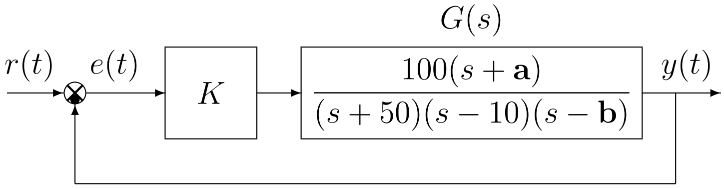
Controlli Automatici B
27 Marzo 2006 - Esercizi
Compito Nr. $\boxed{\mathbf{a} = 3}$ $\boxed{\mathbf{b} = 5}$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad **a** e **b** i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 1 quando $a = 3$ e $b = 5$. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

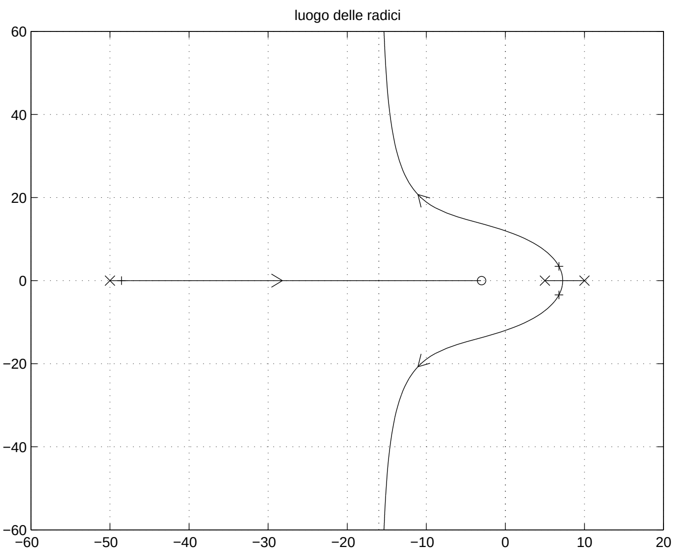


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ quando $a = 3$ e $b = 5$.

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-50 + 10 + \mathbf{b} + \mathbf{a}) \qquad \xrightarrow{a=3,\, b=5} \qquad \sigma_a = -16$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K\,G(s) = 0 \qquad \rightarrow \qquad (s+50)(s-10)(s-\mathbf{b}) + 100\,K(s+\mathbf{a}) = 0$$

$$s^3 + (40-\mathbf{b})s^2 + (100K - 500 - 40\mathbf{b})s + 100\mathbf{a}K + 500\mathbf{b} = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 100K - 500 - 40\mathbf{b} \\
2 & (40-\mathbf{b}) & 100\mathbf{a}K + 500\mathbf{b} \\
1 & (40-\mathbf{b})(100K - 500 - 40\mathbf{b}) - (100\mathbf{a}K + 500\mathbf{b}) & \\
0 & 100\mathbf{a}K + 500\mathbf{b} &
\end{array}$$

Il sistema risulta essere stabile per:

$$K > \frac{2(500 + 40\,\mathbf{b} - \mathbf{b}^2)}{5(40 - \mathbf{a} - \mathbf{b})} = K^* \qquad \xrightarrow{a=3,\, b=5} \qquad K^* = \frac{135}{16} = 8.44$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha alla pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{100K^* - 500 - 40\mathbf{b}} \quad \xrightarrow{a=3,\, b=5} \quad \omega^* = 1.9896$$

a.2) Determinare per quale valore $\bar{K}$ di K il sistema retroazionato "stabile" ha i poli alla massima distanza dall'asse immaginario.

