Contorno delle radici

- Si faccia riferimento alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + \frac{4(1+5\tau s)}{s(1+\tau s)(1+0.2s)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + G_2(s,\tau) = 0$$

  Tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$.

- Si ha un problema di *contorno delle radici* tutte le volte che nell'equazione caratteristica il parametro che varia non è il guadagno K del sistema ma un qualunque altro parametro del sistema.

- Molto spesso, un problema di contorno delle radici può essere ricondotto ad un semplice problema di luogo delle radici procedendo nel seguente modo:

  1) Si riscrive l'equazione caratteristica in forma polinomiale:

  $$s(1+\tau s)(1+0.2s) + 4(1+5\tau s) = 0$$

  2) Si raccolgono tutti i termini che "moltiplicano" il parametro τ:

  $$s(1+0.2s) + 4 + \tau[s^2(1+0.2s) + 20s] = 0$$

  3) Si divide l'equazione caratteristica per il gruppo di termini che "non moltiplicano" il parametro τ:

  $$1 + \frac{\tau[s^2(1+0.2s)+20s]}{s(1+0.2s)+4} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \underbrace{1 + \frac{\tau s[s^2+5s+100]}{s^2+5s+20}}_{1+\tau G_3(s)} = 0$$

  In questo modo ci si è ricondotti al semplice caso di studio del luogo delle radici della funzione $G_3(s)$ al variare del parametro τ.

- Questo procedimento mette in evidenza che *"un contorno delle radici può essere ricondotto ad un normale luogo delle radici tutte le volte che il parametro τ entra in modo lineare nell'equazione caratteristica del sistema retroazionato"*.

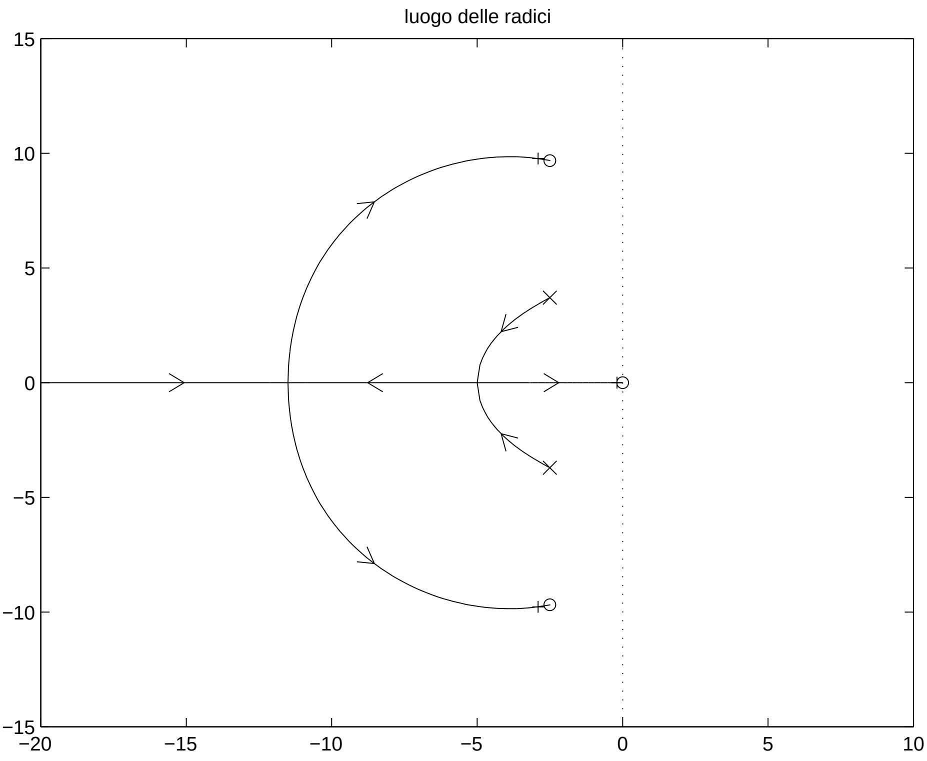
- La funzione $G_3(s)$ non ha un significato fisico diretto per cui può anche essere una funzione non fisicamente realizzabile, cioè il suo grado relativo può anche essere negativo: $n - m < 0$ (come ad esempio accade nel caso in esame).

