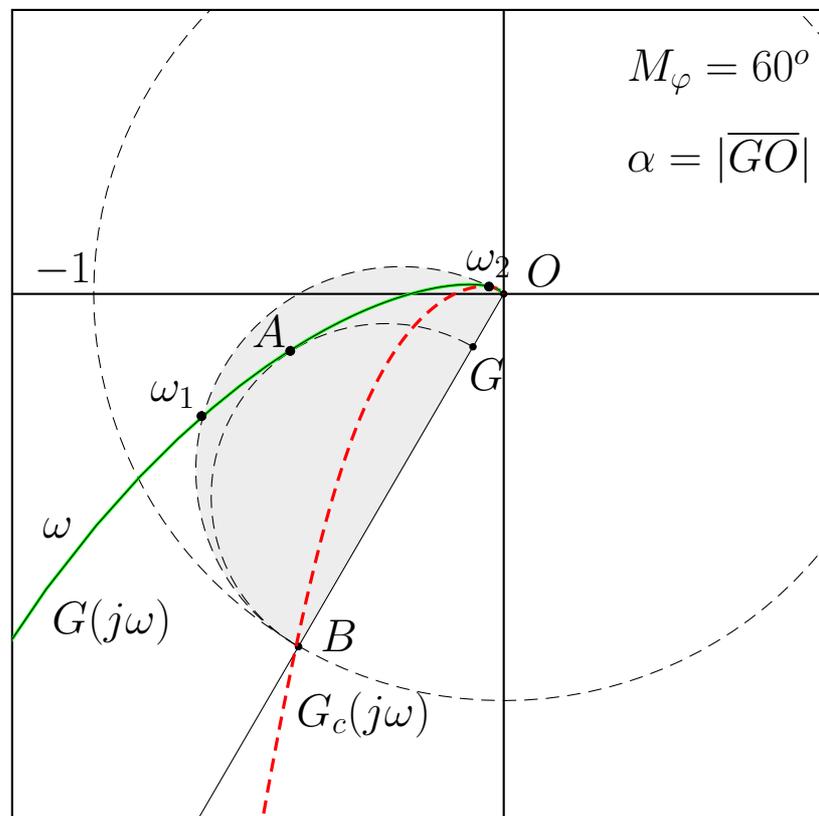


## Sintesi sul piano di Nyquist

a) Sintesi di una rete anticipatrice. Specifica: margine di fase  $M_\varphi = 60^\circ$ .



- Sistema  $G(s)$  e rete correttrice  $C(s)$ :

$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+0.806s)}{(1+0.117s)}$$

- Per portare il punto  $A$

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A}, \quad \rightarrow \quad M_A = 0.538 \quad \varphi_A = 194.9^\circ$$

nel punto  $B$

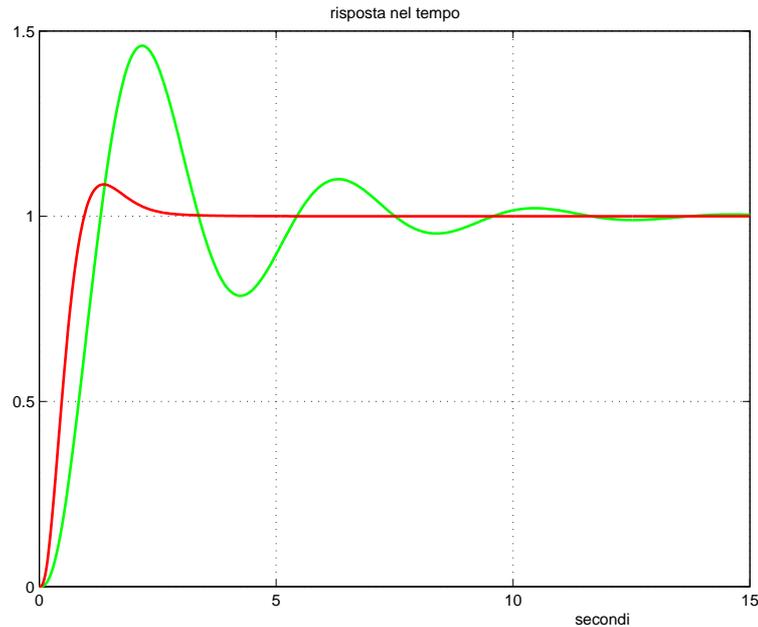
$$B = e^{j(\pi+M_\varphi)} \quad \rightarrow \quad M_B = 1, \quad \varphi_B = \pi + M_\varphi = 240^\circ$$

la rete anticipatrice deve amplificare e anticipare di

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{0.538} = 1.8587, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 45.1^\circ$$

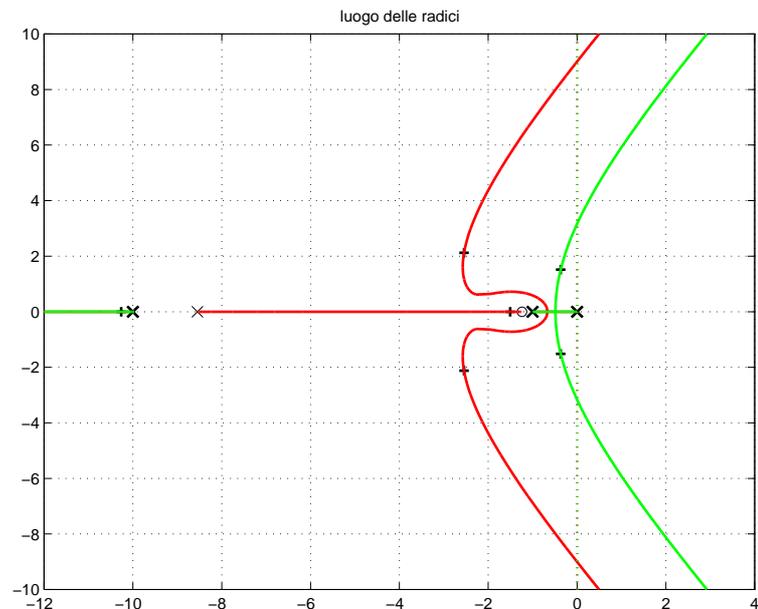
- Sostituendo i parametri  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega_A = 2.02$  nelle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri cercati:  $\tau_1 = 0.806$  e  $\tau_2 = 0.117$ .

