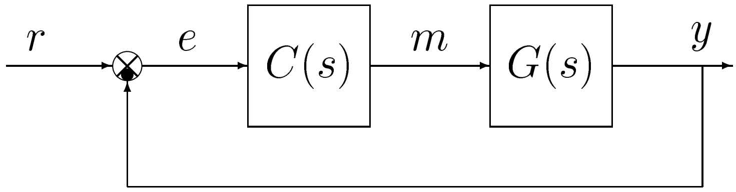
Progetto delle reti correttrici

- Si consideri il seguente sistema retroazionato:



- I dati di specifica sui quali si basa il progetto del controllore $C(s)$ riguardano:
  - la **precisione**: gli errori a regime in risposta ai segnali tipici e il comportamento a regime in presenza di disturbi e di variazioni parametriche;
  - la **stabilità** ("comportamento dinamico soddisfacente"): massima sovraelongazione nella risposta al gradino, il picco di risonanza, i margini di ampiezza e di fase e il coefficiente di smorzamento dei poli dominanti;
  - **velocità di risposta**: il tempo di ritardo, il tempo di salita, il tempo di assestamento, la banda passante.

- Poiché il progetto del sistema di controllo si effettua normalmente considerando la risposta armonica, **occorre convertire i parametri "temporali" in parametri "frequenziali"**: tale operazione non è in generale possibile in modo rigoroso e tipicamente si basa sull'ipotesi che il sistema in retroazione si comporti approssimativamente come un sistema del secondo ordine a poli dominanti.

- **Il primo parametro che si determina** in fase di progetto, **è la costante di guadagno**: guadagno statico nei sistemi di tipo 0, costante di velocità nei sistemi di tipo 1.

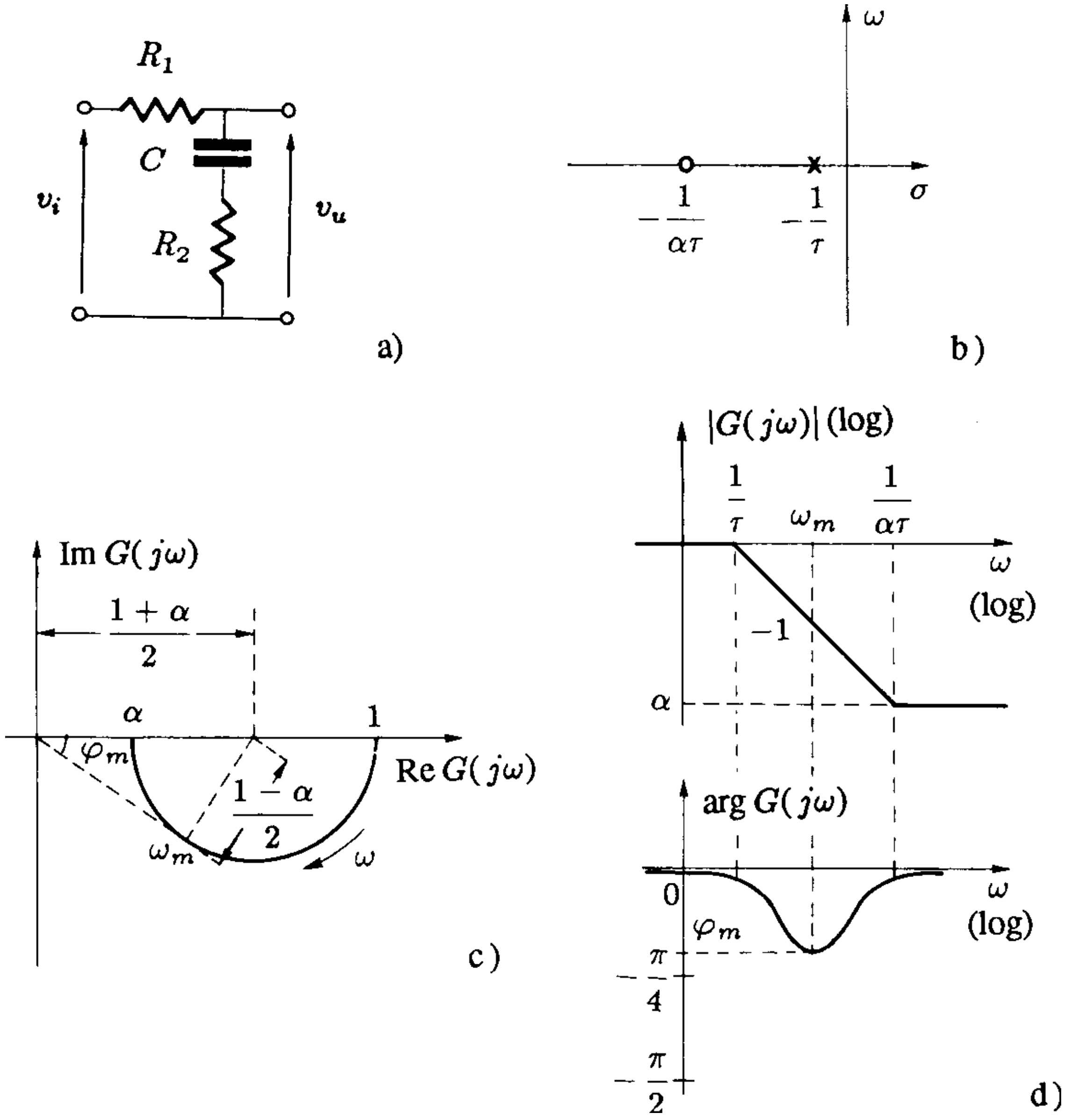
- **Successivamente si analizza se il sistema in retroazione soddisfa le specifiche di stabilità e di velocità di risposta.** Se tali specifiche non sono soddisfatte, occorre progettare una opportuna **rete correttrice** che modifichi le caratteristiche dinamiche del sistema.