- Si noti che il polinomio che compare a denominatore della funzione $G_3(s)$ coincide con il polinomio caratteristico del sistema retroazionato che sia ha quando $\tau = 0$, cioè i poli da cui parte il contorno delle radici fanno parte del luogo delle radici del sistema per $\tau = 0$ e al variare del guadagno K.

- Nel caso in esame, gli zeri e i poli della funzione $G_3(s)$ sono:

$$z_1 = 0, \qquad z_{2,3} = -2.5 \pm j9.682, \qquad p_{1,2} = -2.5 \pm j3.708$$

- Andamento qualitativo del contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$:



Esempio. Calcolare il contorno delle radici del seguente sistema al variare di $\tau > 0$.

$$G(s)\,H(s) = \frac{K}{s\,(1+\tau\,s)}$$

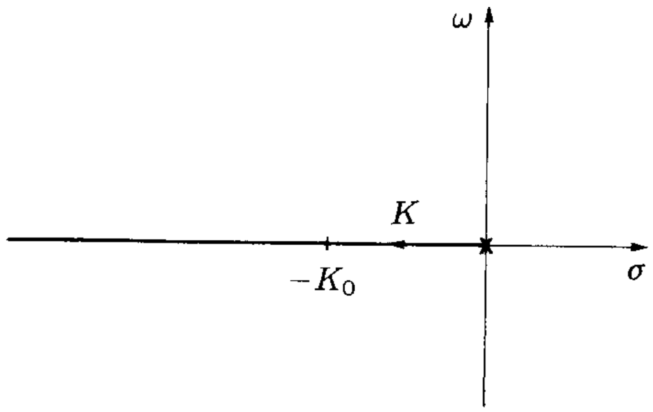
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K}{s\,(1+\tau\,s)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \tau\,s^2 + s + K = 0$$

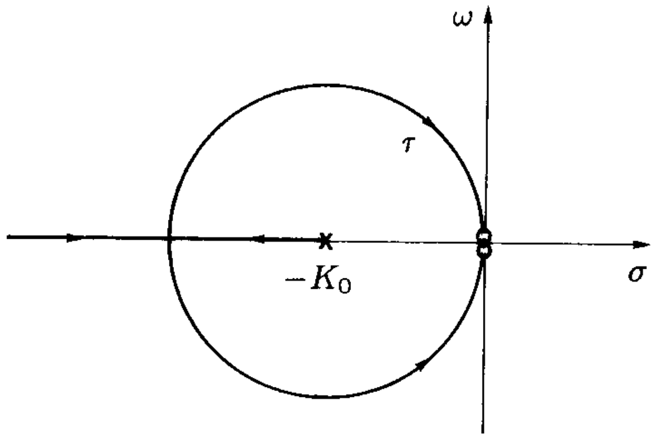
da cui si ottiene:

$$1 + \frac{\tau\,s^2}{s+K} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + \tau G_3(s) = 0$$

Il luogo e il contorno delle radici del sistema $G(s)$ sono i seguenti:



a)



b)

Fissando un valore di K, che si indicherà con K_0, si stabilisce il punto del luogo $(-K_0)$ da cui si origina il contorno delle radici.

Si noti che in questo caso la funzione $G_3(s)$ è impropria: ha un solo polo e due zeri. In situazioni di questo tipo (cioè quando il grado relativo $n-m$ è negativo) il luogo delle radici presenta $|n-m|$ asintoti che sono percorsi in senso inverso, cioè dall'infinito al finito.

Esempio. Calcolare il contorno delle radici del seguente sistema $G(s)$ al variare di $\tau > 0$.

$$G(s) = \frac{K}{s\,(s+1)\,(1+\tau\, s)}$$

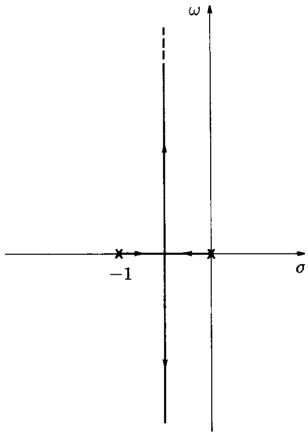
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K}{s\,(s+1)\,(1+\tau\, s)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s\,(s+1) + K_0 + \tau\, s^2\,(s+1) = 0$$

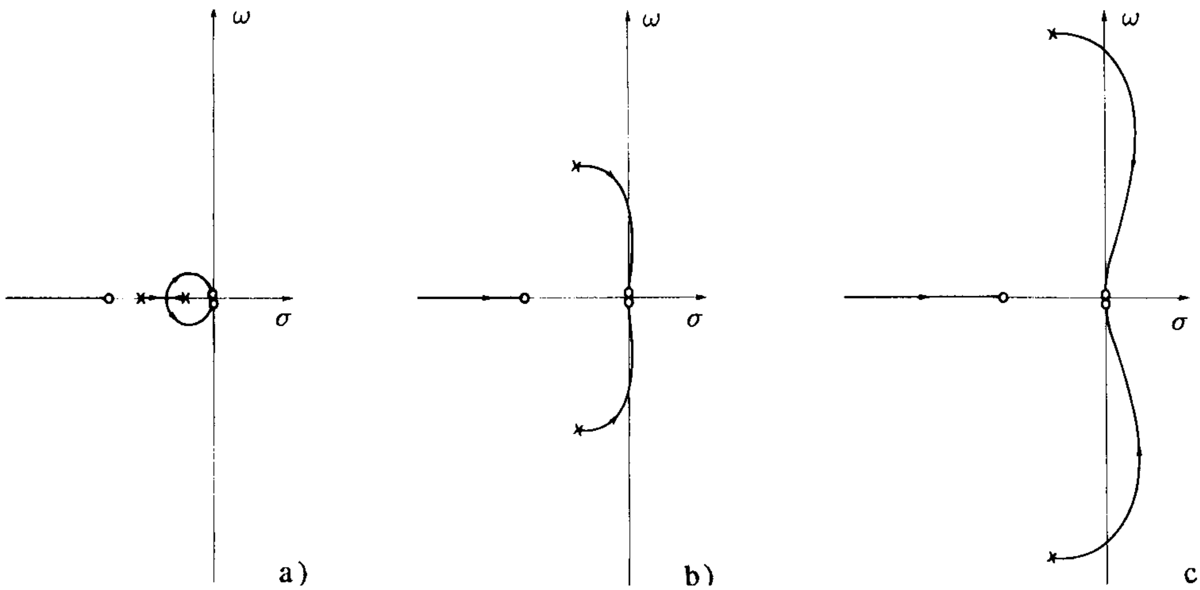
da cui si ottiene:

$$1 + \frac{\tau\, s^2\,(s+1)}{s\,(s+1) + K_0} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + \tau G_3(s) = 0$$

Il luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare di K da 0 a ∞:



I contorni delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$ e per tre diversi valori del parametro K:



Il contorno delle radici a) corrispondente a radici reali, gli altri due a radici complesse coniugate.

Esempio. Calcolare il contorno delle radici del seguente sistema $G(s)$ al variare di $\tau > 0$.

$$G(s) = \frac{K_1\,(1+\tau\, s)}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

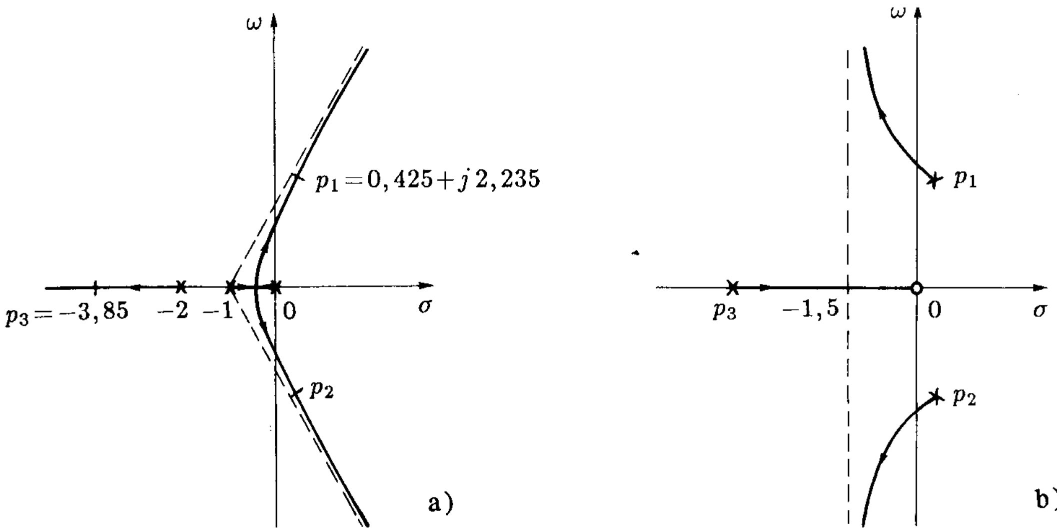
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K_1\,(1+\tau\, s)}{s\,(s+1)\,(s+2)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s\,(s+1)\,(s+2) + K_1 + \tau\, s\, K_1 = 0$$

da cui si ottiene:

$$1 + \frac{\tau\, s\, K_1}{s\,(s+1)\,(s+2) + K_1} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + \tau G_3(s) = 0$$

Il luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare di K da 0 a ∞ e il corrispondente contorno delle radici sono i seguenti:



Il contorno delle radici riportato in b) corrispondente al caso $K_1 := 20$, e i poli p_1, p_2 e p_3 da cui parte il contorno sono quelli mostrati in figura a).

Il contorno presenta due asintoti. Il punto d'incontro degli asintoti è sull'asse reale ed ha ascissa:

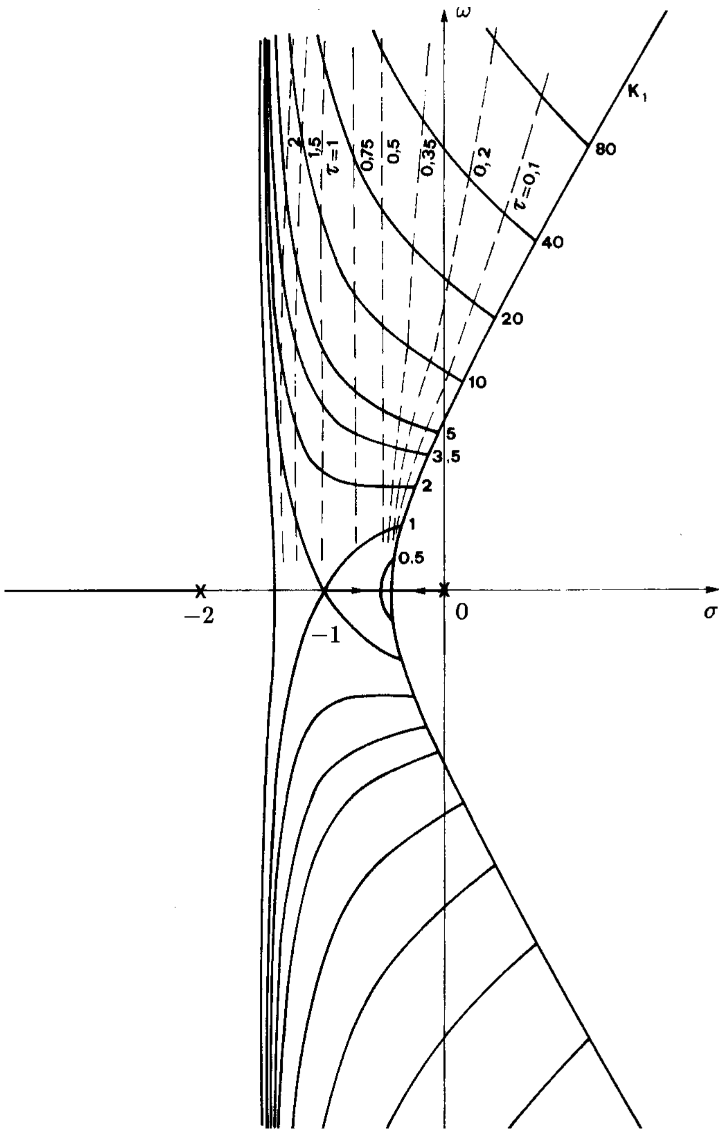
$$\sigma_a = \frac{p_1 + p_2 + p_3 - 0}{3-1} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Nota: nel caso in esame il punto di incontro degli asintoti del contorno delle radici è indipendente dal valore di K_1 per il quale il contorno è tracciato: tutti i contorni relativi a diversi valori di K_1 hanno gli stessi asintoti.

Teorema del baricentro

Teorema del baricentro del luogo delle radici. *La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento razionale con polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.*

Contorno delle radici del sistema $G(s) = \frac{K_1\,(1+\tau\,s)}{s\,(s+1)\,(s+2)}$ tracciato per diversi valori della costante K_0.



I rami principali del contorno delle radici (quelli relativi ai poli dominanti) sono tracciati per diversi valori di K_1: si ottiene così una famiglia di curve appoggiate al luogo delle radici.