- Risposte temporali dei sistemi  $G(s)$  e  $C(s)G(s)$  retroazionati:



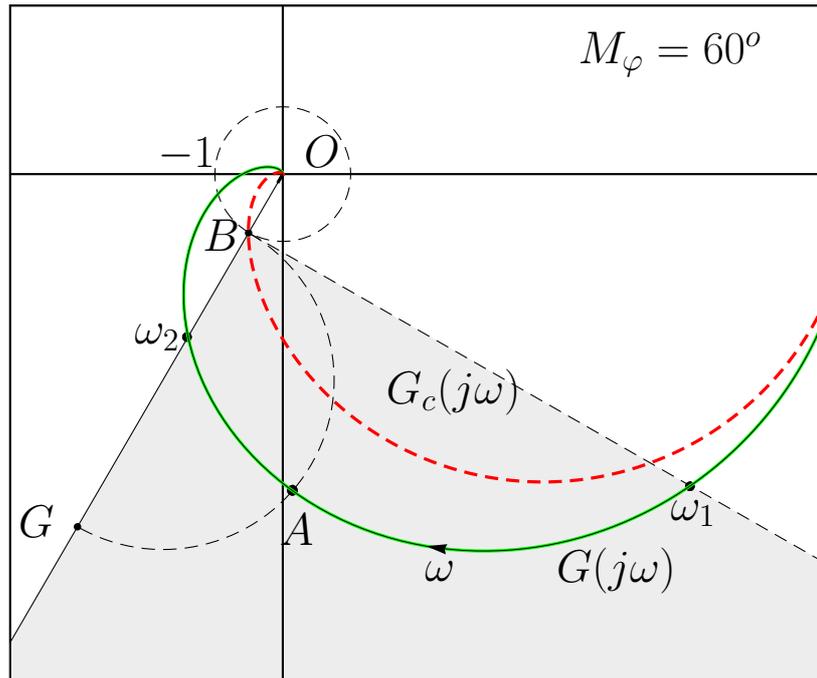
L'utilizzo di una rete anticipatrice ha migliorato sia il transitorio (diminuendo la sovravelongazione) che la prontezza del sistema (il tempo di salita è più basso).

- Il luogo delle radici dei due sistemi retroazionati:



La presenza della rete anticipatrice ha sensibilmente spostato verso il semipiano negativo i poli dominanti del sistema retroazionato.

b) Sintesi di una rete ritardatrice. Specifica: margine di fase:  $M_\varphi = 60^\circ$ .



- Sistema  $G(s)$  e rete corretttrice  $C(s)$ :

$$G(s) = \frac{5000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+30)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+1.04s)}{(1+6.25s)}$$

- Per portare il punto  $A$

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A}, \quad \rightarrow \quad M_A = 4.672, \quad \varphi_A = 271.82^\circ$$

nel punto  $B$

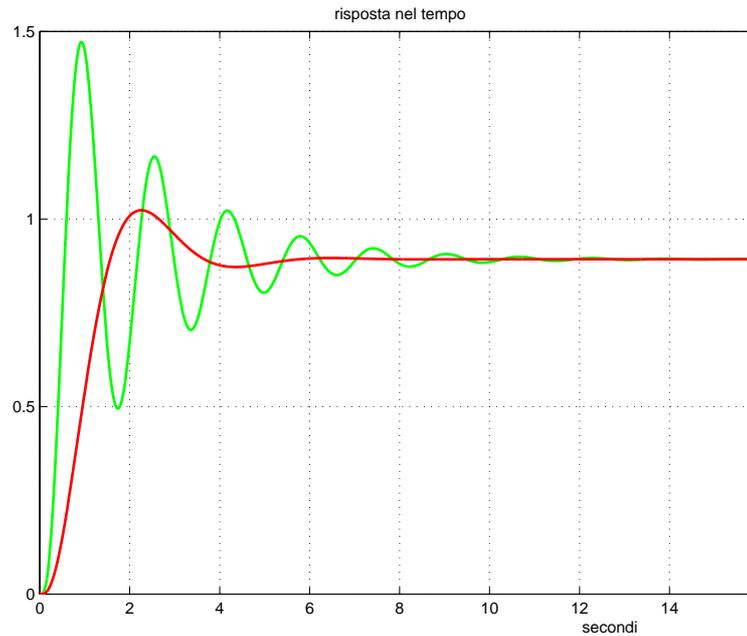
$$B = e^{j(\pi+M_\varphi)} \quad \rightarrow \quad M_B = 1, \quad \varphi_B = \pi + M_\varphi = 240^\circ$$

la rete corretttrice deve attenuare e ritardare di

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{4.672} = 0.214, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -31.82^\circ$$

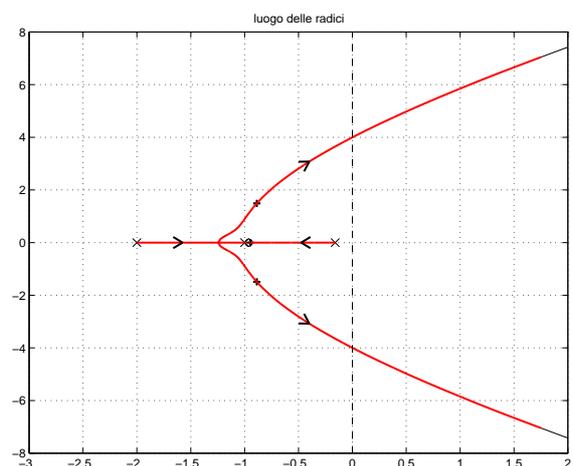
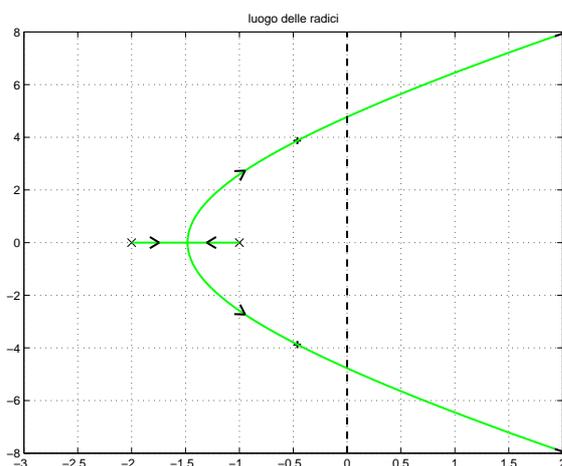
- Sostituendo i parametri  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega_A = 1.16$  nelle formule di inversione si ottengono i seguenti valori dei parametri cercati:  $\tau_1 = 1.04$  e  $\tau_2 = 6.25$ .