Rete ritardatrice

La funzione di trasferimento di una **rete ritardatrice** è:

$$G(s) = \frac{1 + \alpha\,\tau\, s}{1 + \tau\, s} \qquad \text{oppure} \qquad G(s) = \frac{1 + \tau_1\, s}{1 + \tau_2\, s}$$

dove $\alpha < 1$ oppure $\tau_1 < \tau_2$. Diagrammi frequenziali di Bode e Nyquist:



La rete attenua il modulo e ritarda la fase per tutte le pulsazioni finite. Il massimo ritardo di fase φ_m si ottiene in corrispondenza della pulsazione ω_m, media geometrica delle pulsazioni $1/\tau$ e $1/(\alpha\,\tau)$:

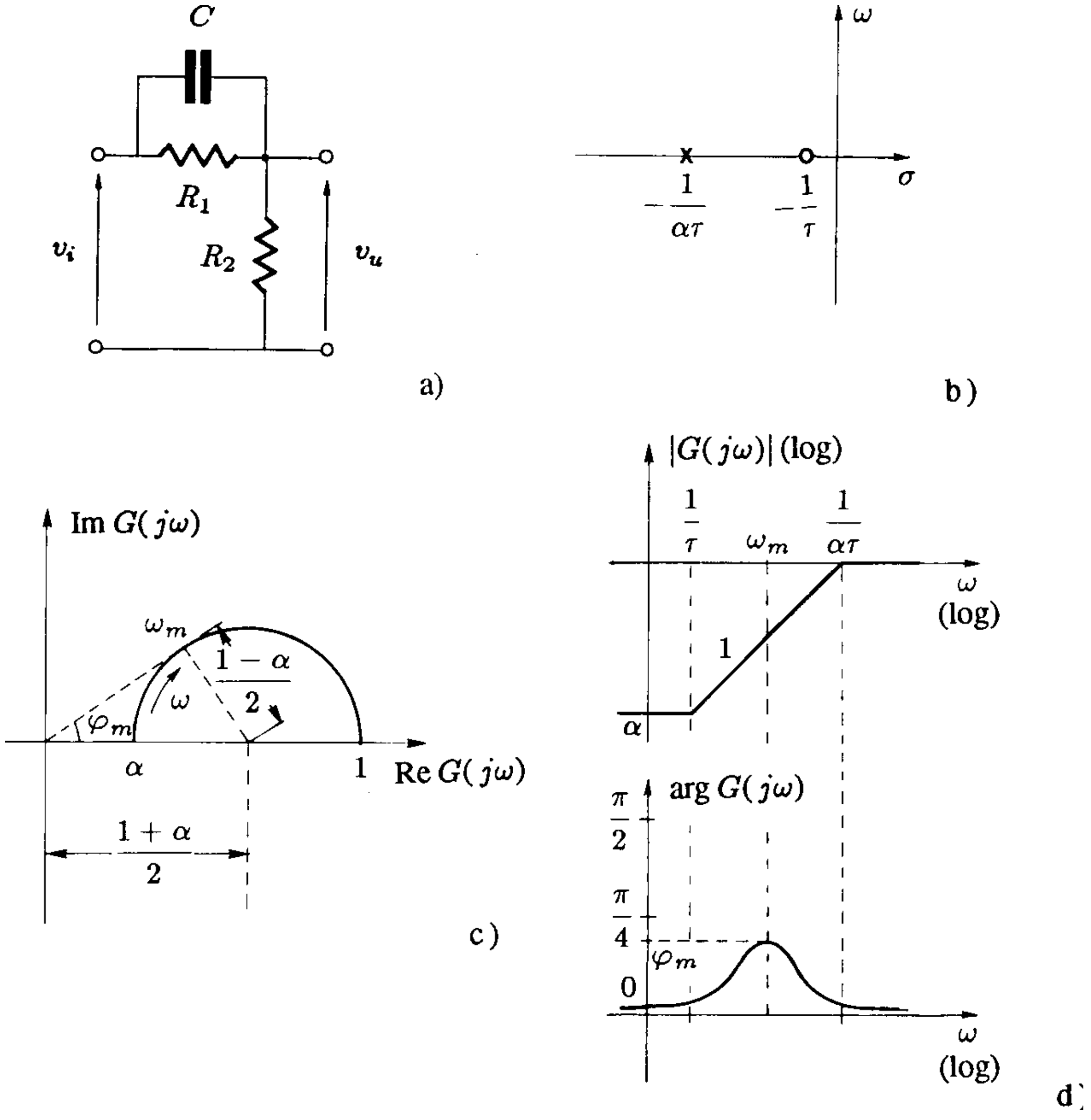
$$\varphi_m = -\mathrm{arcsen}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \qquad \omega_m = \frac{1}{\tau\,\sqrt{\alpha}}$$

