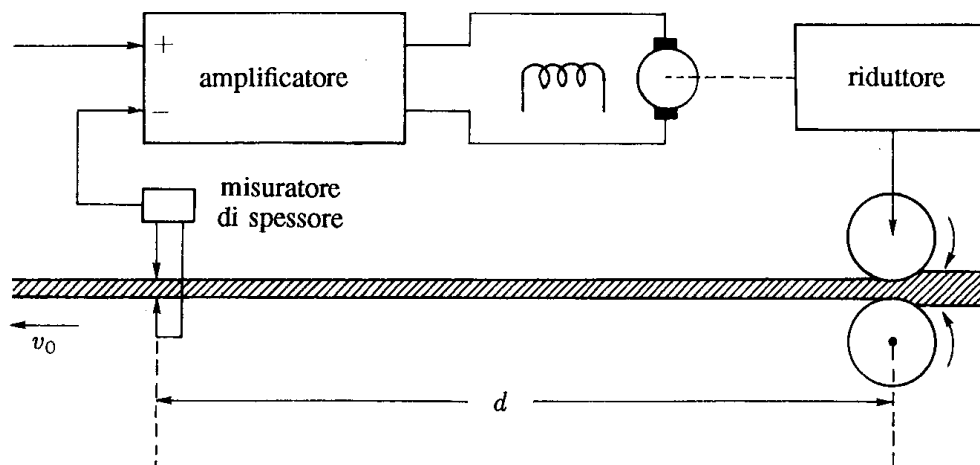


Sistemi con ritardi finiti

Nell'enunciato del criterio di Nyquist si è fatto implicitamente riferimento a sistemi aventi la funzione di guadagno di anello $F(s)$ razionale fratta. Questi sistemi sono caratterizzati dal fatto che l'uscita o una sua derivata rispondono immediatamente all'applicazione dell'ingresso.

In molti sistemi di controllo, con trasmissioni pneumatiche, idrauliche o meccaniche si possono presentare ritardi finiti: l'uscita e le sue derivate rispondono dopo un tempo finito dall'applicazione dell'ingresso. Esempio di sistema per la regolazione dello spessore di un laminato:



Un modello matematico spesso accettabile per la rappresentazione di tali sistemi è dato dalla funzione di trasferimento trascendente

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} e^{-t_0 s}$$

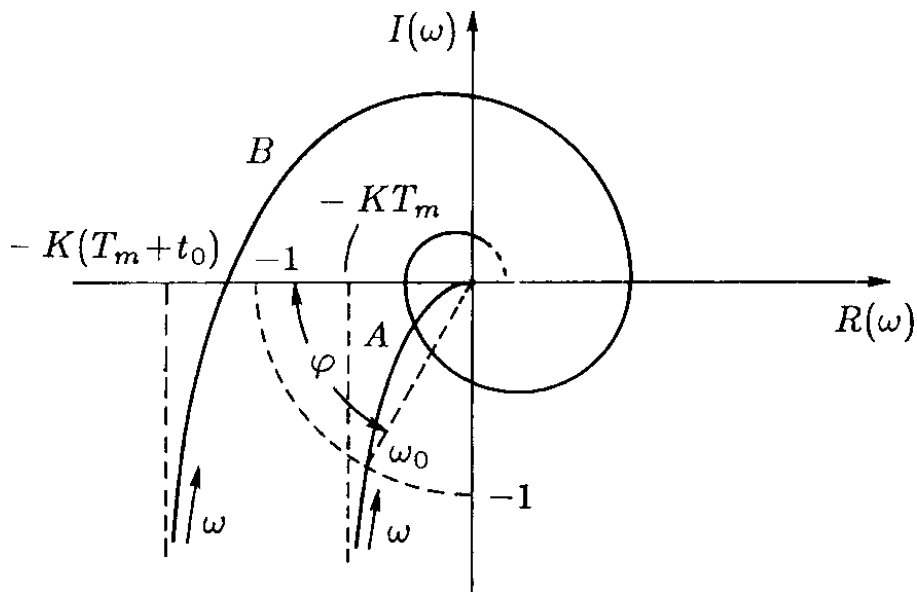
in cui $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi in s , mentre $e^{-t_0 s}$ è la funzione di trasferimento di un ritardo finito di entità t_0 .

Il criterio di Nyquist si può estendere, senza modifiche dell'enunciato, a tali sistemi con un ritardo finito entro l'anello.

Esempio. Nell'esempio mostrato sopra, la misura dello spessore del laminato avviene ad una certa distanza d dai cilindri, per cui, se la velocità di trasporto v_0 del laminato è costante, si ha un ritardo finito di valore $t_0 = d/v_0$. La funzione di trasferimento $G(s)$ del gruppo misuratore-amplificatore-motore-riduttore e quella d'anello $F(s)$ sono:

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + T_m s)}, \quad F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{s(1 + T_m s)}$$

Se non vi fosse il ritardo finito, il diagramma di Nyquist della funzione $F(s)$ sarebbe del tipo indicato con A nella figura seguente:



Per la presenza del ritardo finito, ogni vettore viene sfasato in ritardo dell'angolo ωt_0 , proporzionale alla pulsazione, e il diagramma assume l'andamento a spirale indicato con B nella figura precedente.