- Risposte temporali dei sistemi  $G(s)$  e  $C(s)G(s)$  retroazionati:



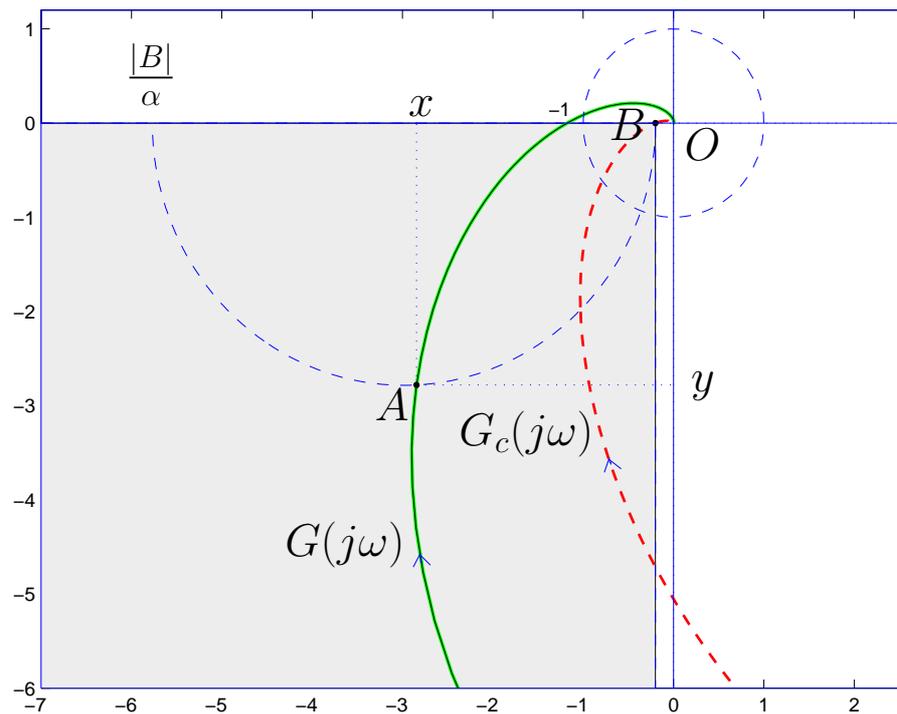
L'utilizzo di una rete ritardatrice ha migliorato il transitorio diminuendo la sovralongazione, però ha reso il sistema meno pronto (tempo di salita più elevato).

- Il luogo delle radici dei due sistemi retroazionati:



La presenza della rete corretttrice ha spostato verso il semipiano negativo i poli dominanti del sistema retroazionato aumentando contemporaneamente il coefficiente di smorzamento  $\delta$ .

c) Sintesi di una rete ritardatrice. Specifica: margine di ampiezza  $M_\alpha = 5$ .



- Sistema  $G(s)$  e rete corretttrice  $C(s)$ :

$$G(s) = \frac{10000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+30)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+0.396s)}{(1+11.42s)}$$

- Per portare il punto  $A$

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A} \quad \rightarrow \quad M_A = 3.978, \quad \varphi_A = 224.4^\circ$$

nel punto  $B$

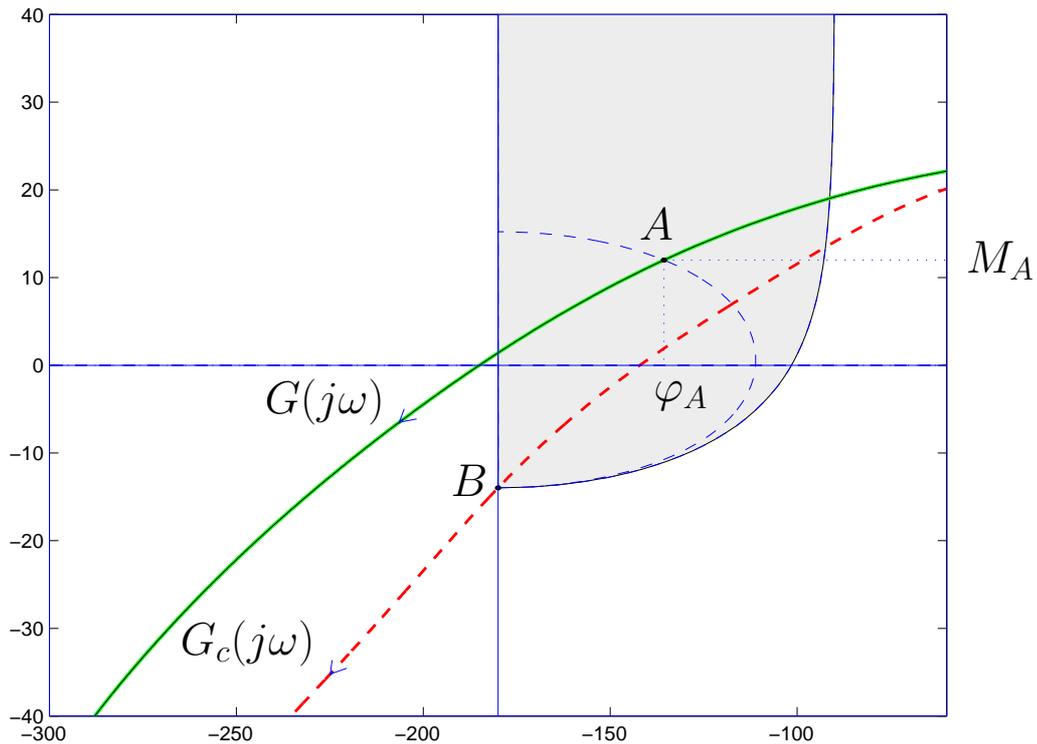
$$B = -\frac{1}{M_\alpha} \quad \rightarrow \quad M_B = \frac{1}{M_\alpha} = \frac{1}{5}, \quad \varphi_B = -\pi$$

