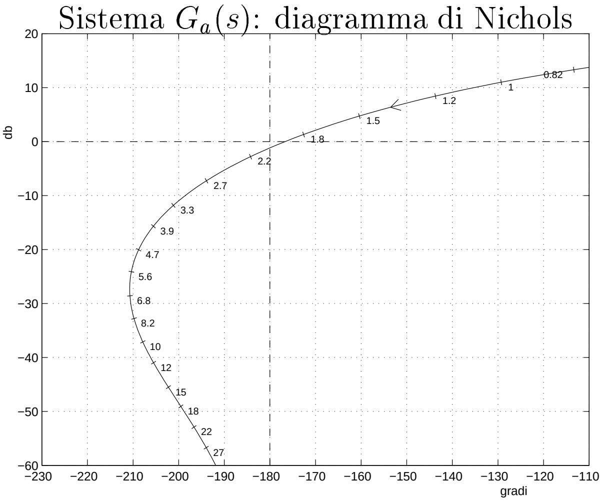
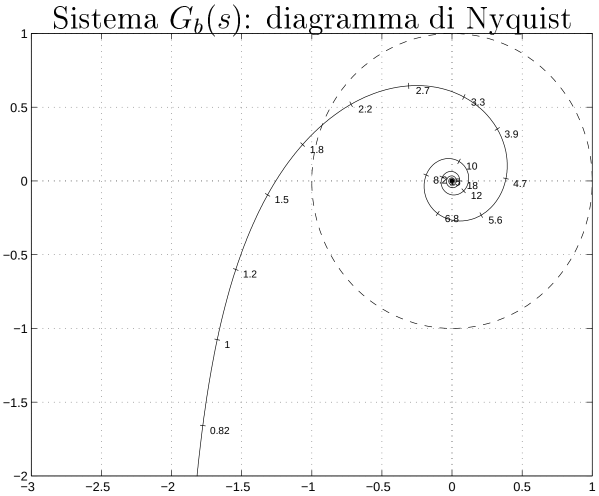
Controlli Automatici B
6 Aprile 2004
Esercizi e Soluzioni

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:

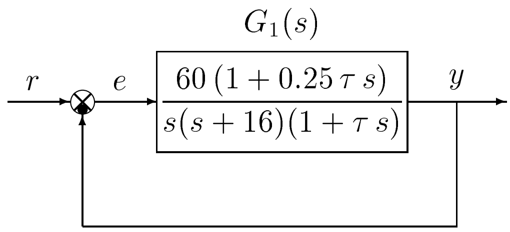




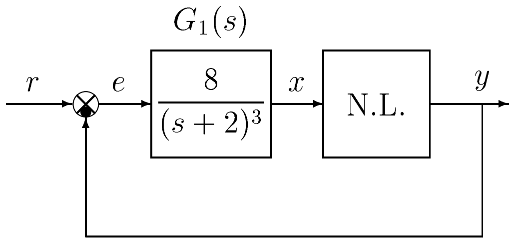
a.1) Per il sistema $G_a(s)$ progettare una rete anticipatrice in modo da imporre al sistema retroazionato un margine di fase $M_\varphi = 40^o$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

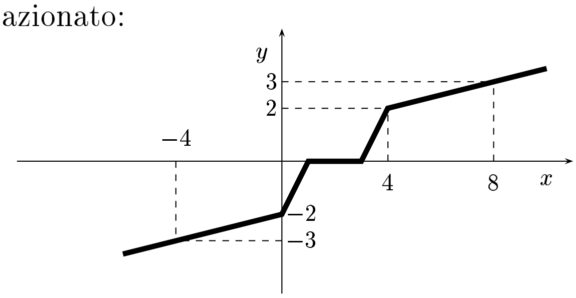
a.2) Per il sistema $G_b(s)$ progettare una rete ritardatrice in grado da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

b) Si consideri il sistema lineare retroazionato riportato a fianco. Tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$.



c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





c.1) Determinare il punto di lavoro $(x_0,\, y_0)$ corrispondente all'ingresso $r = 3$.

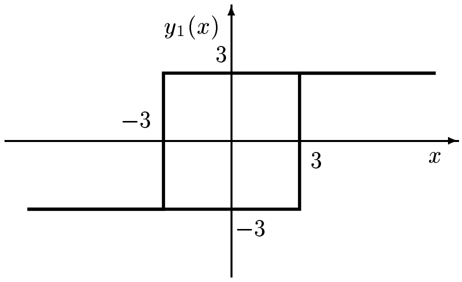
c.2) Determinare se il punto di lavoro $(x_0,\, y_0)$ è asintoticamente stabile in base all'applicazione del criterio del cerchio.

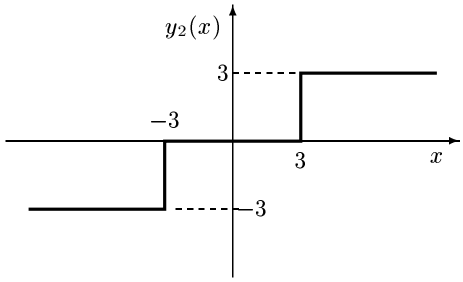
c.3) Determinare per quale valore dell'ingresso r il punto di lavoro del sistema retroazionato si trova in $(x_1,\, y_1) = (2,\, 0)$.

c.4) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto di lavoro $(x_1,\, y_1) = (2,\, 0)$.

c.5) Discutere "qualitativamente" l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare di un guadagno aggiuntivo K messo in cascata al sistema.

