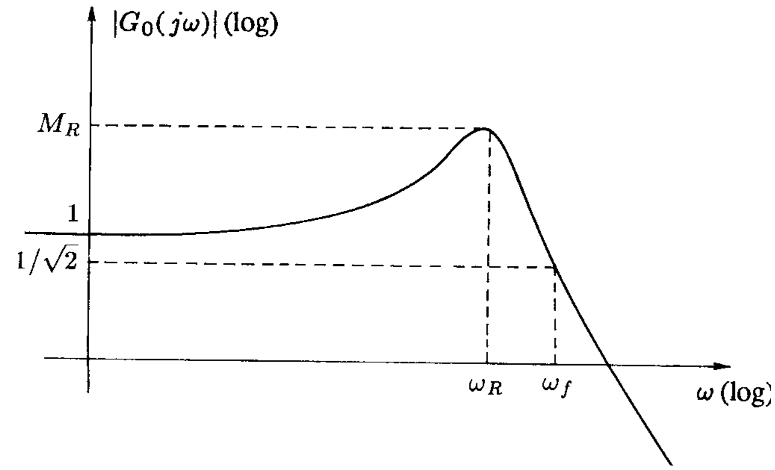
Larghezza di banda

L'andamento tipico del modulo della funzione di risposta armonica di un sistema in retroazione $G_0(s)$ è in genere analogo a quello di un sistema del secondo ordine, per la presenza di due poli dominanti complessi coniugati:



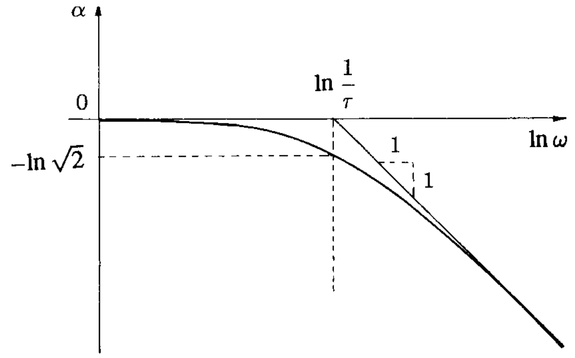
I parametri frequenziali più significativi che caratterizzano questo tipo di risposta sono:

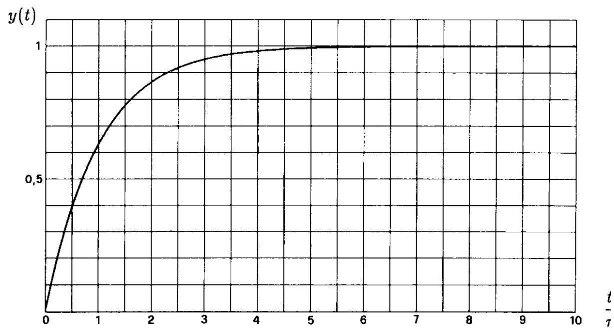
- *1. Pulsazione di risonanza* ω_R: pulsazione di risonanza pulsazione in corrispondenza della quale il modulo di $G_0(j\omega)$ assume il valore massimo;
- *2. Picco di risonanza* M_R: picco di risonanza rapporto fra il massimo modulo di $G_0(j\omega)$ e il valore statico $G_0(0)$;
- *3. Banda passante* o *larghezza di banda* ω_f: larghezza di banda pulsazione alla quale il modulo della risposta armonica è inferiore di 3 db (corrispondenti ad un rapporto di 1 ad $1/\sqrt{2}$) al valore statico $G_0(0)$.

Le specifiche nel dominio della frequenza sono, naturalmente, correlate con quelle nel dominio del tempo. Tale correlazione però, nel caso di un sistema generico di ordine qualsiasi, non è facilmente esprimibile analiticamente.

La larghezza di banda ω_f di un sistema, oltre a definire le capacità filtranti del sistema stesso, fornisce anche un'indicazione "qualitativa" del *tempo di salita* T_s del sistema nel caso di risposta al gradino.

Per sistemi del primo ordine, il legame esistente tra larghezza di banda ω_f e tempo di salita T_s è evidente.





Infatti, per sistemi del primo ordine, il tempo si salita T_a è proporzionale alla costante di tempo τ, mentre la larghezza di banda $\omega_f = \frac{1}{\tau}$ è inversamente proporzionale alla costante di tempo τ.

Da un punto di vista "qualitativo" si può affermare (anche per sistemi di ordine superiore) che maggiore è la larghezza di banda ω_f di un sistema, minore è il suo tempo di salita T_s nella risposta temporale al gradino.

Nei sistemi in retroazione con elevato guadagno di anello, la larghezza di banda ω_{f0} del sistema retroazionato $G_0(s)$ può essere facilmente ricavata (in modo approssimato) conoscendo la funzione di risposta armonica del guadagno di anello $H(s)G(s)$.