la rete corretttrice deve attenuare e ritardare di

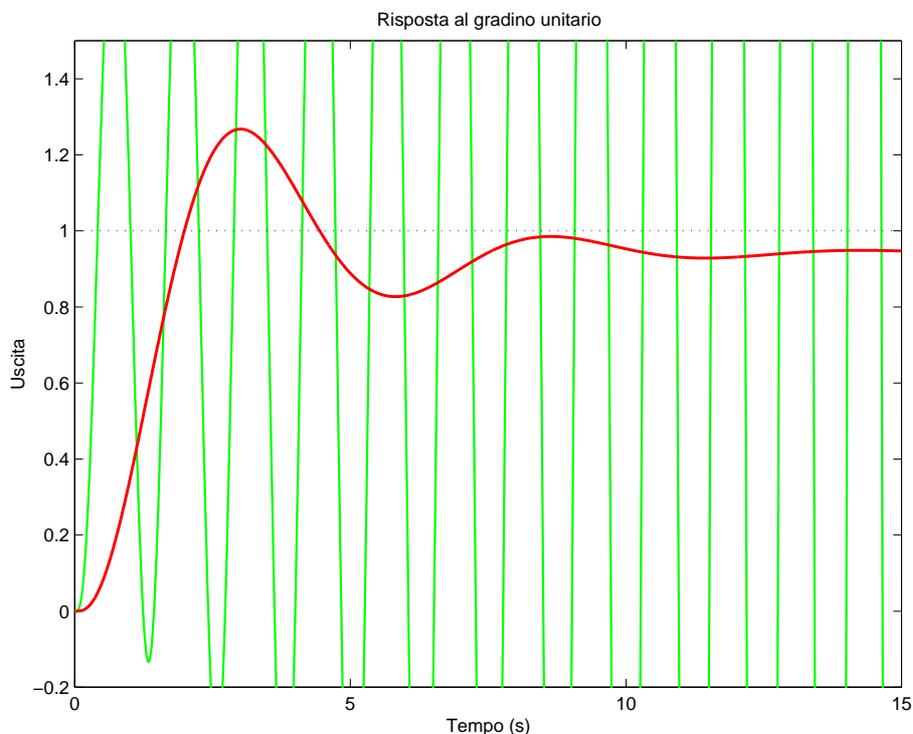
$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{M_A M_\alpha} = 0.0503, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -44.4^\circ$$

- Sostituendo i parametri  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega_A = 2.4$  nelle formule di inversione si ottengono i seguenti valori dei parametri cercati:  $\tau_1 = 0.396$  e  $\tau_2 = 11.42$ .

- La sintesi della stessa rete corretttrice poteva essere fatto anche sul piano di Nichols:

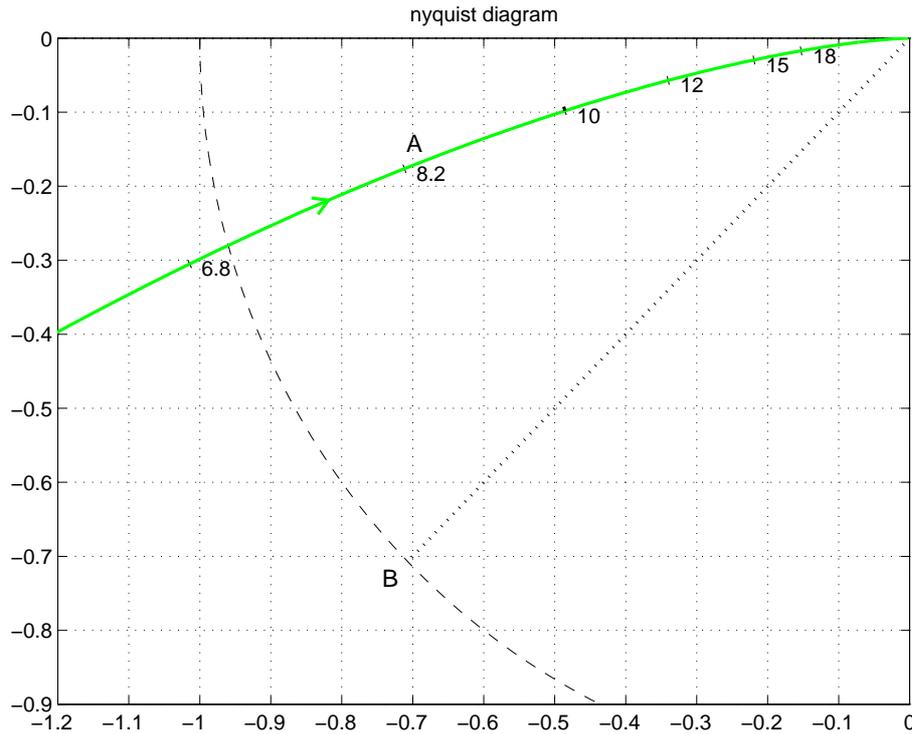


- Le risposte al gradino unitario del sistema retroazionato **senza** e **con** rete corretttrice sono le seguenti:



- Il sistema retroazionato, inizialmente instabile, viene stabilizzato utilizzando la rete corretttrice.

- *Esempio.* Si consideri il seguente diagramma di Nyquist.



Calcolare i parametri  $\tau_1$  e  $\tau_2$  di una rete anticipatrice ( $\tau_1 > \tau_2$ )

$$T(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da portare il punto  $A$  in  $B$ , cioè in modo da imporre al sistema retroazionato il margine di fase  $M_\varphi = 45^\circ$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 8.2$ .

- L'ampiezza  $M_A$  e la fase  $\varphi_A$  del punto  $A$  si ottengono dal diagramma polare della funzione di risposta armonica  $G(j\omega) = M_A e^{j\varphi_A}$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 8.2$ :

$$M_A \simeq \sqrt{0.71^2 + 0.176^2} = 0.73$$

$$\varphi_A \simeq \arctan \frac{0.176}{0.71} - 180 = 14 - 180 = -166^\circ = 194^\circ$$

- Il guadagno  $M$  e l'anticipo  $\varphi$  che la rete anticipatrice deve introdurre alla pulsazione  $\omega = 8.2$  per portare il punto  $A$  in  $B$  sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{0.73} = 1.37 \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 225^\circ - 194^\circ = 31^\circ$$