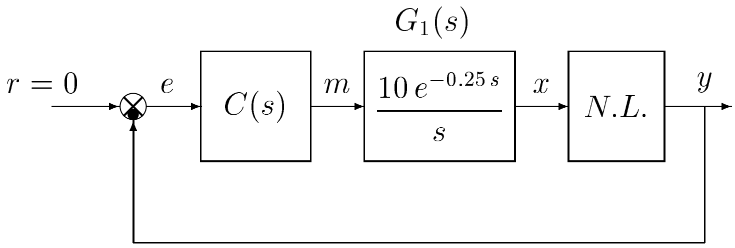
d) Date le seguenti caratteristiche non lineare simmetriche rispetto all'origine:

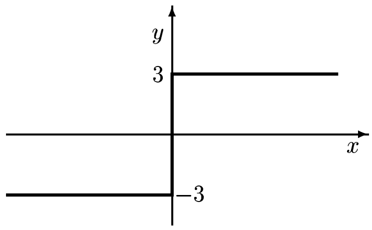




determinare "qualitativamente" gli andamenti delle corrispondenti funzioni descrittive $F_1(X)$ ed $F_2(X)$. Volendo, per la sola funzione $F_1(X)$ ci si può anche limitare a tracciare sul diagramma di Nyquist l'andamento qualitativo della funzione $-1/F_1(X)$.

e) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





e.1) Posto $r = 0$ e $C(s) = 1$, determinare l'ampiezza X_0 e la pulsazione ω_0 dell'oscillazione autosostenuta che si instaura all'interno del sistema retroazionato.

e.2) Sempre per $r = 0$, progettare una rete ritardatrice $C(s) = (1 + \tau_1\, s)/(1 + \tau_2\, s)$ tale da imporre che all'interno del sistema retroazionato sia presente un'oscillazione autosostenuta di ampiezza $X_1 = 2$ e pulsazione $\omega_1 = 4$.

f) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare il seguente regolatore:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 20\frac{s + 30}{s + 40}$$

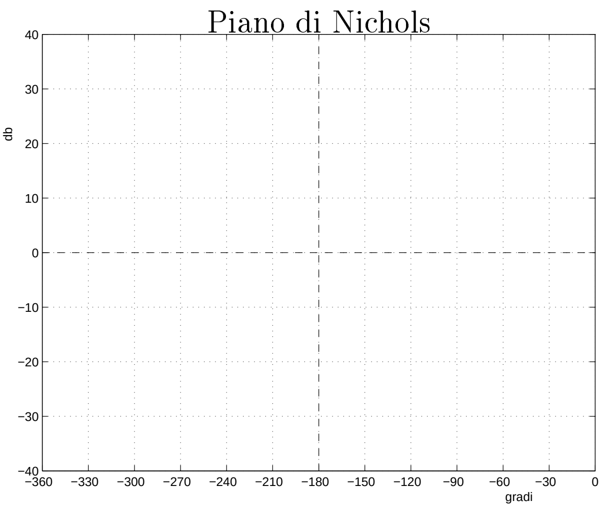
giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$.

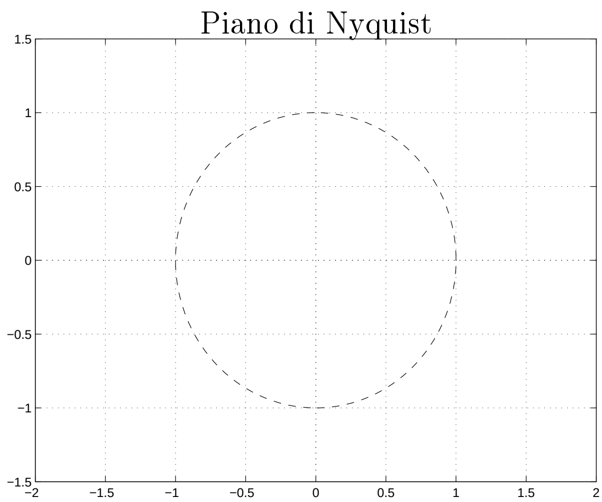
g) Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta $y(n)$ della seguente equazione alle differenze

$$y(n + 1) = 0.5\, y(n) + x(n)$$

quando in ingresso è presente la successione periodica $x(n) = (-1)^n$.

h) Disegnare "qualitativamente" sia sul piano di Nichols che sul piano di Nyquist la regione dei punti del piano che possono essere portati nel punto $B = e^{\frac{5}{4}\pi j}$ utilizzando una rete anticipatrice.





Soluzioni

a.1) La rete anticipatrice $C(s)$ si progetta utilizzando le formule di inversione per portare un punto $A = G_a(j\omega_A)$ della funzione di risposta armonica (per esempio $\omega_A = 3.3$):

$$M_A = |G_a(j\omega_A)| = -11.8 \text{ db} = 0.26, \qquad \varphi_A = \arg[G_a(j\omega_A)] = 158.8^o$$

nel punto $B = e^{j\,220^o}$:

$$M_B = 1, \qquad \varphi_B = 220^o$$

Il guadagno M e l'anticipo φ che la rete anticipatrice deve introdurre alla pulsazione $\omega_1 = 3.3$ per portare A in B valgono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 3.9 \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 220 - 159^o = 61.2^o$$

Utilizzando le formule di inversione si ricavano i seguenti valori di τ_1 e τ_2:

$$\tau_1 = 1.18, \qquad \tau_2 = 0.078,$$

Si ottiene quindi la seguente rete anticipatrice:

$$T(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{1 + 1.18\, s}{1 + 0.078\, s}$$

I diagrammi di Nichols del sistema $G_a(s)$ con e senza rete correttrice sono riportati in Fig. 1. L'andamento temporale delle corrispondenti risposte al gradino unitario sono mostrate in Fig. 2.