Rete anticipatrice

La funzione di trasferimento di una **rete anticipatrice** è:

$$G(s) = \alpha\,\frac{1+\tau\,s}{1+\alpha\,\tau\,s} \qquad \text{oppure} \qquad G(s) = \alpha\,\frac{1+\tau_1\,s}{1+\tau_2\,s}$$

dove $\alpha < 1$ oppure $\tau_1 > \tau_2$. Diagrammi frequenziali di Bode e Nyquist:



Dopo aver compensato con un guadagno aggiuntivo $1/\alpha$ l'attenuazione α a basse frequenze, si ottiene una rete che **amplifica il modulo e anticipa la fase per tutte le pulsazioni finite.** Il massimo anticipo di fase φ_m si ottiene in corrispondenza della pulsazione ω_m:

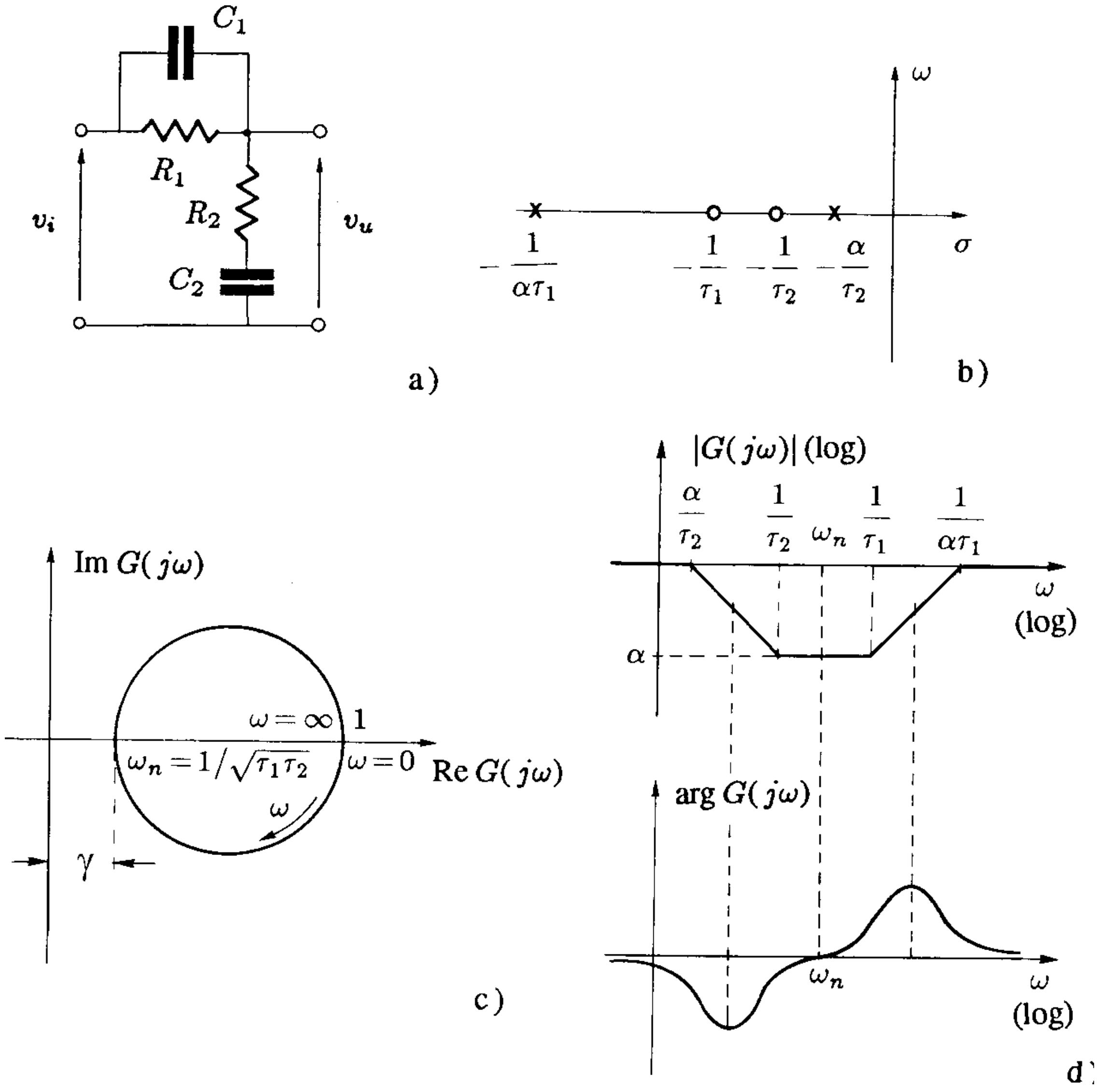
$$\varphi_m = \operatorname{arcsen}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \qquad \omega_m = \frac{1}{\tau\,\sqrt{\alpha}}$$