Si supponga, per esempio, che la funzione di trasferimento del percorso di segnale di retroazione sia reale: $H(s) = h$. In tale ipotesi si può scrivere

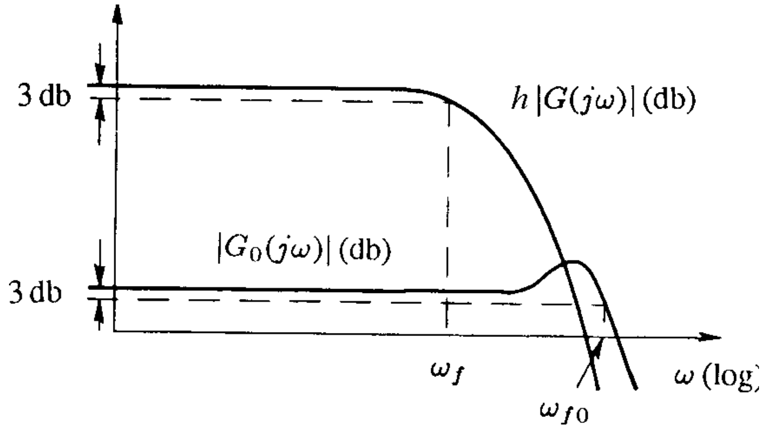
$$G_0(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + h\,G(j\omega)} = \frac{1}{h + \frac{1}{G(j\omega)}}$$

Nella banda di pulsazioni nella quale vale la relazione $h\,|G(j\omega)| \gg 1$, risulta

$$G_0(j\omega) \simeq \frac{1}{h}$$

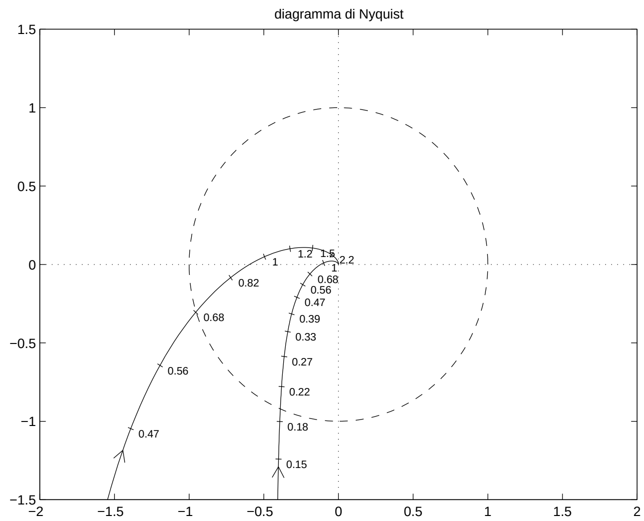
cioè la risposta armonica del sistema in retroazione $G_0(j\omega)$ rimane pressoché costante al variare di ω, pur potendo subire la $G(j\omega)$ variazioni anche notevoli nella suddetta banda.

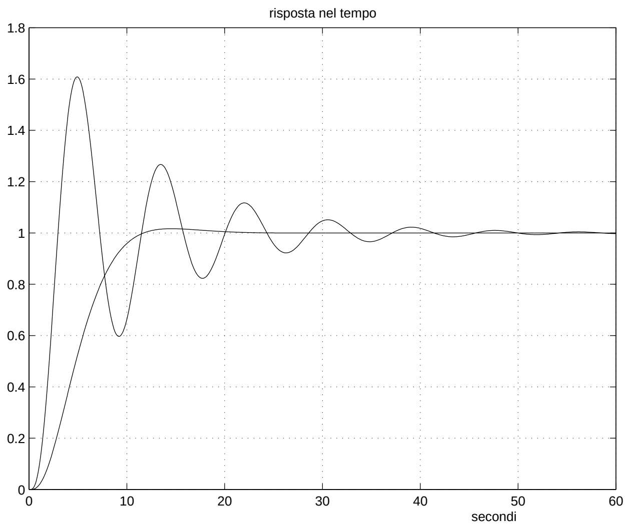
Diagrammi di risposta armonica del guadagno ad anello aperto $hG(s)$ e del sistema in retroazione $G_0(s)$:



La banda passante del sistema in retroazione (da 0 a ω_{f0}) è maggiore di quella del sistema ad anello aperto (da 0 a ω_f). Poiché la banda passante comprende la pulsazione nulla, la larghezza di banda è data, nei due casi, da ω_{f0} e da ω_f.

La larghezza di banda ω_f di un sistema retroazionato può essere facilmente ricavata anche facendo riferimento ai diagrammi di Nyquist:





Quelli riportati in figura sono i diagrammi di Nyquist dei seguenti due sistemi:

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)^2(s+10)}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{s(s+1)^2(s+10)}$$

A fianco, sono riportati gli andamenti temporali della risposta al gradino dei corrispondenti sistemi retroazionati. Come si può vedere dai grafici, nei due casi il tempo di salita ($T_{s1} \simeq 1.7$ e $T_{s2} \simeq 7$ s) è "circa" inversamente proporzionale alla larghezza di banda dei due sistemi retrazionati ($\omega_{f01} \simeq 0.68$ e $\omega_{f02} \simeq 0.19$) cioè alle pulsazioni ω_{f0} di intersezione dei diagrammi di Nyquist con il cerchio unitario.