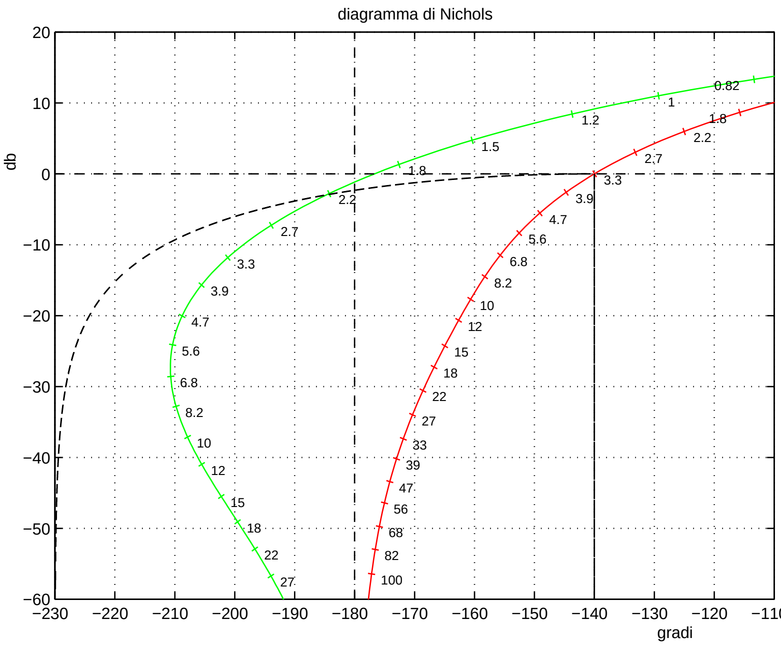


Figura 1: Diagrammi di Nichols del sistema $G_a(s)$ con e senza rete correttrice.

a.2) La rete ritardatrice $C(s)$ si progetta utilizzando le formule di inversione per portare un punto $A = G_b(j\omega_B)$ della funzione di risposta armonica (per esempio $\omega_A = 1$):

$$M_A = |G_b(j\omega_A)| = 2, \qquad \varphi_A = \arg[G_b(j\omega_A)] = 212.7^o$$

nel punto $B = 0.2, \mathbf{e}^{-j\,180^o}$:

$$M_B = 0.2, \qquad \varphi_B = 180^o$$

Il guadagno M e l'anticipo φ che la rete ritardatrice deve introdurre alla pulsazione $\omega_1 = 1$ per portare A in B valgono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1 \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 180 - 212.7^o = -32.7^o$$

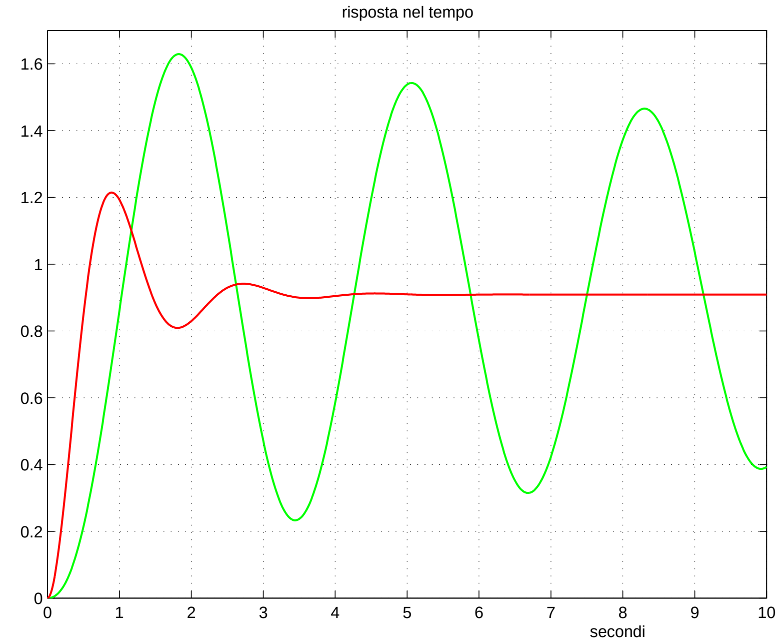


Figura 2: Risposte al gradino unitario del sistema $G_a(s)$ retroazionato con e senza rete correttrice.

Utilizzando le formule di inversione si ricavano i seguenti valori di τ_1 e τ_2:

$$\tau_1 = 1.37, \qquad \tau_2 = 16.85,$$

Si ottiene quindi la seguente rete anticipatrice:

$$T(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{1 + 1.37\, s}{1 + 16.85\, s}$$

Il diagramma di Nyquist del sistema $G_b(s)$ con rete correttrice è riportato in Fig. 3.