Rete a ritardo e anticipo

La funzione di trasferimento di una **rete a ritardo e anticipo** è:

$$G(s) = \frac{(1+\tau_1\, s)\,(1+\tau_2\, s)}{\left(1+\frac{\tau_2}{\alpha}\, s\right)\,\left(1+\alpha\,\tau_1\, s\right)}$$

dove $\alpha < 1$ e $\tau_1 < \tau_2$. Diagrammi frequenziali di Bode e Nyquist:



Questa rete attenua all'interno della banda frequenziale $\frac{\alpha}{\tau_2} < \omega < \frac{1}{\alpha\tau_1}$. In corrispondenza della pulsazione $\omega = \omega_n$ la rete attenua di un fattore γ:

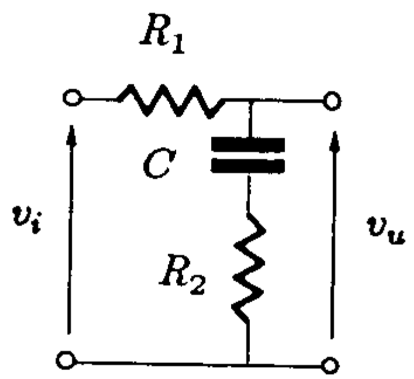
$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}, \qquad\qquad \gamma = \frac{\tau_1+\tau_2}{\alpha\tau_1+\frac{\tau_2}{\alpha}}$$

Per $\omega = \omega_n$, l'attenuazione reale γ è maggiore dell'attenuazione asintotica: $\gamma > \alpha$.

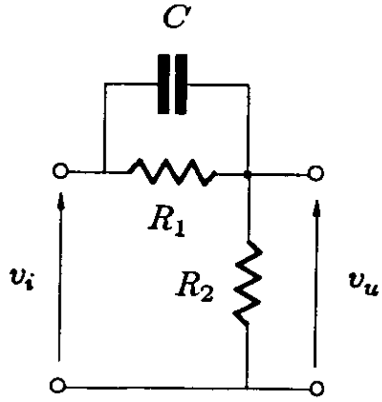
Calcolo delle reti correttrici

Facendo l'ipotesi di corrente nulla fornita al carico, la funzione di trasferimento $G(s)$ delle reti correttrici può essere determinata utilizzando le impedenze complesse e la regola del partitore di tensione.

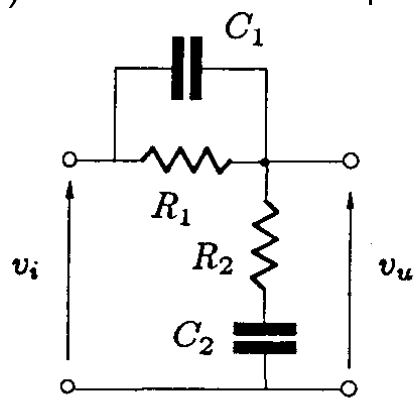
1) Rete ritardatrice:



2) Rete anticipatrice:



3) Rete ritardo-anticipo:



1) Rete ritardatrice:

$$G(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{C\,s}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{C\,s}} = \frac{1 + R_2\,C\,s}{1 + (R_1 + R_2)\,C\,s} = \frac{1 + \alpha\,\tau\,s}{1 + \tau\,s}$$

in cui si è posto $\tau := (R_1 + R_2)\,C \quad \alpha := \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1.$

2) Rete anticipatrice:

$$G(s) = \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{1}{(1/R_1) + C\,s}} = \frac{R_2\,(1 + R_1\,C\,s)}{R_1 + R_2 + R_1\,R_2\,C\,s} = \alpha\,\frac{1 + \tau\,s}{1 + \alpha\,\tau\,s}$$

in cui si è posto $\tau := R_1\,C \ , \quad \alpha := \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$.

3) Rete ritardo-anticipo:

$$G(s) = \frac{R_2 + \dfrac{1}{C_2\,s}}{R_2 + \dfrac{1}{C_2\,s} + \dfrac{1}{(1/R_1) + C_1\,s}} = \frac{(1 + \tau_1\,s)\,(1 + \tau_2\,s)}{(1 + \tau_1\,s)\,(1 + \tau_2\,s) + \tau_{12}\,s}$$

in cui si è posto $\tau_1 := R_1\,C_1$, $\tau_2 := R_2\,C_2$, $\tau_{12} := R_1\,C_2$.