Nota. Si indichi con ω_0 la pulsazione per cui il diagramma A interseca il cerchio a modulo è unitario. Il sistema retroazionato è stabile anche in presenza del ritardo finito t_0 se e solo se vale la relazione $\omega_0 t_0 < \varphi$, cioè se

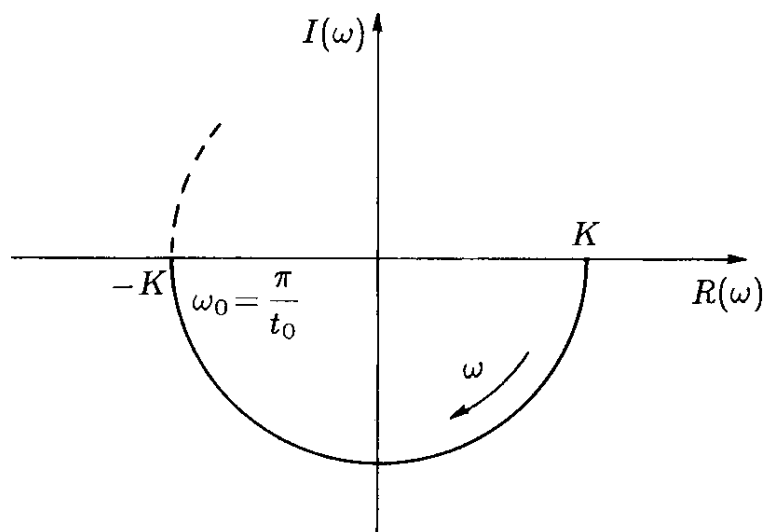
$$t_0 < \frac{\varphi}{\omega_0}$$

dove φ non è altro che il margine di fase del sistema in assenza del ritardo puro.

Esempio. Un sistema di tipo 0 avente la funzione di trasferimento di anello

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots}$$

con $t_0 \gg \tau_1, \tau_2 \dots$ ha il seguente diagramma di Nyquist



Pur essendo ancora a forma di spirale, nel tratto iniziale si può approssimare con una circonferenza, dato che lo sfasamento dovuto al ritardo si manifesta prima dell'attenuazione e dello sfasamento dovuti ai termini del primo ordine.

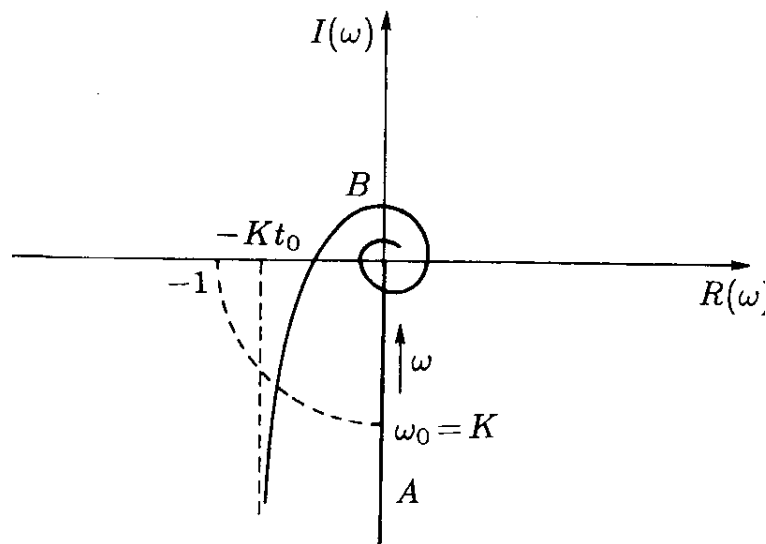
In base al criterio di Nyquist, per la stabilità asintotica del sistema $F(s)$ retroazionato deve essere soddisfatta la condizione: $K < 1$. Un valore così basso per il guadagno statico di anello è inaccettabile in quanto determina un l'errore a regime nella risposta ad un gradino di ampiezza R_0 non inferiore ad $R_0/2$.

In questi casi conviene utilizzare un dispositivo di controllo di *tipo integrale*, cioè introdurre artificialmente un polo nell'origine. La nuova funzione di trasferimento diventa:

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots}$$

Assumendo ancora $t_0 \gg \tau_1, \tau_2 \dots$, il valore della pulsazione quando la fase è pari a $-\pi$ è $\omega_0 = \pi/2 t_0$, dovendo essere pari a $-\pi/2$ il contributo del ritardo finito in corrispondenza di tale pulsazione, in quanto il contributo del polo nell'origine è pari a $-\pi/2$ e i contributi degli altri poli sono trascurabili.

$$K = \frac{1}{t_0} \left(\frac{\pi}{2} - M_F \right).$$



La condizione di stabilità asintotica si ottiene imponendo $|F(j\omega_0)| < 1$ ed è espressa dalla relazione $K < \pi/(2 t_0)$. In termini più generali, il valore di K corrispondente al margine di fase M_F è:

$$K = \frac{1}{t_0} \left(\frac{\pi}{2} - M_F \right)$$

L'introduzione del polo nell'origine consente di ridurre a zero l'errore a regime nella risposta al gradino e costituisce, nella pratica, un accorgimento frequentemente adottato per la stabilizzazione dei sistemi in retroazione che presentino ritardi finiti di notevole entità.