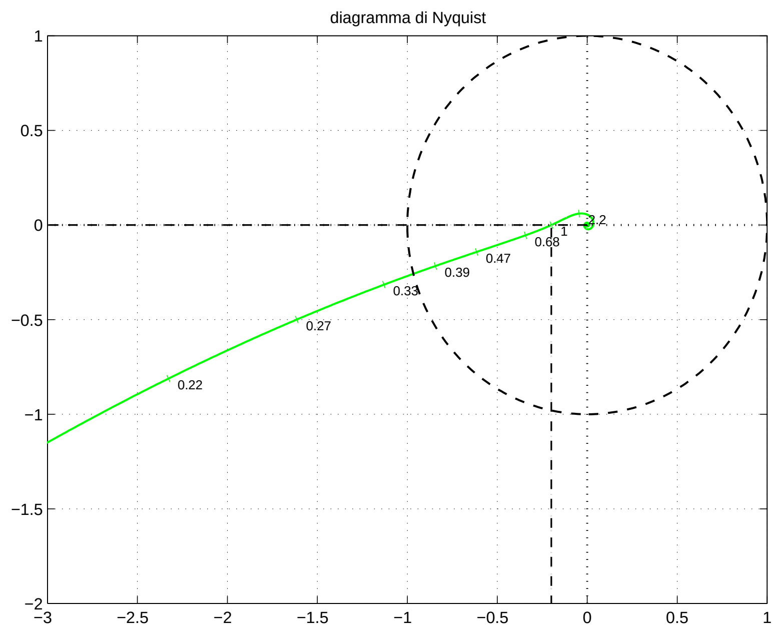


Figura 3: diagramma di Nyquist del sistema $G_b(s)$ con rete correttrice.

b) Applicando il metodo del contorno delle radici, l'equazione caratteristica viene trasformata come segue:

$$1 + \frac{\tau s[s(s+16)+15]}{s(s+16)+60} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + \frac{\tau s[(s+1)(s+15)]}{(s+6)(s+10)} = 0$$

Il corrispondente contorno delle radici è mostrato in Fig. 4.

c.1) Il guadagno statico della funzione $G_1(s)$ è $K_1 = 1$. La retta di carico è quindi la seguente:

$$y = r - x$$

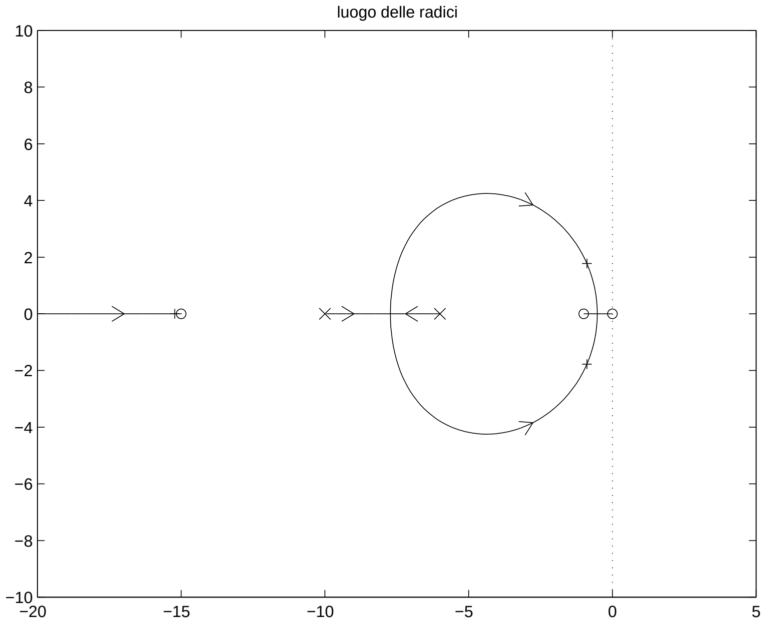


Figura 4: Contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$.

Essendo $r(t) = 3$, il punto di lavoro del sistema è $(3,\, 0)$.

c.2) Rispetto al punto di lavoro, le pendenze α e β del criterio del cerchio valgono

$$\alpha = 0 \qquad\qquad \beta = 2$$

Il cerchio critico in questo caso è un semipiano delimitato dalla retta verticale $\sigma = -0.5$. Il sistema $G_1(s)$ ha un diagramma di Nyquist che interseca il semiasse negativo in

$$\sigma_0 = -\frac{1}{8} \qquad\qquad \omega_0 = \sqrt{12} = 2\tan\frac{\pi}{3}$$

Non vi è quindi intersezione tra il cerchio critico e il diagramma di Nyquist per cui è possibile affermare che $(x_0,\ y_0)$ è un punto di lavoro asintoticamente stabile.

c.3) Utilizzando la precedente retta di carico è facile verificare che il punto di lavoro si trova in $(x_1,\, y_1) = (2,\, 0)$ quando $r = 2$.

c.4) La funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto di lavoro $(x_1,\, y_1) = (2,\, 0)$ è mostrata in Fig. 5.