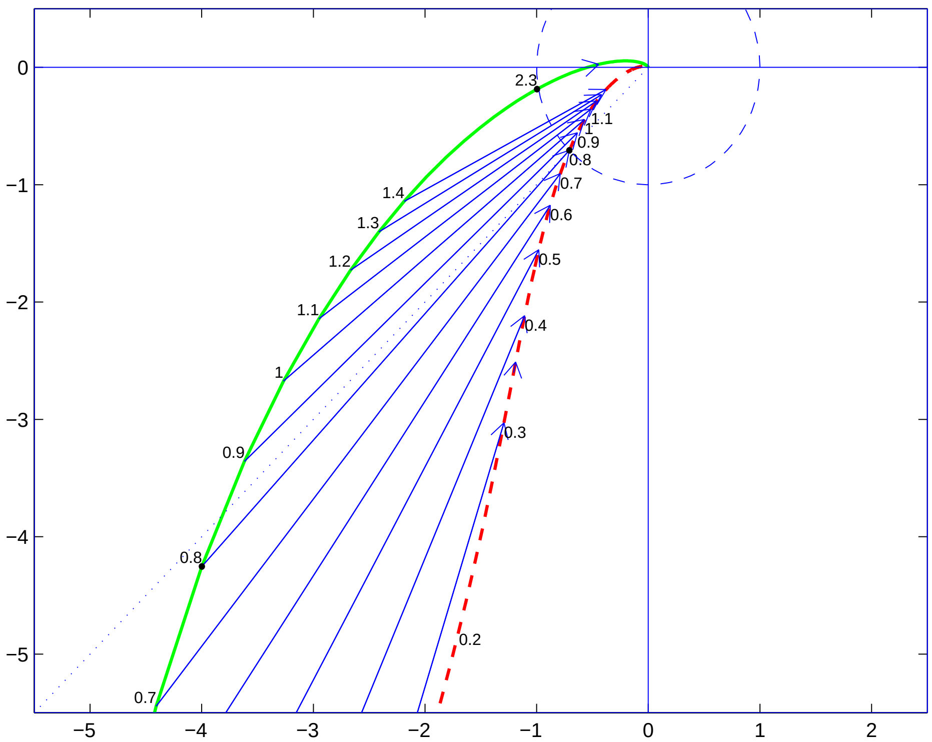
Azione stabilizzante di una rete ritardatrice

- Una rete ritardatrice **attenua e sfasa** a tutte la pulsazioni

$$C(s) = \frac{1+\tau_1\, s}{1+\tau_2\, s} \qquad \text{con} \qquad \tau_1 < \tau_2$$

- Azione stabilizzante di una rete ritardatrice è essenzialmente data dall'attenuazione alle alte pulsazioni.

- Esempio di sintesi sul piano di Nyquist:



- L'attenuazione alle alte frequenze ha come effetto negativo la riduzione della banda passante del sistema.

- Nell'esempio riportato sopra, il sistema senza rete correttrice ha larghezza di banda $\omega_f = 2.3$, quello con rete correttrice $\omega_f = 0.8$. Il sistema retroazionato avrà un tempo di salita più lungo.

- Un vantaggio della rete ritardatrice rispetto a quella anticipatrice è la sua capacità di poter stabilizzare anche sistemi con margini di fase fortemente negativi.

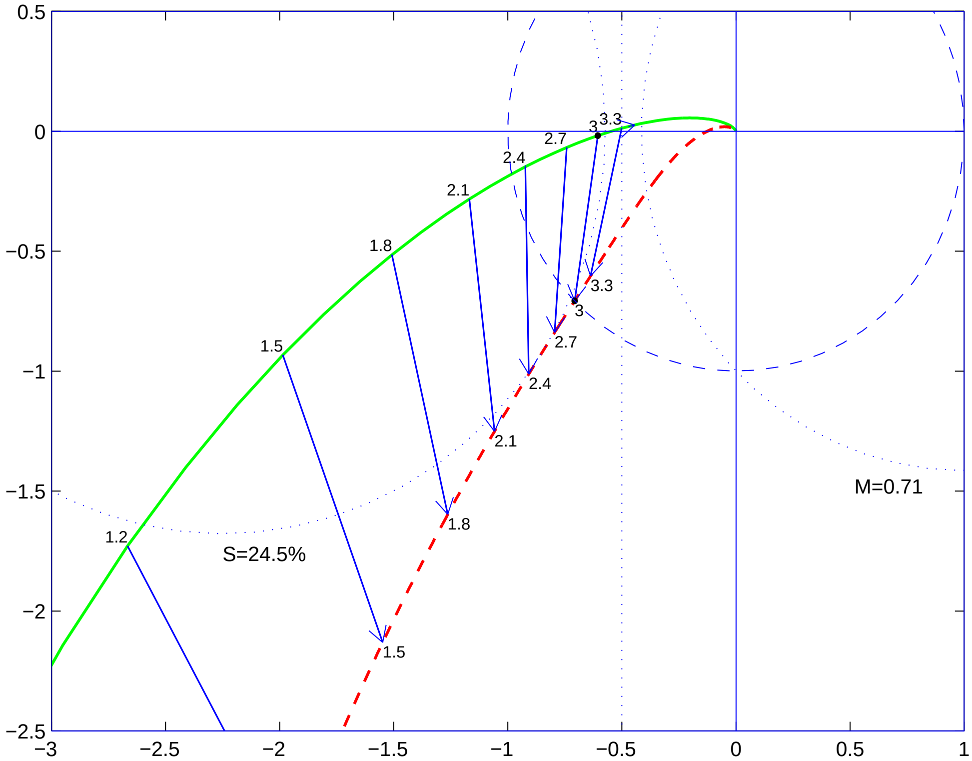
Azione stabilizzante di una rete anticipatrice

- Una rete anticipatrice amplifica e anticipa a tutte la pulsazioni

$$C(s) = \frac{1+\tau_1\, s}{1+\tau_2\, s} \qquad \text{con} \qquad \tau_1 > \tau_2$$

- Azione stabilizzante di una rete anticipatrice è essenzialmente data dall'anticipo di fase.