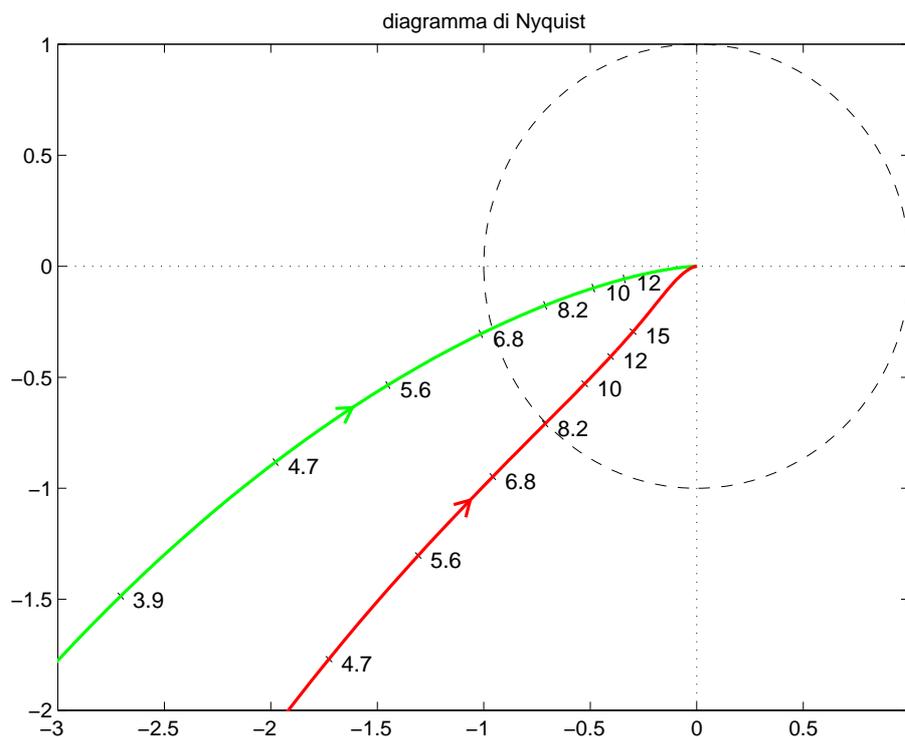
- Sostituendo questi valori nelle formule di inversione si ricava

$$\tau_1 = \frac{1.37 - \cos 31^\circ}{8.2 \sin 31^\circ} = 0.1214, \quad \tau_2 = \frac{\cos 31^\circ - \frac{1}{1.37}}{8.2 \sin 31^\circ} = 0.0301$$

per cui la rete anticipatrice cercata è

$$T(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{1 + 0.1214s}{1 + 0.0301s}$$

- L'andamento del diagramma di Nyquist del sistema originario  $G(s)$  e del sistema compensato  $T(s)G(s)$ .

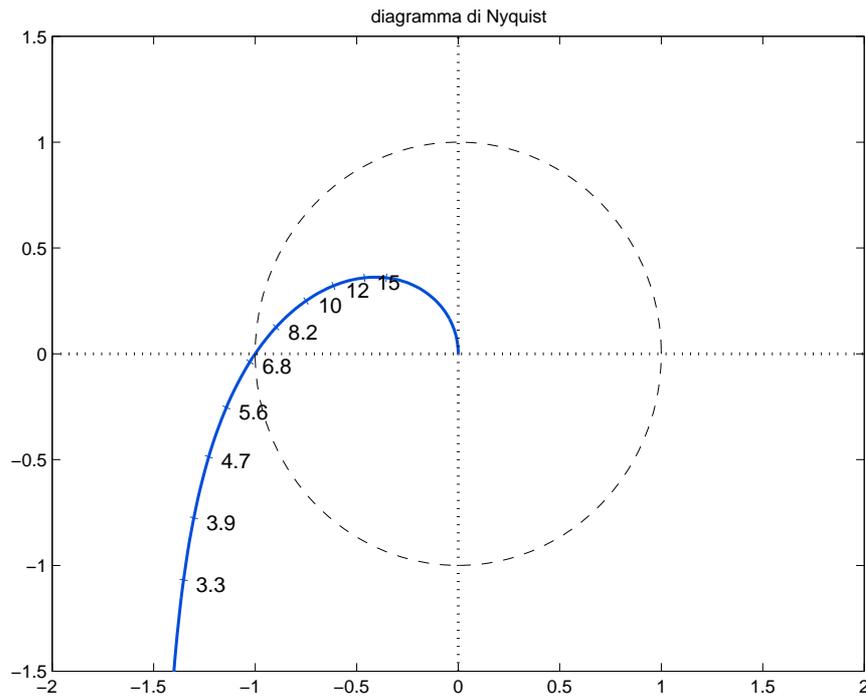


## Progetto di reti ritardatrici: esempi.

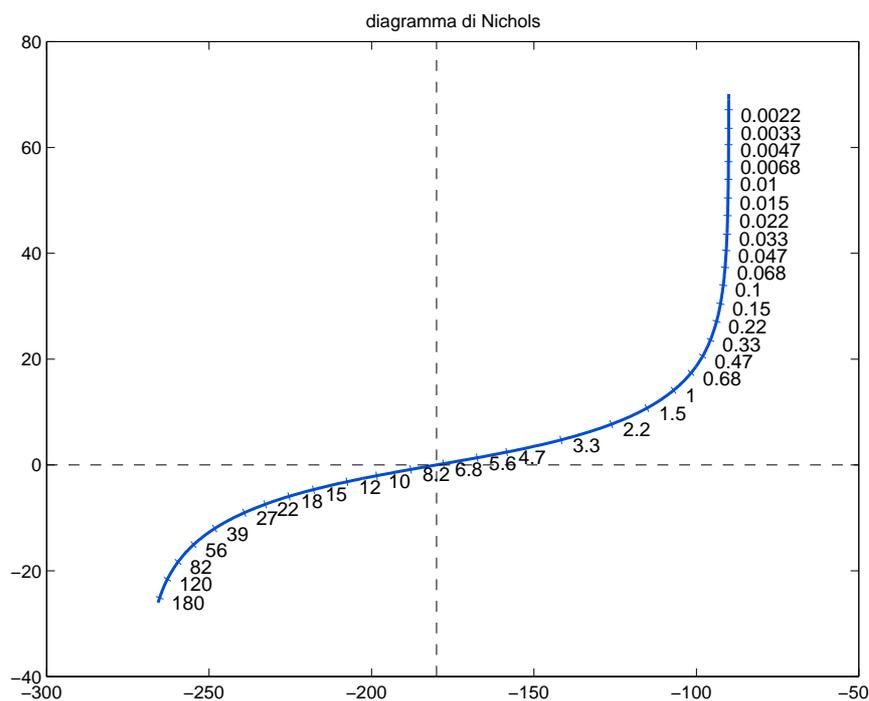
- Consideriamo la funzione di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{10(5 - s)}{s(s + 10)}$$