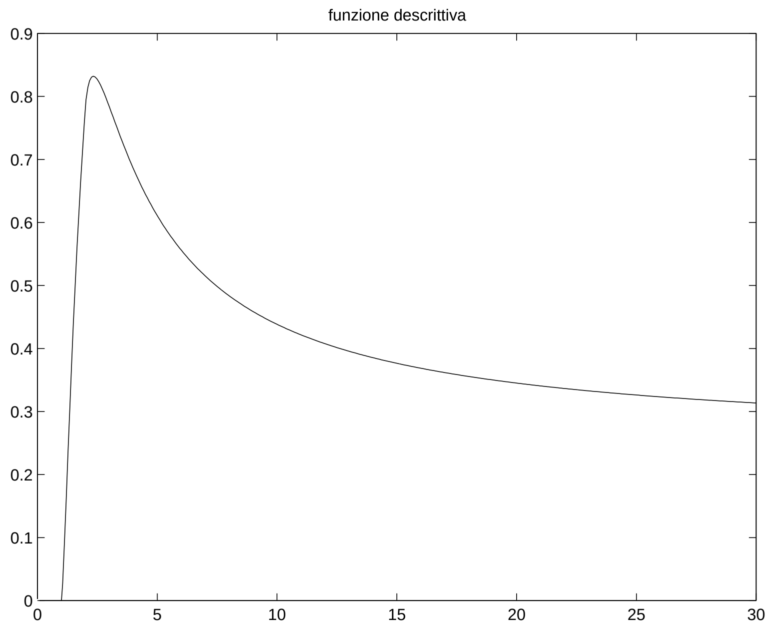


Figura 5: Funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$.

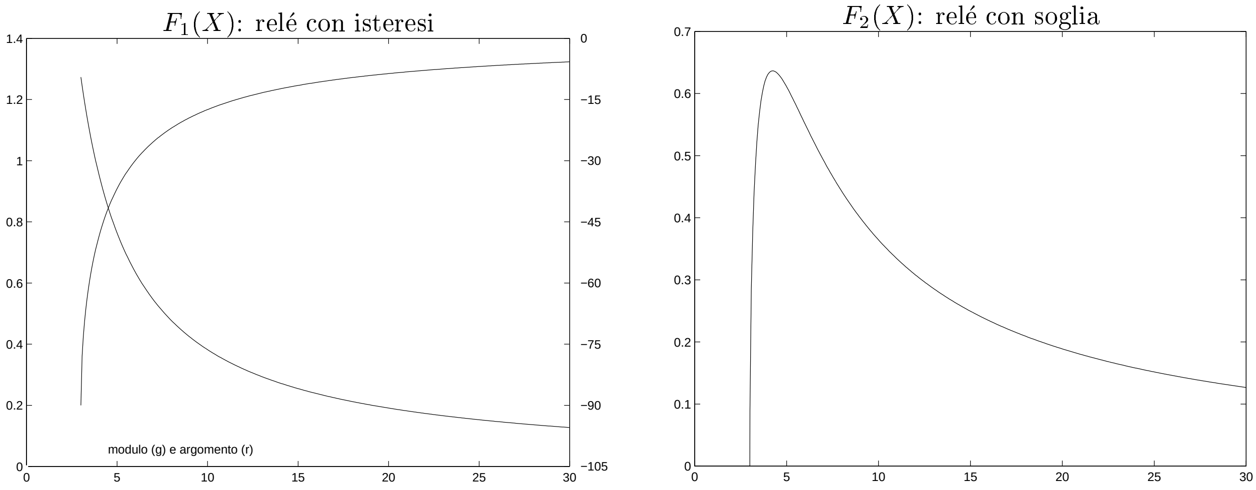


Figura 6: Funzioni descrittive $F_1(X)$ ed $F_2(X)$ del relé con isteresi e del relé con soglia.

c.5) Per valori di K piccoli non vi sono intersezioni con la funzione $-1/F(X)$ per cui non vi sono cicli limite ed il punto di lavoro è asintoticamente stabile. Per valori di K intermedi vi sono 2 cicli limite di cui uno instabile e l'altro stabile. Per valori di K elevati vi è un solo ciclo limite instabile.

d) Le funzioni descrittive $F_1(X)$ ed $F_2(X)$, rispettivamente del relé con isteresi e del relé con soglia, sono mostrate in Fig. 6.

e.1) Posto $r = 0$, il punto di lavoro si trova nell'origine perchè la retta di carico coincide con l'asse delle ascisse. Il diagramma di Nyquist del sistema $G_1(s)$ è mostrato in Fig. 7. La funzione

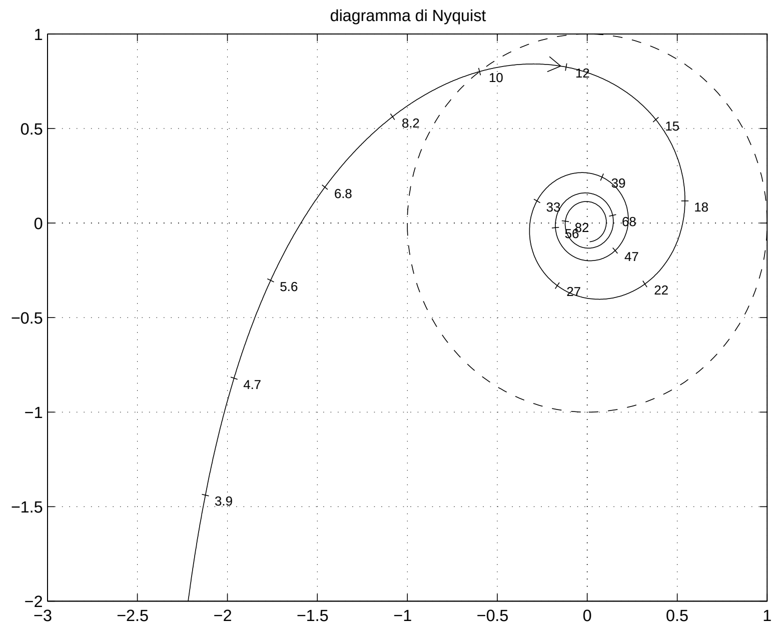


Figura 7: Diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$.

