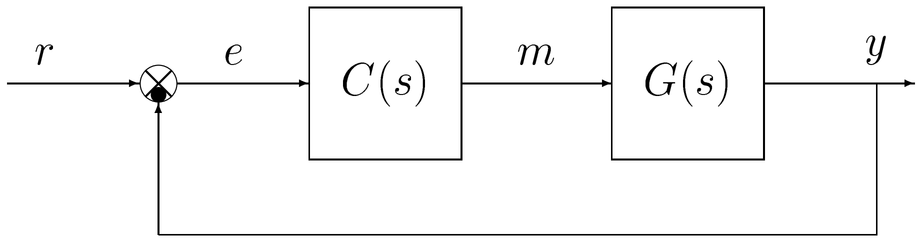
# Sintesi di reti correttrici: formule di inversione

- Si consideri il seguente sistema retroazionato:




dove $G(s)$ è il sistema da controllare e $C(s)$ è un'opportuna rete correttrice aventi la seguente struttura:

$$\boxed{C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}}$$

- Si ha una rete <u>anticipatrice</u> quando $\tau_1 > \tau_2$:

$$C(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} \qquad \text{dove} \qquad \tau = \tau_1, \quad \alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1} < 1$$

- Si ha una rete <u>ritardatrice</u> quando $\tau_1 < \tau_2$:

$$C(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \qquad \text{dove} \qquad \tau = \tau_2, \quad \alpha = \frac{\tau_1}{\tau_2} < 1$$

- Le specifiche dinamiche relative ad un sistema retroazionato vengono date in termini di margine di fase $M_\varphi$ e di margine di ampiezza $M_\alpha$.

- I parametri $\tau_1$ e $\tau_2$ di una rete correttrice che introduce una amplificazione $M$ ed un anticipo di fase $\varphi$ in corrispondenza della pulsazione $\omega$ si determinano utilizzano le seguenti <u>*formule di inversione*</u>:

$$\boxed{\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi}}$$

# Calcolo delle formule di inversione

- Problema di progetto: *Determinare i valori* $\tau_1$ *e* $\tau_2$ *della rete correttrice* $C(s)$ *in modo che*

$$C(j\omega) = \frac{1 + j\,\tau_1\omega}{1 + j\,\tau_2\omega} = M\; e^{j\varphi}$$

*cioè in modo che la rete amplifichi di* $M$ *ed anticipi di* $\varphi$ *in corrispondenza della pulsazione* $\omega$.

- Il problema di progetto è risolto dalle seguenti *formule di inversione*:

$$\boxed{\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi}}$$

- Le formule di inversione si ottengono riscrivendo l'equazione

$$C(j\omega) = \frac{1 + j\,\tau_1\omega}{1 + j\,\tau_2\omega} = M\; e^{j\varphi} = M\cos\varphi + jM\sin\varphi$$

nella forma

$$(M\cos\varphi + jM\sin\varphi)(1 + j\;\tau_2\omega) = 1 + j\;\tau_1\omega,$$

trasformando tale equazione nel sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & -M\cos\varphi \\ 0 & M\sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1\omega \\ \tau_2\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M\sin\varphi \\ M\cos\varphi - 1 \end{bmatrix}$$

e risolvendo rispetto alle variabili $\tau_1$ e $\tau_2$

$$\tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} M\sin\varphi & -M\cos\varphi \\ M\cos\varphi - 1 & M\sin\varphi \end{vmatrix}}{\omega M\sin\varphi} = \frac{M - \cos\varphi}{\omega\sin\varphi}$$

$$\tau_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & M\sin\varphi \\ 0 & M\cos\varphi - 1 \end{vmatrix}}{\omega M\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - \dfrac{1}{M}}{\omega\sin\varphi}$$

- Forma unificata per la sintesi di reti correttrici:

$$\boxed{C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{\omega\sin\varphi + (M - \cos\varphi)s}{\omega\sin\varphi + (\cos\varphi - \frac{1}{M})s}}$$

- Tale formula è valida sia per reti anticipatrici ($M > 1$ e $\varphi > 0$) che ritardatrici ($M < 1$ e $\varphi < 0$).

# Domini di ammissibilità

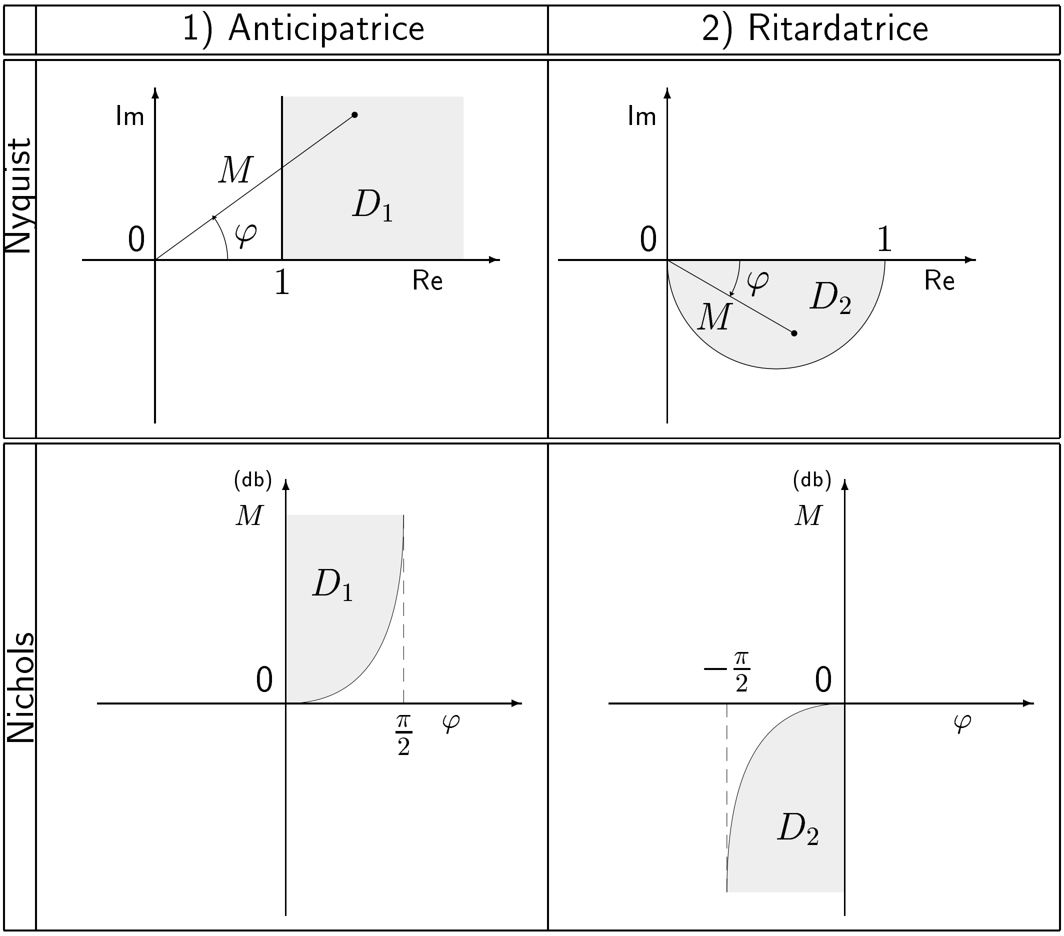
- Le formule di inversione possono essere utilizzate solo se il punto $(M,\ \varphi)$ appartiene ad uno di questi due domini di ammissibilità:

  Rete Anticipatrice: $$D_1 = \left\{ (M,\ \varphi)\ :\ 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2},\quad M \geq \frac{1}{\cos\varphi} \geq 1 \right\}$$

  Rete Ritardatrice: $$D_2 = \left\{ (M,\ \varphi)\ :\ -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq 0,\quad 0 < M \leq \cos\varphi \leq 1 \right\}$$

  Sono gli insiemi dei punti a cui posso giungere partendo dal punto $1+j\,0$ e applicando in tutti i modi possibili la specifica rete correttrice.

- Rappresentazione dei domini $D_1$ e $D_2$ sul piano di Nyquist e sul piano di Nichols:




- Il problema di sintesi della rete correttrice $C(s)$ ammette una sola soluzione se il punto $(M,\ \varphi)$ appartiene ad uno dei domini di ammissibilità.

- Per verificare l'appartenenza del punto $(M,\ \varphi)$ ad uno dei due domini di ammissibilità è sufficiente utilizzare le formule di inversione e verificare che i parametri $\tau_1$ e $\tau_2$ ottenuti siano entrambi positivi. Se uno dei due parametri è negativo il punto $(M,\ \varphi)$ scelto non è ammissibile.