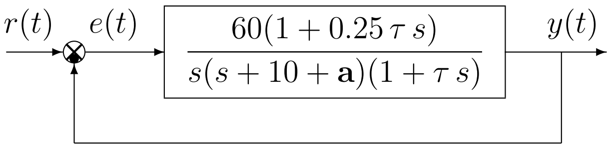
Sol. La massima distanza dei poli dall'asse immaginario si ha quando i 3 poli del sistema retroazionato sono allineati. Tale condizione si calcola facilmente utilizzando il teorema del baricentro:

$$3\sigma_0 = -50 + 10 + \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = \frac{\mathbf{b} - 40}{3} \quad \xrightarrow{b=5} \quad \sigma_0 = -11.66$$

Il corrispondente valore di $\bar{K}$ si calcola nel modo seguente:

$$\bar{K} = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-\sigma_0} = \frac{(\mathbf{b} - 70)(\mathbf{b} + 20)(\mathbf{b} + 110)}{450(3\mathbf{a} + \mathbf{b} - 40)} \quad \xrightarrow{a=3,\, b=5} \quad \bar{K} = 15.97$$

a.3) Tracciare qualitativamente il contorno delle radici del seguente sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".



Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$s(s + 10 + \mathbf{a})(1 + \tau\, s) + 60(1 + 0.25\,\tau\, s) = 0$$

da cui si ricava L'equazione caratteristica $1 + \tau\, G_1(s) = 0$:

$$s(s + 10 + \mathbf{a}) + 60 + \tau\, s[s(s + 10 + \mathbf{a}) + 15] = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\tau\, s[s^2 + (10 + \mathbf{a})s + 15]}{s^2 + (10 + \mathbf{a})s + 60} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$ è mostrato in Fig. 2 quando $a = 3$.

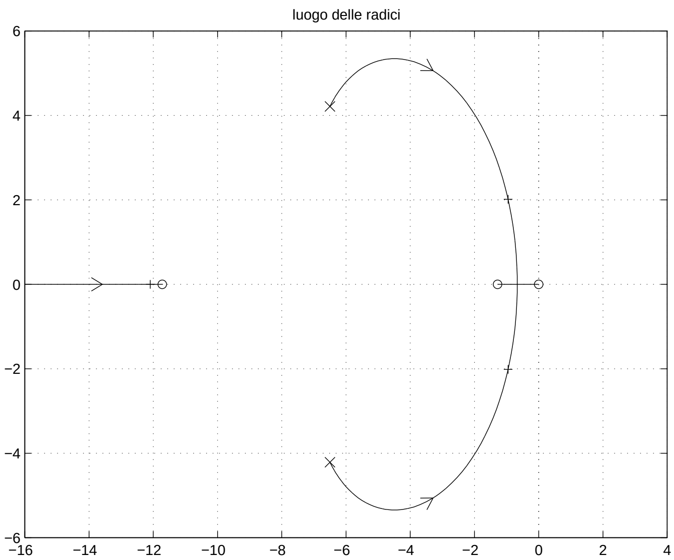
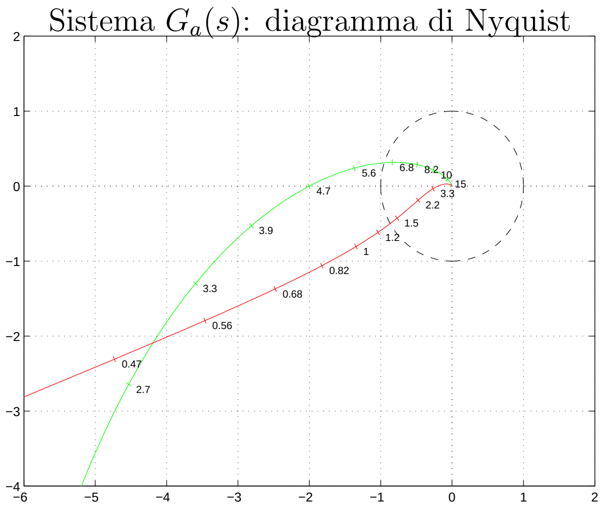
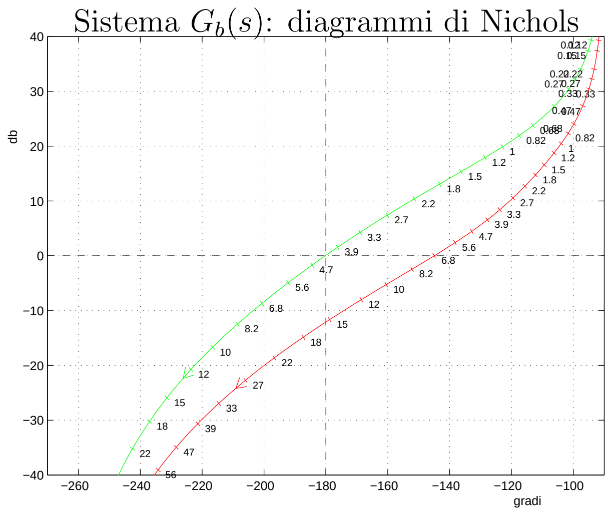


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$ quando $a = 3$.