descrittiva $F(X)$ del relè ideale presente all'interno dell'anello di controllo è:

$$F(X) = \frac{4\,Y}{\pi\,X} = \frac{12}{\pi\,X}$$

La pulsazione ω_0 e il margine di ampiezza K_0^* che caratterizzano l'intersezione del sistema con il semiasse reale negativo sono i seguenti:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2\,t_0} = 2\,\pi, \qquad\qquad K_0^* = \frac{\omega_0}{10} = \frac{\pi}{5} = 0.628$$

L'ampiezza X_0 dell'oscillazione autosostenuta presente all'interno del sistema si determina imponendo $F(X_0) = K_0^*$:

$$\frac{12}{\pi\,X_0} = \frac{\pi}{5} \qquad \rightarrow \qquad X_0 = \frac{60}{\pi^2} = 6.08$$

e.2) Per poter avere un'oscillazione autosostenuta di ampiezza $X_1 = 2$, il margine di ampiezza K_1^* del sistema con rete correttrice deve essere il seguente:

$$K_1^* = F(X_1) = \frac{12}{\pi X_1} = \frac{6}{\pi} = 1.91$$

La rete ritardatrice $C(s)$ si progetta utilizzando le formule di inversione per portare il punto $A = G_1(j\omega_1)$:

$$M_A = |G_1(j\omega_1)| = \left|\frac{10}{j\,4}\right| = \frac{10}{4} = 2.5, \qquad \varphi_A = \arg[G_1(j\omega_1)] = -1 - \frac{\pi}{2} = 212.7^o$$

nel punto $B = -1/K_1^*$:

$$M_B = \frac{1}{K_1^*} = \frac{\pi}{6} = 0.524, \qquad \varphi_B = 180^o$$

Il guadagno M e l'anticipo φ che la rete anticipatrice deve introdurre alla pulsazione $\omega_1 = 4$ per portare A in B valgono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{\pi}{15} = 0.2094 \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 180 - 212.7^o = -32.7$$

Utilizzando le formule di inversione si ricavano i seguenti valori di τ_1 e τ_2:

$$\tau_1 = 0.2925, \qquad \tau_2 = 1.8205,$$

Si ottiene quindi la seguente rete anticipatrice:

$$T(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{1 + 0.2925\,s}{1 + 1.8205\,s}$$

I diagrammi di Nyquist del guadagno di anello del sistema con rete correttrice sono riportati in Fig. 8.

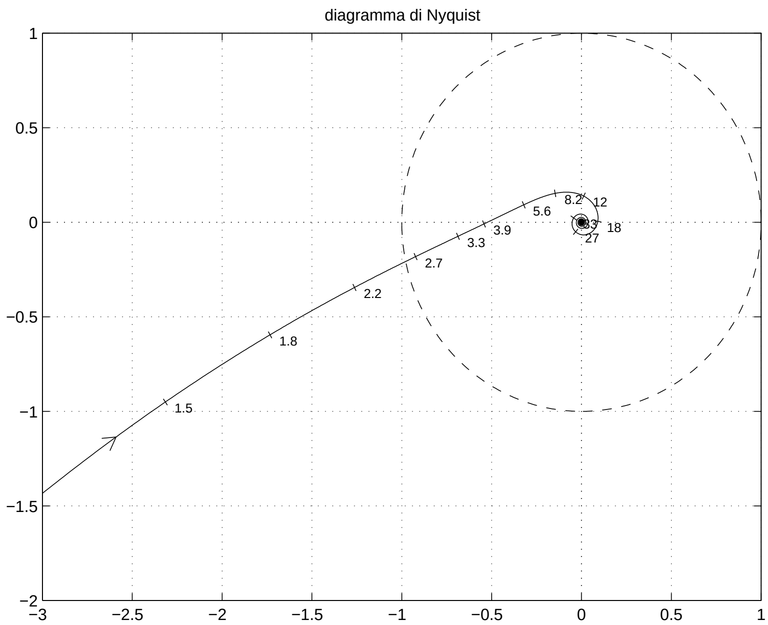


Figura 8: Diagrammi di Nyquist del guadagno di anello del sistema con correttrice.

f) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene

$$D(z) = D(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = 20\,\frac{2(1-z^{-1}) + 30T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1}) + 40T(1+z^{-1})}\bigg|_{T=0.2} = 20\frac{4 + 2\,z^{-1}}{5 + 3\,z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(5 + 3\,z^{-1}) = 20E(z)(4 + 2\,z^{-1})$$

da cui

$$m(k) = \frac{1}{5}[-3\,m(k-1) + 80\,e(k) + 40\,e(k-1)]$$

cioè

$$m(k) = -0.6\,m(k-1) + 16\,e(k) + 8\,e(k-1)$$

g) Dall'equazione alle differenze data si ricava la corrispondente funzione di trasferimento discreta $G(z)$:

$$y(n+1) = 0.5y(n) + x(n) \qquad \rightarrow \qquad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z-0.5}$$