- Esempio di sintesi sul piano di Nyquist:



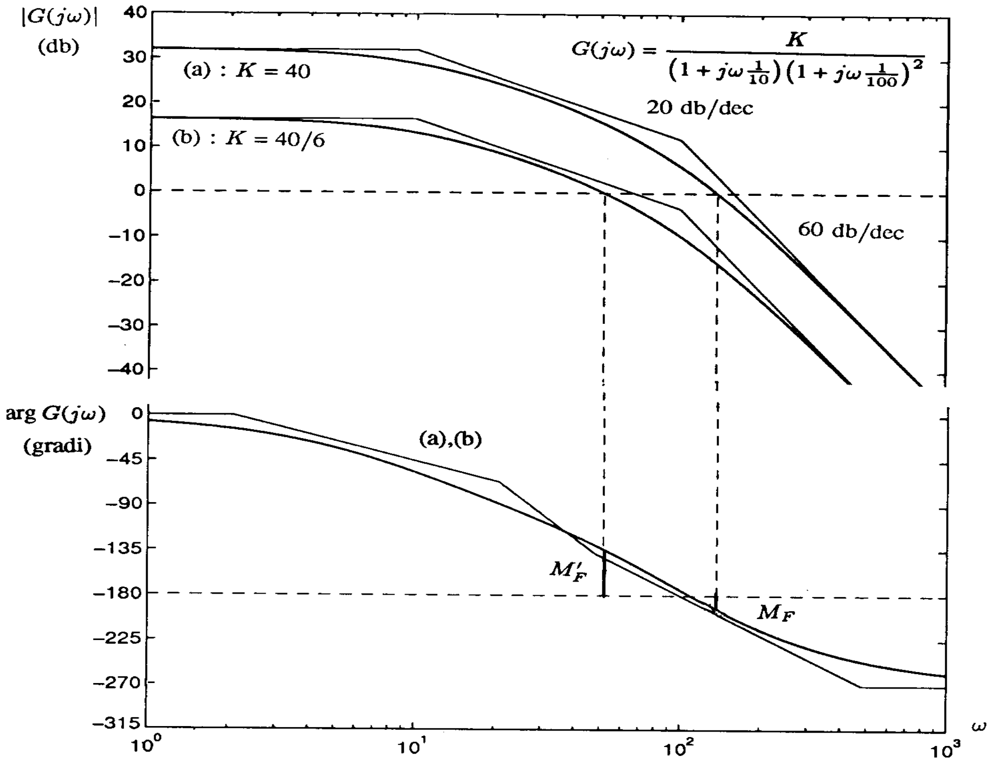
- L'azione amplificatrice ha come effetto positivo l'allargamento della banda passante.

- Nell'esempio riportato sopra, il sistema senza rete correttrice ha larghezza di banda $\omega_f = 2.3$, quello con rete correttrice $\omega_f = 3$.

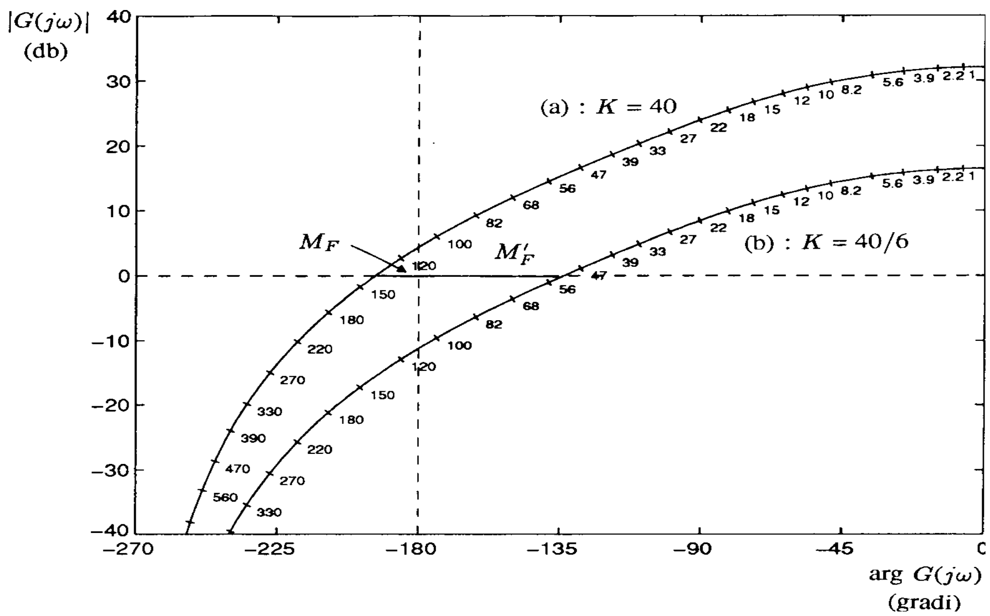
- Il massimo anticipo di fase φ_m che può essere fornito da una rete anticipatrice è $\varphi_m = \frac{\pi}{2}$, per cui una rete anticipatrice può essere utilizzata solamente per migliorare il transitorio di sistemi già stabili o per stabilizzare sistemi con margini di fase negativi ma piccoli.

Stabilizzazione mediante riduzione del guadagno

- Diagrammi di Bode:



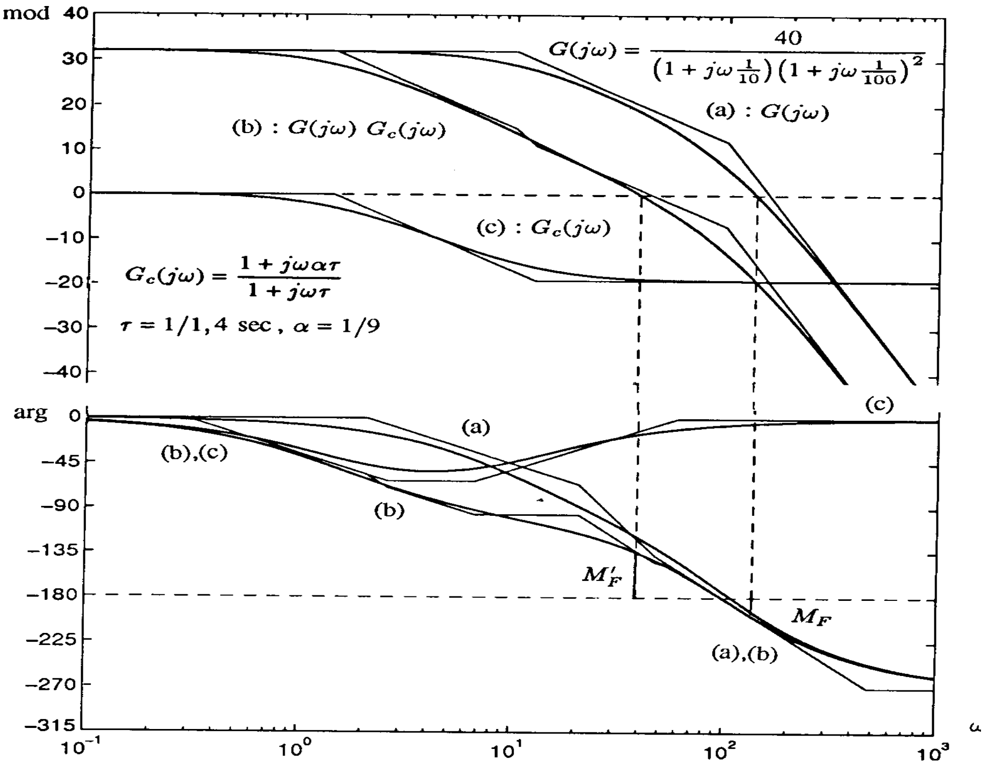
- Diagrammi di Nichols:



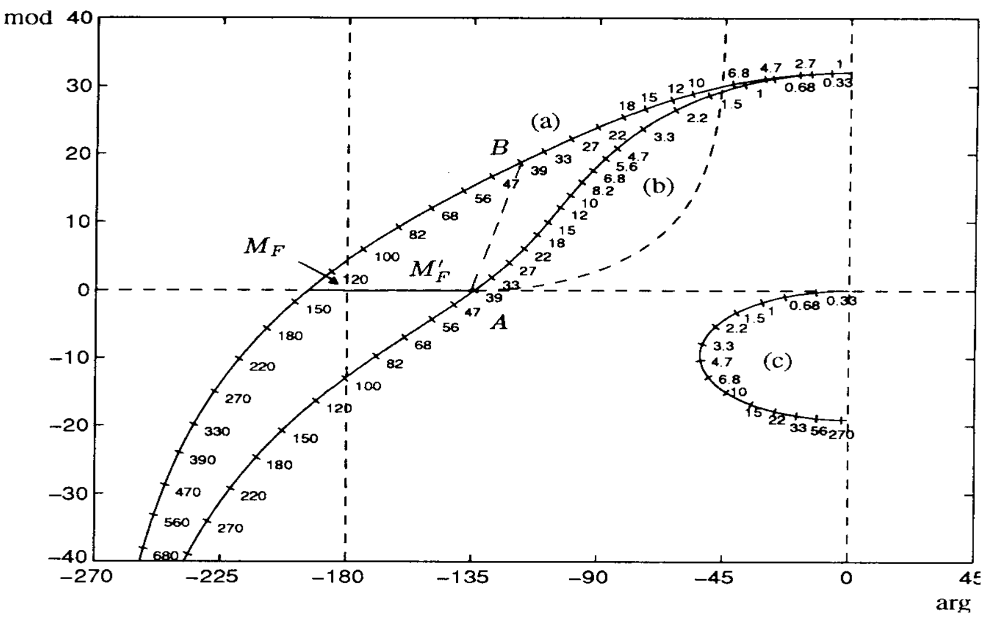
- Intervento sconsigliabile, in quanto i sistemi in retroazione funzionano tanto meglio, come prontezza e insensibilità ai disturbi, quanto più elevato è il guadagno di anello.

Stabilizzazione mediante rete ritardatrice

- Diagrammi di Bode:



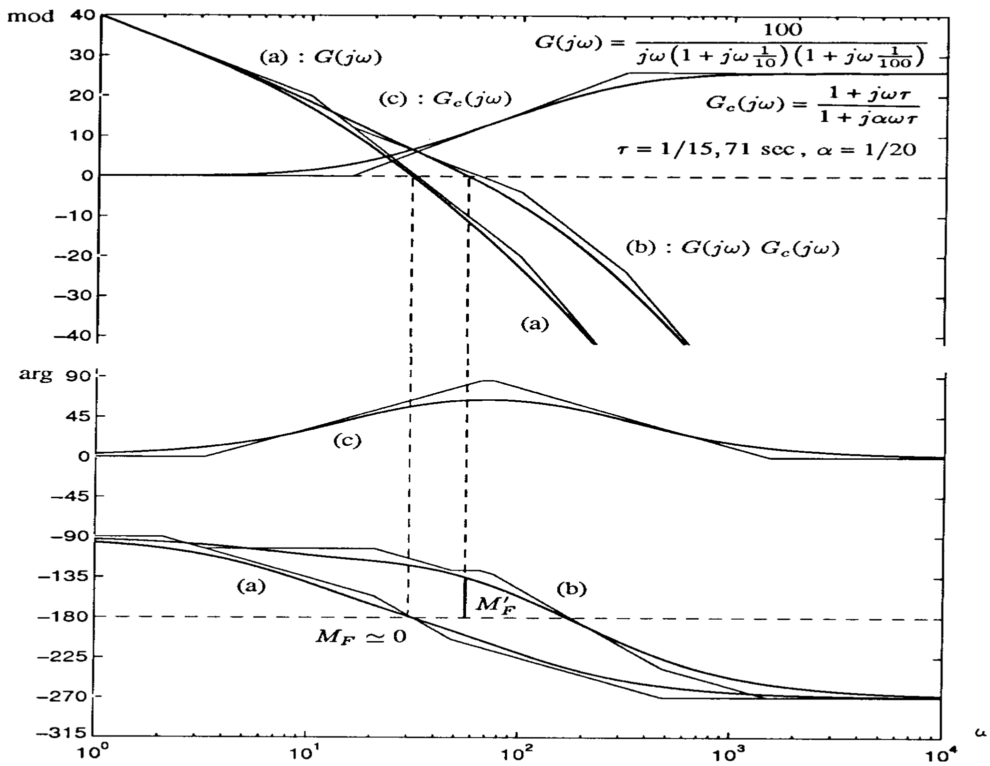
- Diagrammi di Nichols:



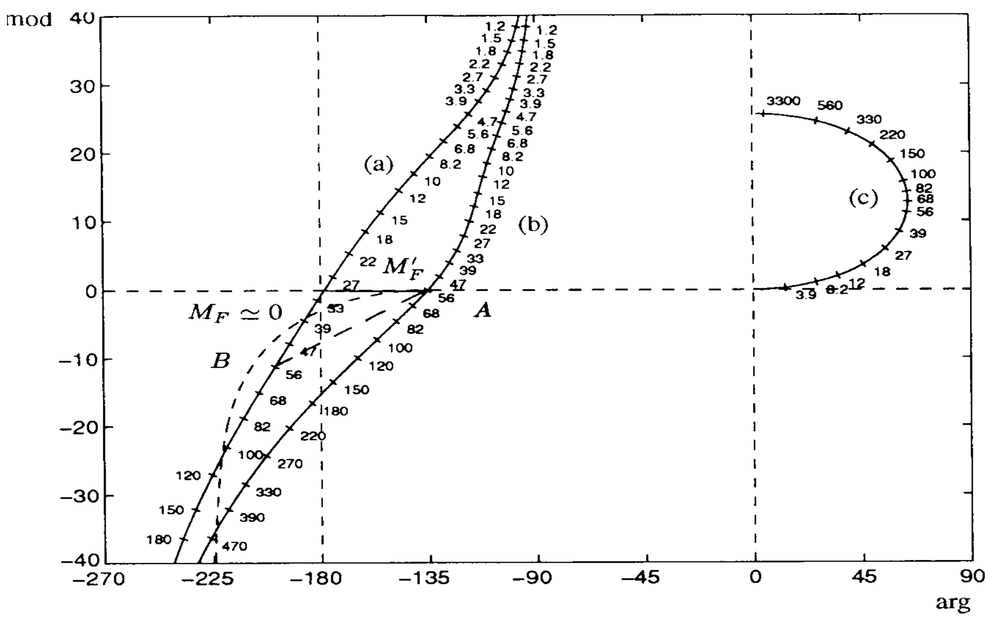
- Si usa per stabilizzare sistemi che abbiamo un margine di fase fortemente negativo (per esempio gli amplificatori operazionali). L'inconveniente principale è la riduzione della banda passante: risposta transitoria meno pronta e neutralizzazione meno efficace dei disturbi ad alta frequenza.

Stabilizzazione mediante rete anticipatrice

- Diagrammi di Bode:



- Diagrammi di Nichols:



- La rete anticipatrice ha l'effetto di aumentare sia il margine di fase (diminuzione dell'overshoot) che il guadagno alle alte frequenze (la risposta più pronta perchè aumenta la banda passante).