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:





b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttrice in grado da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 2 + \mathbf{a}$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di ampiezza definisce completamente la posizione del punto B:

$$M_B = \frac{1}{2+\mathbf{a}}, \quad \varphi_B = 180^o \qquad \xrightarrow{a=3,\, b=5} \qquad M_B = 0.2, \quad \varphi_B = 180^o$$

Un punto A ammissibile è quello corrispondente alla pulsazione $\omega = 3.9$:

$$M_A = 2.86, \quad \varphi_A = 190.6^o \qquad \longrightarrow \qquad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0699, \quad \varphi = -10.6^o$$

La rete correttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 1.2727, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi} = 18.5713 \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{1 + 1.2727\, s}{1 + 18.5713\, s}$$

b.2) Sempre per il sistema $G_a(s)$, progettare i parametri K, τ_1 e τ_2 di una rete anticipatrice $C(s) = K\,\dfrac{1+\tau_1\, s}{1+\tau_2\, s}$ in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 45^o$ in corrispondenza della pulsazione $\omega_A = 4.7$;

Sol. La specifica sul margine di fase definisce completamente la posizione del punto B:

$$M_B = 1, \qquad \varphi_B = 225^o$$

Il punto A corrispondente alla pulsazione $\omega = 4.7$ non può essere portato direttamente in B utilizzando una rete anticipatrice:

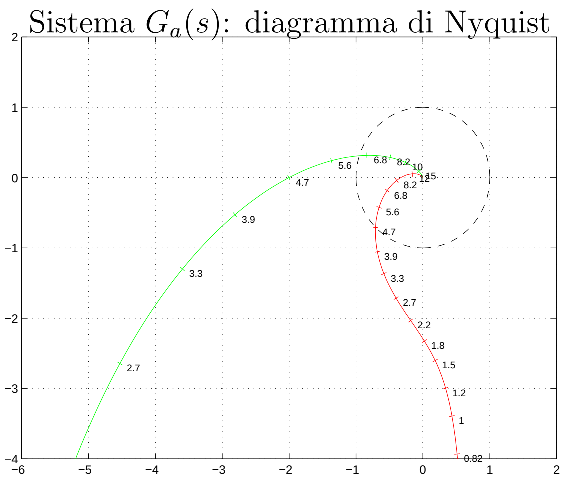
$$M_A = 2, \qquad \varphi_A = 180^o$$

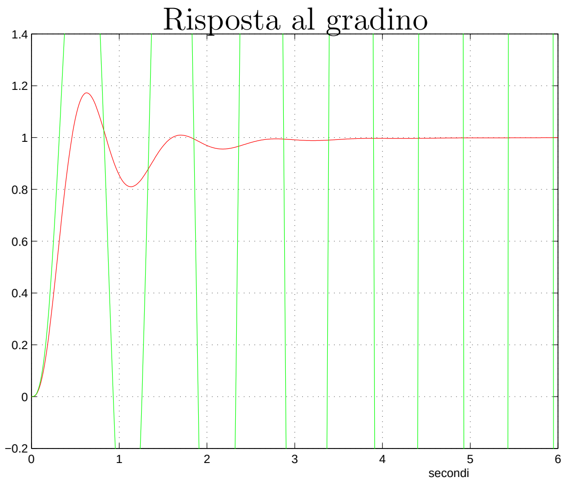
Il punto $A = -2$ può essere portato in $A' = -0.3$ (cioè all'interno della regione di ammissibilità per le reti anticipatrici) utilizzando il guadagno $K = \frac{|A'|}{|A|} = 0.15$:

$$M_{A'} = 0.3, \quad \varphi_{A'} = 180^o \qquad \longrightarrow \qquad M = \frac{1}{M_{A'}} = 3.33, \quad \varphi = 45^o$$

La rete anticipatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 0.7901, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi} = 0.1225 \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{1 + 0.7901\, s}{1 + 0.1225\, s}$$





b.3) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete anticipatrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = (30 + \mathbf{b})^o$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di fase definisce completamente la posizione del punto B:

$$M_B = 1, \qquad \varphi_B = (210 + \mathbf{b})^o$$

Il punto A corrispondente alla pulsazione $\omega = 6.8$ può essere portato in B utilizzando una rete anticipatrice:

$$M_A = 0.3679 = -8.686\text{db}, \qquad \varphi_A = 159.3^o$$

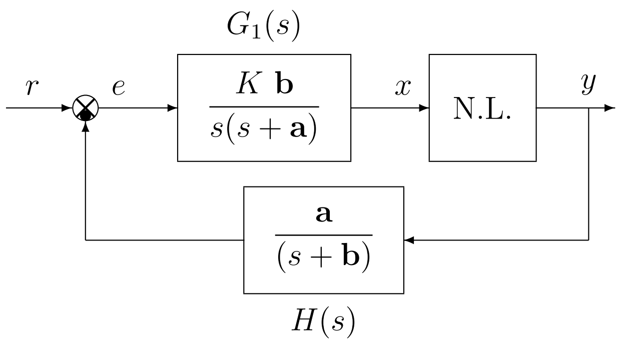
Per $\mathbf{b} = 5$, i parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

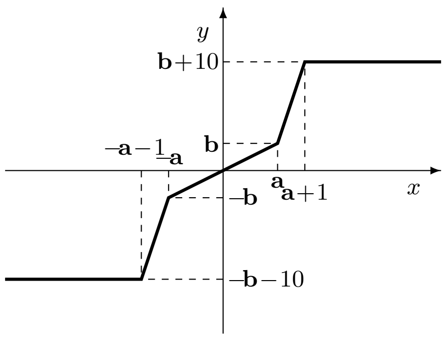
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.7181, \qquad \varphi = 55.7^o$$

La rete anticipatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 0.3835, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi} = 0.0348 \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{1 + 0.3835\, s}{1 + 0.0348\, s}$$

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





c.1) Posto $K = 1$, determinare il punto di lavoro (x_0, y_0) del sistema retroazionato corrispondente al valore d'ingresso $r = 0$. Per $r = \mathbf{b} + 5$ determinare la retta di carico della parte lineare del sistema.

Sol. Il guadagno statico del sistema $G_1(s)$ è infinito per cui la retta di carico è orizzontale:

$$y = \frac{r}{K_2\, K_3} \qquad \text{dove} \qquad K_2 = 1, \quad K_3 = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

Per $r = 0$ e per $r = \mathbf{b} + 5$ le rette di carico sono:

$$y = 0, \qquad y = \frac{(\mathbf{b}+5)\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$

Nel primo caso il punto di lavoro coincide con l'origine.

c.2) Posto $K = 1$, $r = 0$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro.

Sol. Per $r = 0$ il punto di lavoro coincide con l'origine. Le pendenze delle 2 rette che racchiudono a settore tutta la non linearità sono:

$$\alpha = 0, \qquad\qquad \beta = \frac{\mathbf{b}+10}{\mathbf{a}+1}$$

In questo caso il cerchio critico degenera in un semipiano delimitato dalla retta verticale

$$x = -\frac{1}{\beta} = -\frac{\mathbf{a}+1}{\mathbf{b}+10}$$

Per $K = 1$, il guadagno d'anello del sistema è

$$G(s) = G_1(s)\,H(s) = \frac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}{s(s+\mathbf{a})(s+\mathbf{b})}$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ ha un asintoto verticale nella posizione

$$\sigma_a = -\left[\frac{1}{\mathbf{a}} + \frac{1}{\mathbf{b}}\right]$$

Non si ha intersezione tra il semipiano critico e il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ se

$$|\sigma_a| < \frac{1}{\beta} \qquad \to \qquad \left[\frac{1}{\mathbf{a}} + \frac{1}{\mathbf{b}}\right] < \frac{\mathbf{a}+1}{\mathbf{b}+10}$$

cioè se

$$\mathbf{a} > \frac{5 + \sqrt{25 + 10\,\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}^3}}{\mathbf{b}}$$

Per i valori di **a** e **b** che soddisfano la precedente relazione si può concludere che l'origine è un punto di lavoro asintoticamente stabile. In tutti gli altri casi non si può dire niente perchè il criterio del cerchio è solo un criterio sufficiente.

c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, ...) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

Sol. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$ è mostrato in Fig. 3. Il valore iniziale m_0 e il valore massimo m_1 della funzione descrittiva

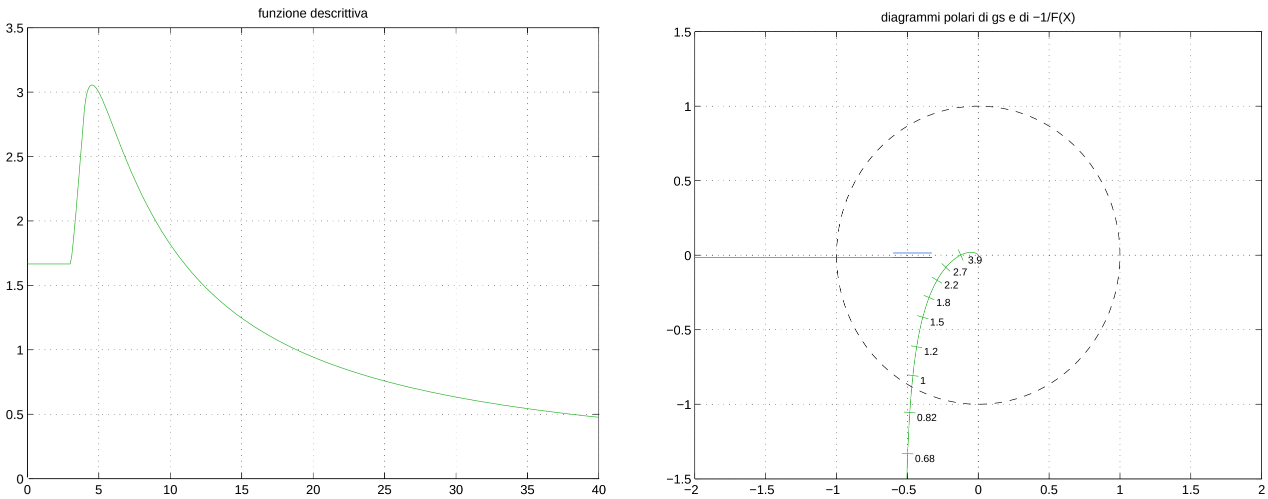


Figura 3: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$.

$F(X)$ valgono $m_1 = 0.6$ e $m_1 = 1.621$.

c.4) Discutere "qualitativamente" (in funzione anche dei parametri m_1 ed m_2) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema G(s) è $K^* = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Al variare di K si hanno quindi queste 3 possibili soluzioni:

1) $0 < K < \dfrac{K^*}{m_1}$: la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.

2) $\dfrac{K^*}{m_1} < K < \dfrac{K^*}{m_0}$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).

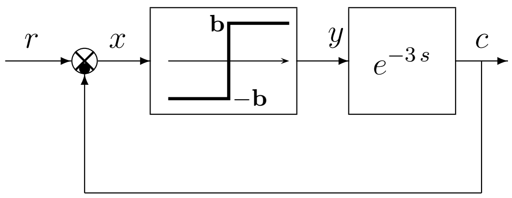
3) $K > \dfrac{K^*}{m_0}$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

c.5) Posto $K = 1$, determinare la pulsazione ω^* degli eventuali cicli limite stabili presente nel sistema retroazionato.

Sol. La pulsazione ω^* degli eventuali cicli limite stabili coincide con la pulsazione del punto di intersezione con il semiasse reale negativo:

$$\omega^* = \sqrt{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} \qquad \xrightarrow{a=3,\ b=5} \qquad \omega^* = \sqrt{15} = 3.873$$

d) Dato il sistema retroazionato riportato a fianco, determinare l'ampiezza X^* e la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta che è presente all'interno del sistema quando $r = 0$.



Sol. La funzione descrittiva del relè ideale è:

$$F(X) = \frac{4\mathbf{b}}{\pi X}$$

Il diagramma di Nyquist del ritardo puro $G(s) = e^{-3\,s}$ è una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine. L'intersezione con il semiasse reale negativo avviene nel punto -1. L'ampiezza X^* dell'oscillazione autosostenuta si ricava quindi direttamente:

$$-\frac{1}{F(X^*)} = -1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{4\mathbf{b}}{\pi X^*} = 1 \qquad \rightarrow \qquad X^* = \frac{4\mathbf{b}}{\pi} \qquad \xrightarrow{b=5} \qquad X^* = \frac{20}{\pi}$$

La pulsazione ω^* che caratterizza questo punto si ricava imponendo l'uguaglianza delle fasi:

$$-3\,\omega^* = -\pi \qquad \rightarrow \qquad \omega^* = \frac{\pi}{3}$$

e) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttrice

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \mathbf{b}\,\frac{1 + 2\,s}{s + \mathbf{a}}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.05$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = D(s)\big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{\mathbf{b}\,(T+2) - 2\,\mathbf{b}\,z^{-1}}{1 + \mathbf{a}T - z^{-1}} = \frac{M(z)}{E(z)}$$

da cui si ricava:

$$m(k) = \frac{1}{1+\mathbf{a}T}\left[m(k-1) + \mathbf{b}\,(T+2)\,e(k) - 2\,\mathbf{b}\,e(k-1)\right]$$

Per $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$ si ottiene:

$$m(k) = 0.8696\,m(k-1) + 8.913\,e(k) - 8.6957\,e(k-1)$$

f) Calcolare la risposta al gradino unitario $x(n) = (1, 1, 1, \ldots)$ del seguente sistema dinamico discreto, partendo da condizioni iniziali nulle:

$$y(n+1) + 0.1\,\mathbf{a}\,y(n) = \mathbf{b}\,x(n)$$

Sol. Utilizzando le Z-trasformate si ottiene:

$$Y(z) = \frac{\mathbf{b}}{z+0.1\,\mathbf{a}}\,X(z) = \frac{\mathbf{b}\,z}{(z+0.1\,\mathbf{a})(z-1)}$$

Scomponendo in fratti semplici si ottiene:

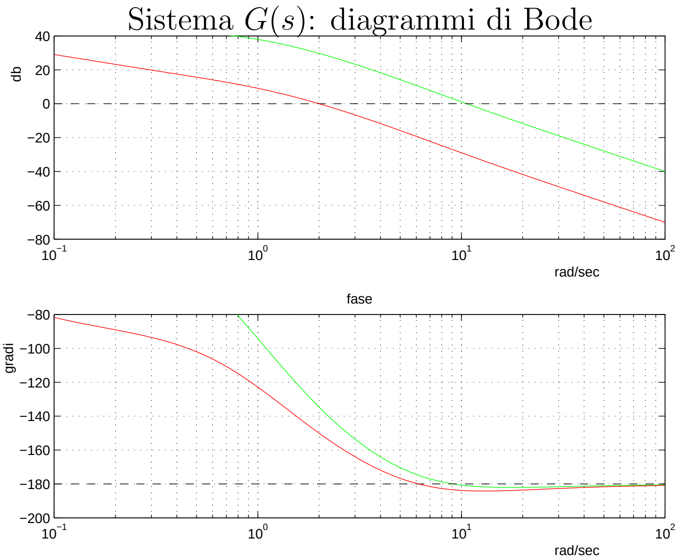
$$Y(z) = \frac{\mathbf{b}\,z}{1+0.1\,\mathbf{a}}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+0.1\,\mathbf{a}}\right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = \frac{\mathbf{b}}{1+0.1\,\mathbf{a}}\left[1 - (-0.1\,\mathbf{a})^n\right]$$

g) Dati i Diagrammi di Bode riportati a fianco, progettare una rete ritardatrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = (30+\mathbf{b})^o$ in corrispondenza della pulsazione $\omega_A = 2$.

Nota: $A = G_b(j\,2) = 30.63\angle{-134.6^o}$.



Sol. Nel caso $\mathbf{b} = 0$, cioè $M_\varphi = 30^o$, i moduli e le fasi dei punti A e B sono univocamente determinati dalle specifiche assegnate:

$$M_B = 1, \quad \varphi_B = 210^o \qquad\qquad M_A = 30.63, \quad \varphi_A = 225.4^o$$

I parametri M, φ e ω da utilizzare per la sintesi della rete ritardatrice sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0326, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -15.4^o, \qquad \omega = 2$$

Utilizzando le formule di inversione si ottiene:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega\,\sin\varphi} = 1.754, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega\,\sin\varphi} = 55.94 \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{1+1.754\,s}{1+55.94\,s}$$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B
27 Marzo 2006 - Domande Teoriche

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considera corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. Il metodo della Trasformata Zeta nella risoluzione delle equazioni alle differenze lineari a parametri concentrati

   ⊗ permette di calcolare la risposta libera del sistema
   ⊗ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   ○ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni lineari tempo-varianti

2. Fornire l'enunciato del Teorema del baricentro: *La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta con ...*
   polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.

3. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale ($r = n - m > 0$ è il grado relativo)

   ⊗ quando $r = 2$ e K_1 è positiva
   ○ quando $r = 2$ e K_1 è negativa
   ○ quando $r = 4$ e K_1 è positiva
   ⊗ quando $r = 4$ e K_1 è negativa

4. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+1)}$ al variare del parametro $K > 0$. Calcolare:

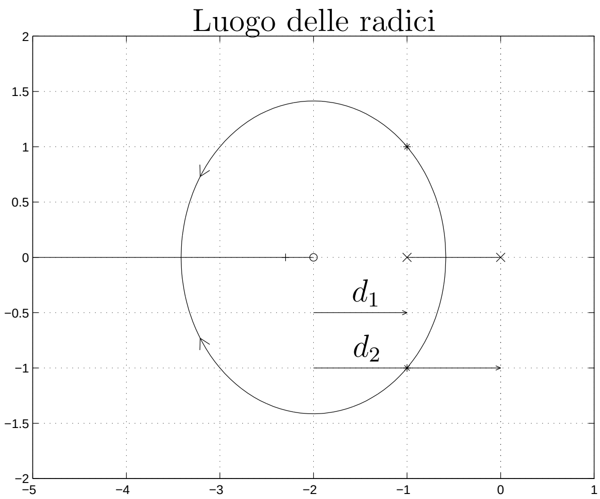
   4.1) La posizione dei 2 punti di diramazione σ_1 e σ_2 presenti sull'asse reale negativo:

   $$\sigma_1 = -2 + \sqrt{d_1 d_2} = -2 + \sqrt{2} = -0.5858$$

   $$\sigma_2 = -2 - \sqrt{d_1 d_2} = -2 - \sqrt{2} = -3.4142$$

   4.2) Per quale valore di $\bar{K}$ di K uno dei 2 poli del sistema retroazionato si trova nella posizione $p = -4$:

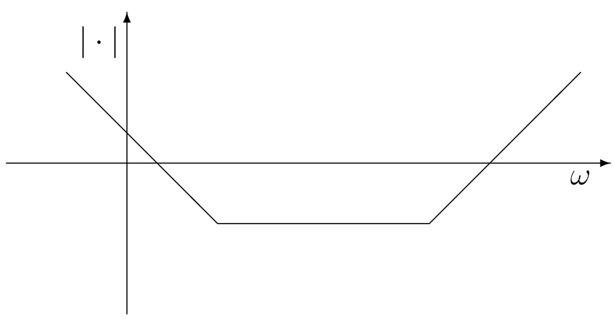
   $$\bar{K} = - \left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=-4} = -\frac{(-4)(-4+1)}{10(-4+2)} = 0.6$$



   4.3) Disegnare "qualitativamente" sul grafico la posizione dei poli a cui corrisponde la massima sovraelongazione del sistema retroazionato alla risposta al gradino. (Vedi gli "*" sul grafico.)

5. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PID e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

   $$G(s) = K\left(1 + T_s s + \frac{1}{T_i s}\right)$$



6. Per poter applicare il criterio del Cerchio ad un sistema $G(s)$ retroazionato su una non linearità $y = f(x)$

   ⊗ la non linearità $y = f(x)$ deve passare per l'origine
   ⊗ la non linearità $y = f(x)$ deve essere di tipo "a settore"
   ○ la non linearità $y = f(x)$ deve essere simmetrica rispetto all'origine

7. Nel piano z i luoghi dei punti a coefficiente di smorzamento δ costante

   ○ sono rette uscenti dall'origine
   ○ sono circonferenze centrate nell'origine
   ⊗ sono tratti di spirali decrescenti verso l'origine

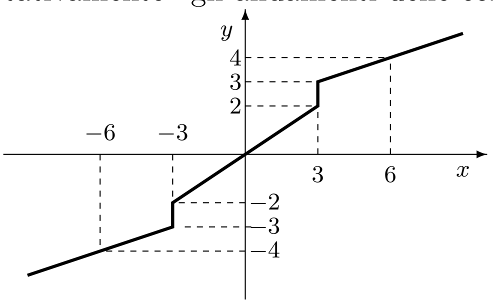
8. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine 0:

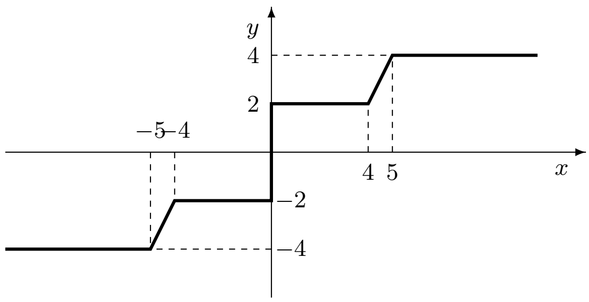
$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

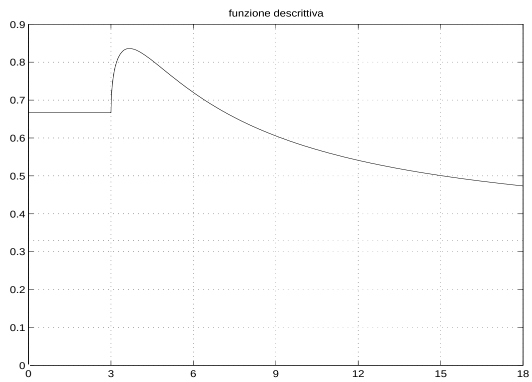
9. Il metodo di discretizzazione di un sistema continuo $D(s)$ mediante trasformazione bilineare con precompensazione centrata sulla pulsazione ω_1 è basata sulla seguente sostituzione

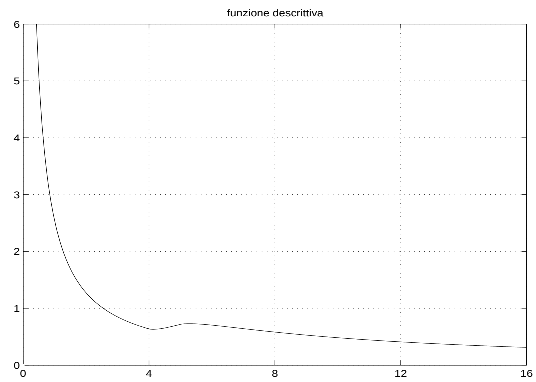
   ○ $s = \frac{2\omega_1}{\tan T\omega_1} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
   ○ $s = \frac{\tan T\omega_1}{2\omega_1} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
   ⊗ $s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{T\omega_1}{2}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
   ○ $s = \frac{\tan \frac{T\omega_1}{2}}{\omega_1} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

10. Date le seguenti caratteristiche non lineari simmetriche rispetto all'origine, determinare "qualitativamente" gli andamenti delle corrispondenti funzioni descrittive $F_1(X)$ ed $F_2(X)$:









11. Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento discreta:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+4}{z^3 + 2\,z^2 + 5\,z + 3} \quad \rightarrow \quad y(n+3)+2\,y(n+2)+5\,y(n+1)+3\,y(n) = x(n+1)+4\,x(n)$$

12. Indicare come si calcola la funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema discreto $G(z)$:

$$F(\omega) = G(e^{j\omega T})$$