La z-trasformata del segnale di ingresso $x(n) = (-1)^n$ è

$$X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-2}} = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1}$$

Tale espressione si ricava facilmente applicando il teorema dei segnali periodici. La z-trasformata $Y(z)$ del segnale di uscita è quindi

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{z}{(z+1)(z-0.5)}$$

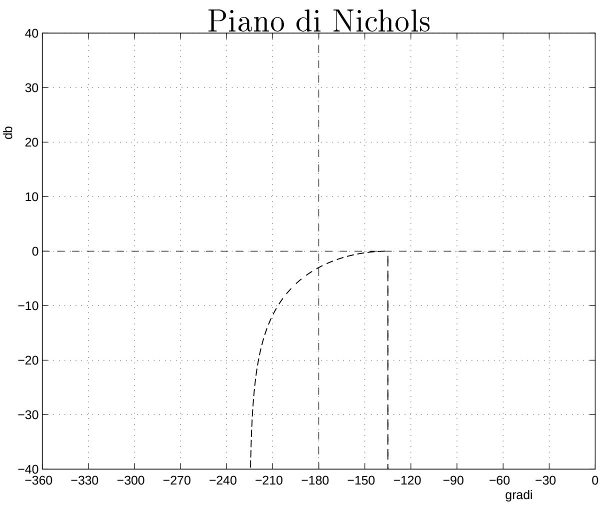
da cui, mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici, si ricava

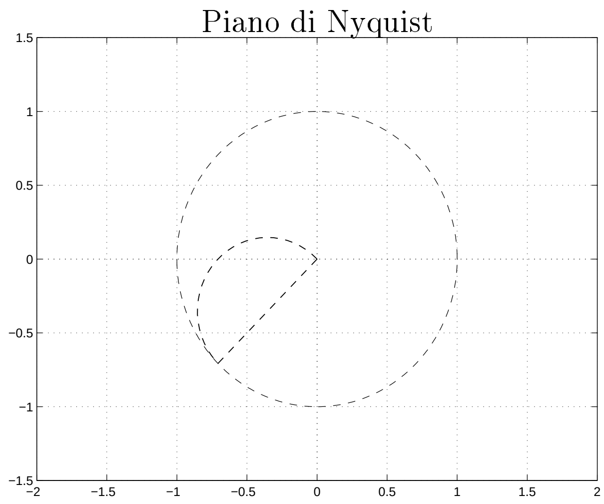
$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z+1)(z-0.5)} = \frac{2}{3(z-0.5)} - \frac{2}{3(z+1)}$$

e quindi

$$Y(z) = \frac{2z}{3(z-0.5)} - \frac{2z}{3(z+1)} \qquad \rightarrow \qquad y(n) = \frac{2}{3}[(0.5)^n - (-1)^n]$$

h) Sul piano di Nichols e sul piano di Nyquist le regioni dei punti del piano che possono essere portati nel punto $B = e^{\frac{5}{4}\pi j}$ utilizzando una rete anticipatrice sono le seguenti:





Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B
6 Aprile 2004 - Domande Teoriche

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considera corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. Per poter applicare il criterio del cerchio, la caratteristica non lineare $y(x)$ deve:

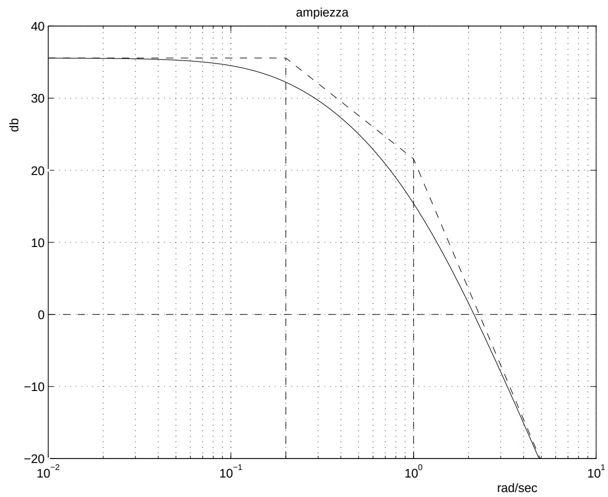
   ◯ essere simmetrica rispetto all'origine
   ⊗ essere ad un sol valore
   ⊗ passare per l'origine

2. Fornire una stima della larghezza di banda ω_f e del tempo di salita t_r del sistema $G_1(s)$ di cui a fianco è riportato il diagramma di Bode dei moduli:

   $\omega_f \simeq 0.2$ $\qquad$ $t_r \simeq 5$ s

   Fornire inoltre una stima della larghezza di banda ω_{f0} e del tempo di salita t_{r0} del corrispondente sistema retroazionato:

   $\omega_{f0} \simeq 2$ $\qquad$ $t_{r0} \simeq 0.5$ s



3. Nel metodo di descretizzazione per "corrispondenza poli/zeri" applicato alla funzione $D(s)$, la compensazione del guadagno k alle alte frequenze prevede l'utilizzo della relazione