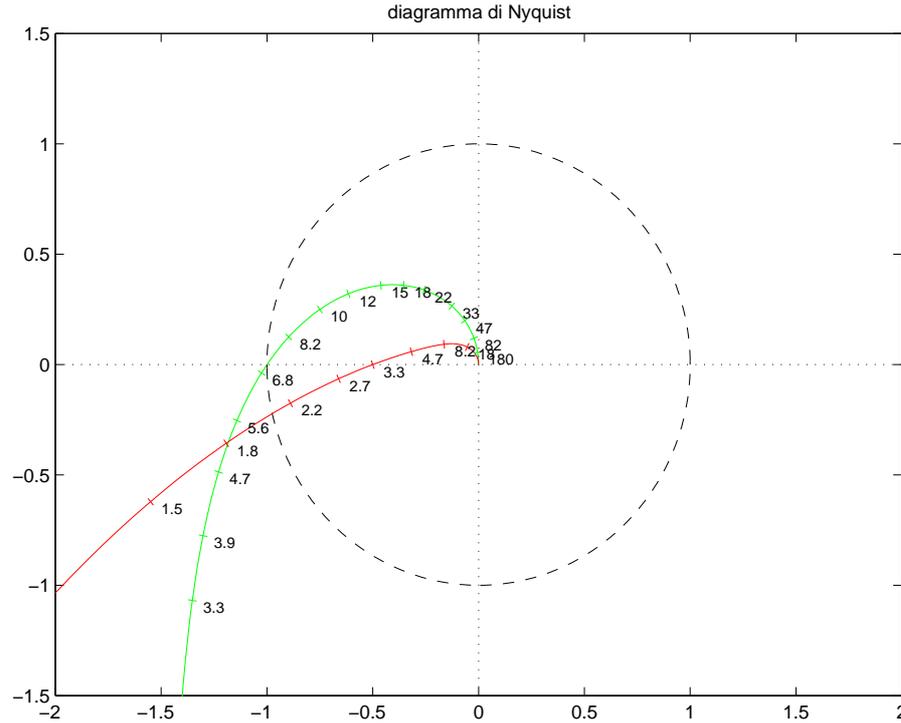
- Diagramma di Nyquist:



- Diagramma di Nichols:



- Progetto con specifica sul margine di ampiezza (piano di Nyquist):



- Determinazione del punto  $B$ :

$$M_a = 2 \quad \rightarrow \quad B : M_B = \frac{1}{M_a} = 0.5 \quad \varphi_B = -180^\circ$$

- Rete ritardatrice: scelta del punto  $A$ :

$$\omega = 3.3 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -1.353 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = -1.069$$

$$M_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 1.724 = 4.731 \text{db}$$

$$\varphi_A = \operatorname{atan2} \left( \frac{y_A}{x_A} \right) = -141.7^\circ$$

- La rete ritardatrice che “porta” il punto  $A$  nel punto  $B$  richiesto è caratterizzata quindi da:

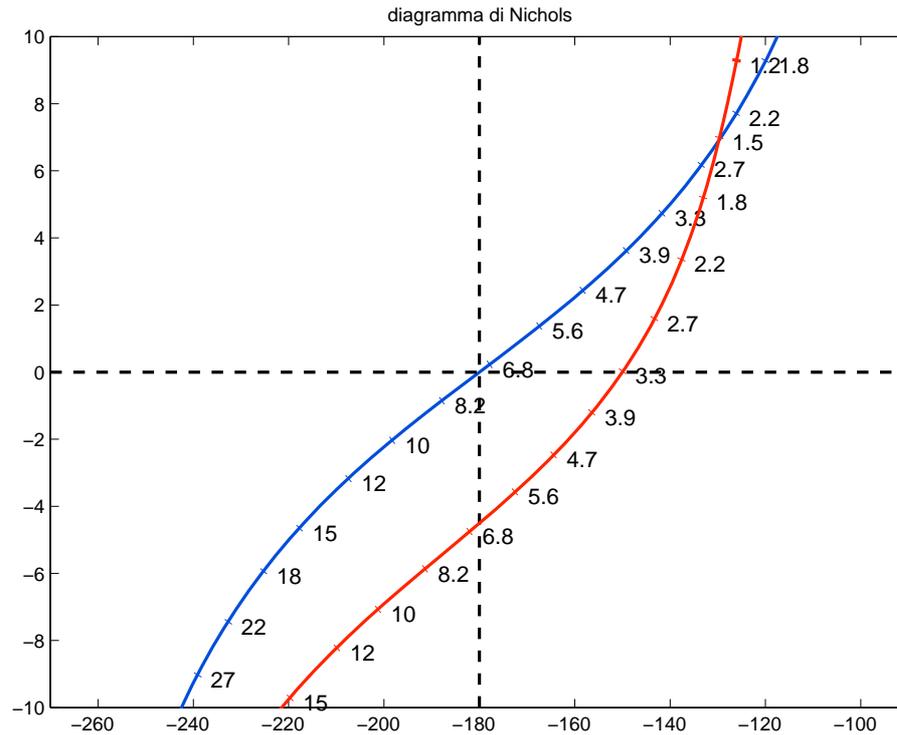
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.29$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -38.3^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.2418$$

$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 1.3022$$

- Progetto con specifica sul margine di fase (piano di Nichols):



- Determinazione del punto  $B$ :

$$M_f = 30^\circ \quad \rightarrow \quad B : M_B = 1 \quad \varphi_B = -150^\circ$$

- Rete ritardatrice: scelta del punto  $A$ :

$$\omega = 3.3 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -1.353 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = -1.069$$

$$M_A = 4.731 \text{db} = 1.724$$

$$\varphi_A = -141.7^\circ$$

- La rete ritardatrice che “porta” il punto  $A$  nel punto  $B$  richiesto è caratterizzata quindi da:

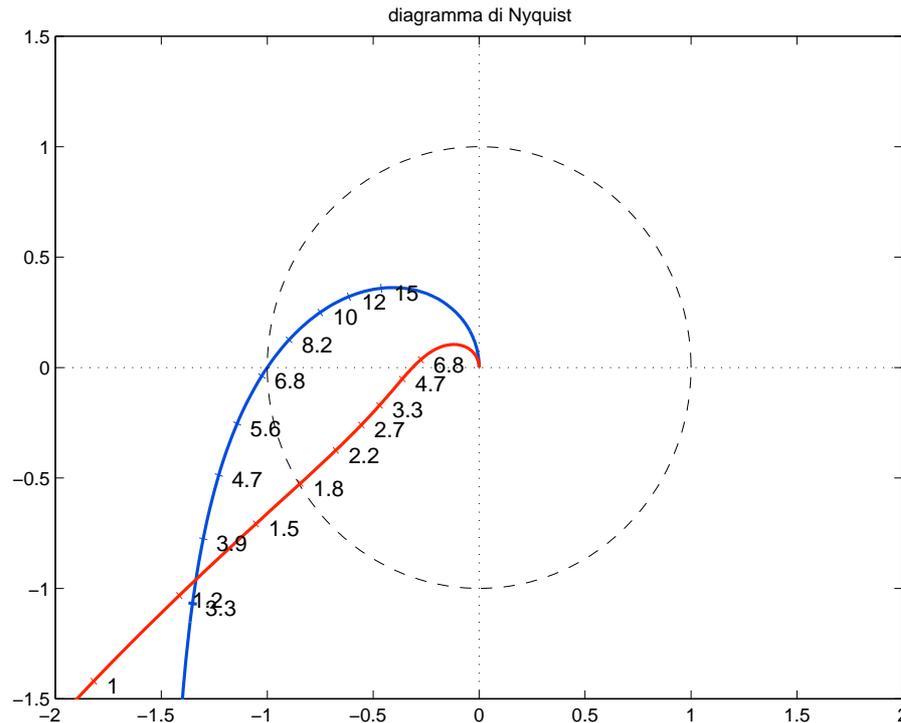
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.58$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -8.31^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.8585$$

$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 1.5404$$

- Progetto con specifica “mista” (piano di Nyquist):



- Determinazione del punto  $B$ :

$$B : M_B = 0.5 \quad \varphi_B = -160^\circ$$

- Rete ritardatrice: scelta del punto  $A$ :

$$\omega = 3.3 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -1.353 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = -1.069$$

$$M_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 1.724 = 4.731 \text{db}$$

$$\varphi_A = \operatorname{atan2} \left( \frac{y_A}{x_A} \right) = -141.7^\circ$$

- La rete ritardatrice che “porta” il punto  $A$  nel punto  $B$  richiesto è caratterizzata quindi da:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.29$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -18.3^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.636$$

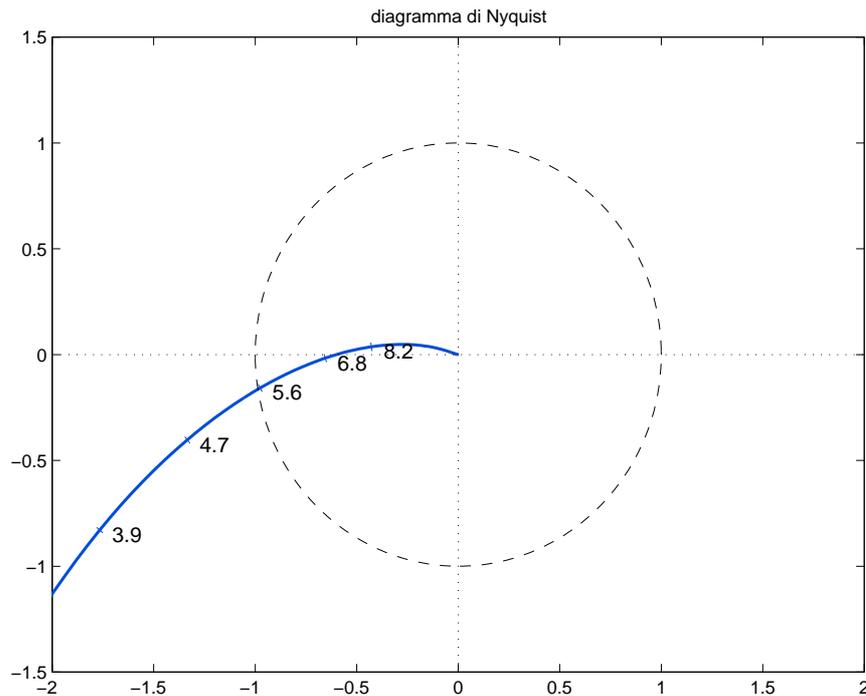
$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 2.41$$

## Progetto di reti anticipatrici: esempi.

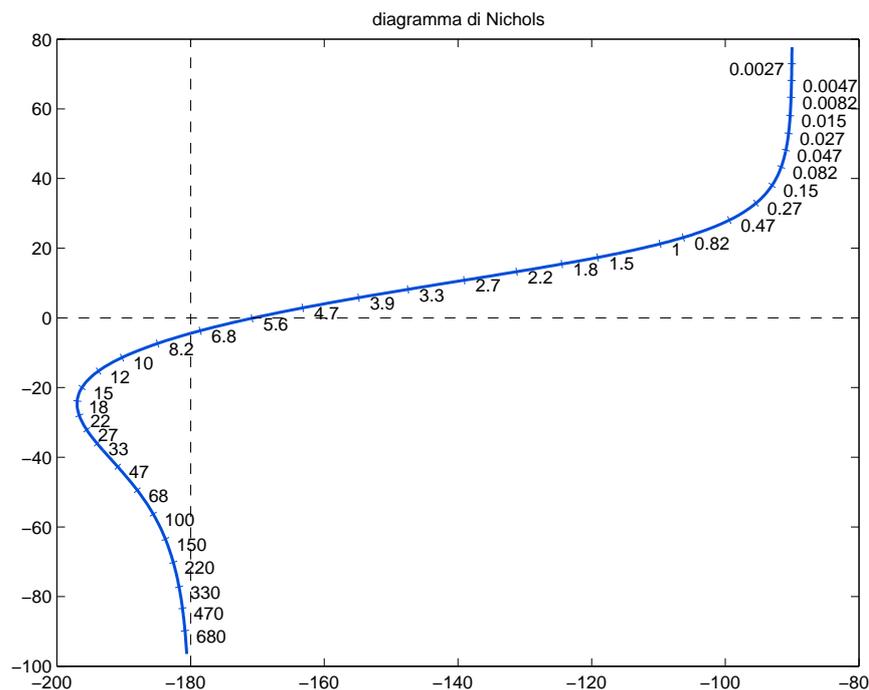
- Consideriamo la funzione di trasferimento:

$$G_2(s) = \frac{15(s + 20)}{s(s + 5)^2}$$

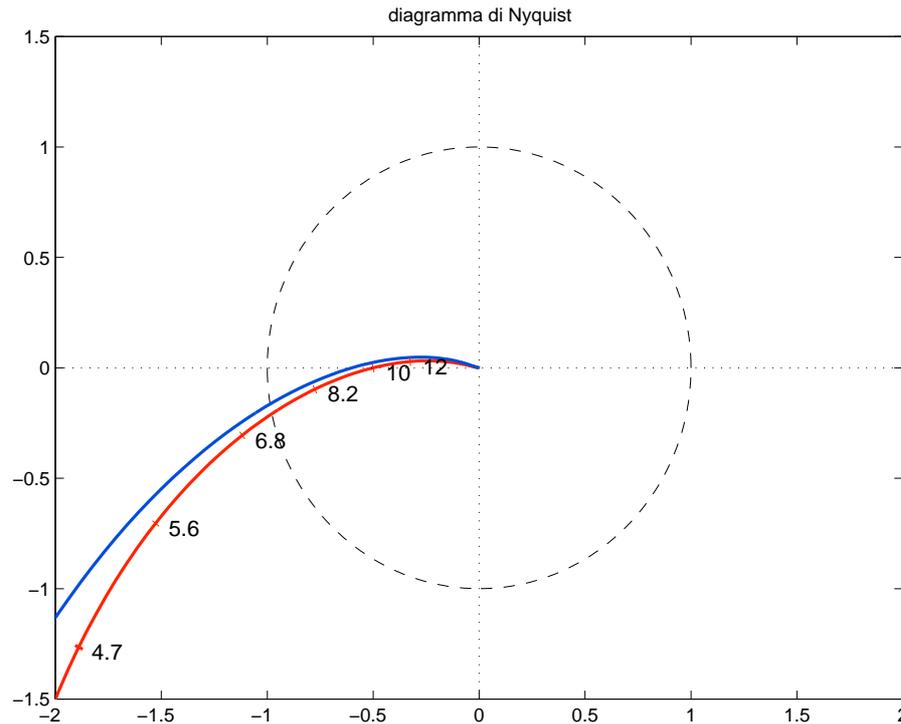
- Diagramma di Nyquist:



- Diagramma di Nichols:



- Progetto con specifica sul margine di ampiezza (piano di Nyquist):



- Determinazione del punto  $B$ :

$$M_a = 2 \quad \rightarrow \quad B : M_B = \frac{1}{M_a} = 0.5 \quad \varphi_B = -180^\circ$$

- Rete anticipatrice: scelta del punto  $A$ :

$$\omega = 10 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -0.264 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = 0.048$$

$$M_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 0.2683 = -11.43\text{db}$$

$$\varphi_A = \operatorname{atan2}\left(\frac{y_A}{x_A}\right) = 169.7^\circ$$

- La rete anticipatrice che “porta” il punto  $A$  nel punto  $B$  richiesto è caratterizzata quindi da:

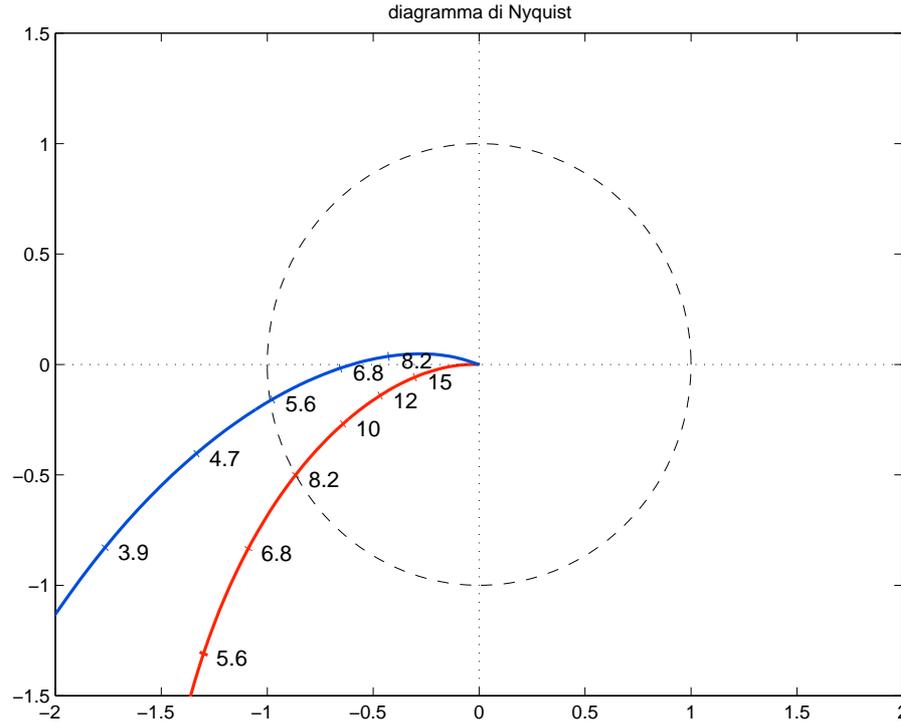
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 1.8634$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = 10.3^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.4917$$

$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 0.25$$

- Progetto con specifica sul margine di fase (piano di Nyquist):



- Determinazione del punto  $B$ :

$$M_f = 30^\circ \quad \rightarrow \quad B : M_B = 1 \quad \varphi_B = 210^\circ$$

- Rete anticipatrice: scelta del punto  $A$ :

$$\omega = 8.2 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -0.4271 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = 0.037$$

$$M_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 0.4287 = -7.357 \text{db}$$

$$\varphi_A = \operatorname{atan2} \left( \frac{y_A}{x_A} \right) = 175^\circ$$

- La rete anticipatrice che “porta” il punto  $A$  nel punto  $B$  richiesto è caratterizzata quindi da:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.332$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = 35^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.3217$$

$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 0.083$$