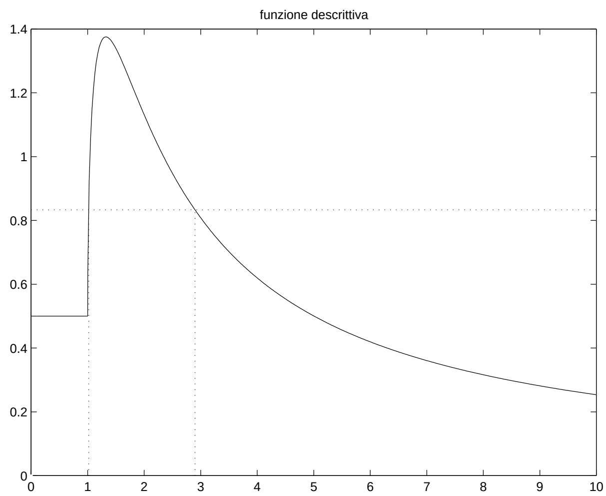
   ◯ $\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{z\to 1} G(z)$
   ◯ $\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{z\to -1} G(z)$
   ⊗ $\lim_{s\to \infty} G(s) = \lim_{z\to -1} G(z)$
   ◯ $\lim_{s\to \infty} G(s) = \lim_{z\to \infty} G(z)$

4. Quella riportata a fianco è la funzione descrittiva $F(X)$ di una non linarità posta in retroazione su di un sistema lineare $G(s)$ il cui diagramma di Nyquist interseca l'asse reale negativo nel punto $\sigma_0 = -1.2$. Fornire una stima dell'ampiezza X^* di ciascun ciclo limite (stabile e instabile) eventualmente presente all'interno del sistema retroazionato:

   $$M_\alpha = -1/\sigma_0 = 0.833$$

   $X_1^* \simeq 1$ $\qquad$ Stabile? $\boxed{\text{si}}$, $\boxed{\text{X}}$

   $X_2^* \simeq 2.9$ $\qquad$ Stabile? $\boxed{\text{X}}$, $\boxed{\text{no}}$



5. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione ed avente un elevato guadagno di anello risulta poco sensibile

   ⊗ ai disturbi additivi agenti sul sistema
   ⊗ alle variazioni parametriche di $G(s)$
   ◯ alle variazioni parametriche di $H(s)$

6. Indicare quali dei seguenti sistemi discreti $G(z)$ hanno una risposta impulsiva oscillatoria-smorzata (cioè cambia di segno e tende asintoticamente a zero):

   ○ $G(z) = \frac{1}{(z-1)}$

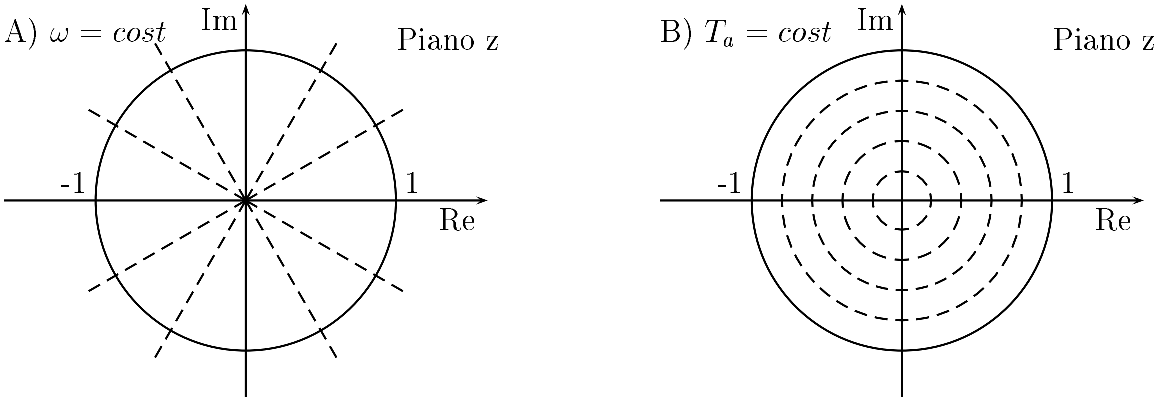
   ○ $G(z) = \frac{1}{(z-0.4)}$

   ⊗ $G(z) = \frac{1}{(z+0.4)}$

   ⊗ $G(z) = \frac{1}{(z^2+0.4)}$

   ○ $G(z) = \frac{1}{(z+2)}$

7. Tracciare qualitativamente sul piano z: A) i luoghi a pulsazione ω costante; B) i luoghi a tempo di assestamento costante



8. Scrivere in funzione delle successioni $x(n)$ e $y(n)$ l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$:

$$G(z) = \frac{2\,z+3}{z^2+5\,z+4} \qquad \rightarrow \qquad y(n+2)+5\,y(n+1)+4\,y(n) = 2\,x(n+1)+3\,x(n)$$

9. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali tempo continui $x(t)$ quando $t = k\,T$:

$$x(t) = 3\,t \quad \leftrightarrow \quad X(z) = \frac{3\,T\,z}{(z-1)^2}, \qquad x(t) = e^{-2\,t} \quad \leftrightarrow \quad X(z) = \frac{z}{(z-e^{-2\,T})}$$

10. Sia $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della successione $x(k)$. Per $n = 1, 2, \ldots$, enunciare il teorema della traslazione nel tempo nei 2 casi a) anticipo, e b) ritardo:

$$a) \qquad \mathcal{Z}[x(t+nT)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right]$$

$$b) \qquad \mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n} X(z)$$

11. Tracciare qualitativamente i diagrammi di bode dei moduli e delle fasi di una rete ritardatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1\,s)}{(1+\tau_2\,s)}$ con $\tau_1 < \tau_2$: