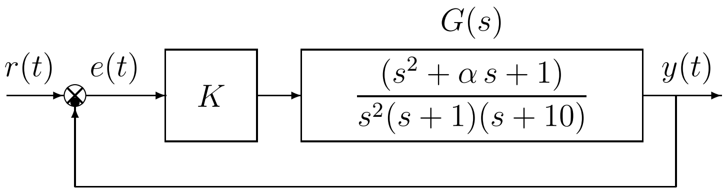
Controlli Automatici B
5 Aprile 2006 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Si risponda alle seguenti domande.

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto $\alpha = 1$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro K. Tracciare il luogo delle radici sia per $K > 0$ che per $K < 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. Posto $\alpha = 1$, l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 1. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

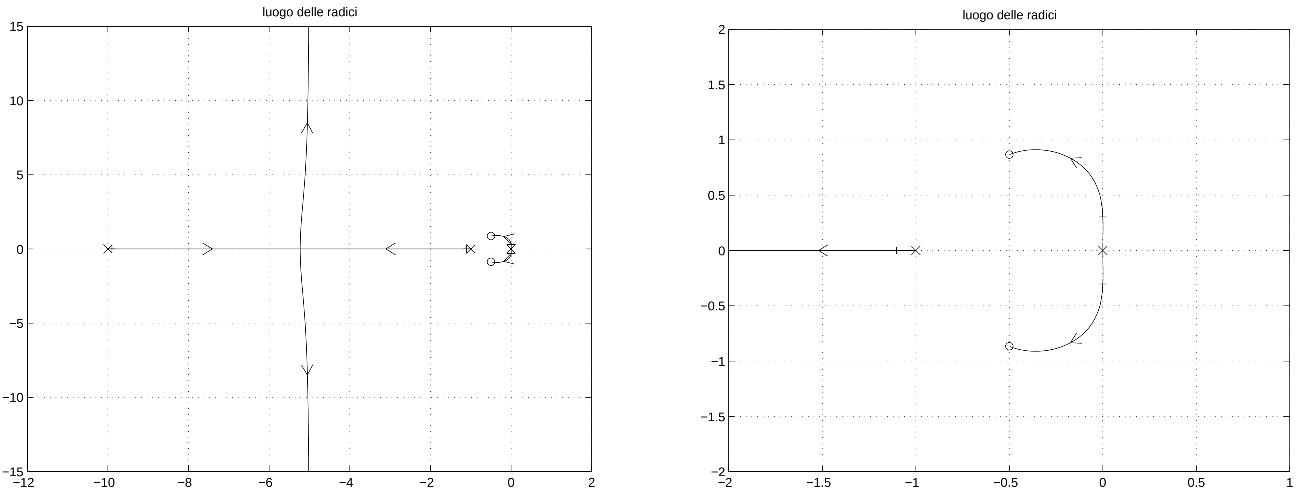


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$. Dettaglio del luogo delle radici.

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-1 - 10 + 1) = 5$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K\,G(s) = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^2(s+1)(s+10) + K(s^2+s+1) = 0$$

$$s^4 + 11\,s^3 + (10+K)s^2 + K\,s + K = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 10+K & K \\ 3 & 11 & K & \\ 2 & 11(10+K) - K & 11\,K & \\ 1 & [11(10+K) - K - 11^2]K & & \\ 0 & 11\,K & & \end{array}$$

Il sistema risulta essere stabile per:

$$110 + 10K - 11^2 > 0 \qquad \rightarrow \qquad K > K^* = 1.1$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha alla pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{11}} = \sqrt{0.1} = 0.3162$$

a.2) Posto $K = 20$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha > 0$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo" Nota: la posizione dei poli del sistema retroazionato quando $K = 20$ e $\alpha = 0$ è la seguente: $p_{1,2} = 0.111 \pm 0.785\, j$ e $p_{3,4} = -5.61 \pm 0.613\, j$.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$s^2(s+1)(s+10) + 20(s^2+1) + 20\alpha\, s = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{20\,\alpha\, s}{s^2(s+1)(s+10) + 20(s^2+1)} = 0$$

da cui si ricava L'equazione caratteristica $1 + \alpha\, G_1(s) = 0$:

$$1 + \frac{20\,\alpha\, s}{[(s-0.111)^2 + 0.785^2][(s+5.61)^2 + 0.613^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 2. Il centro degli

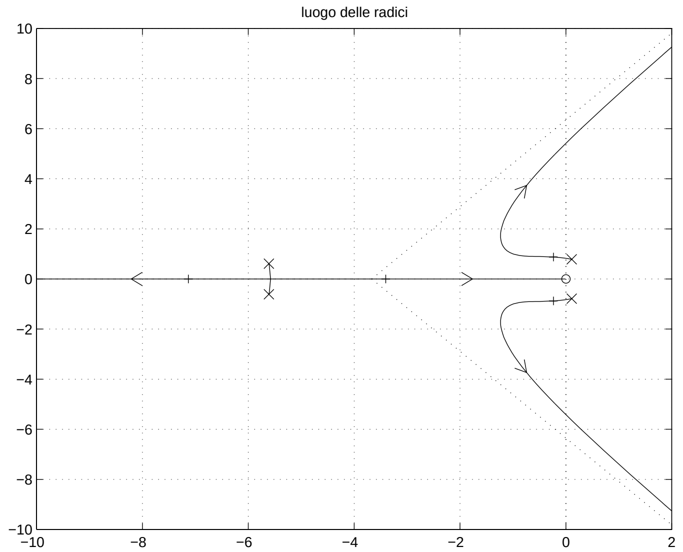
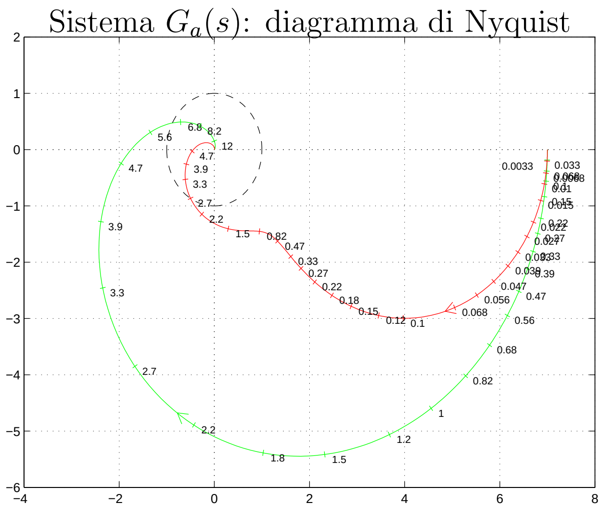


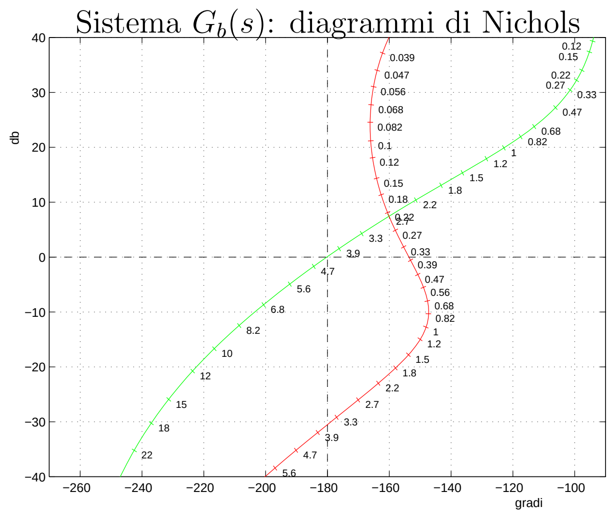
Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}\,(2 \cdot 0.111 - 2 \cdot 5.61) = \frac{11}{3} = -3.66$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:





b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 60^o$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di fase definisce completamente la posizione del punto B:

$$M_B = 1, \quad \varphi_B = 240^o$$

Un punto A ammissibile è quello corrispondente alla pulsazione $\omega = 2.7$:

$$M_A = 4.196, \quad \varphi_A = 246.5^o \qquad \longrightarrow \qquad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.2383, \quad \varphi = -6.5^o$$

La rete correttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega\, \sin\varphi} = 2.471, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega\, \sin\varphi} = 10.48 \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{1 + 2.471\, s}{1 + 10.48\, s}$$

b.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete correttrice in modo da garantire che il sistema compensato passi per il punto $B = (-150^o,\ -15\,\mathrm{db})$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La richiesta di passare per il punto $B = (-150^o,\ -15\,\mathrm{db})$ definisce completamente la posizione del punto B:

$$M_B = -15\,\mathrm{db} = 0.1778, \quad \varphi_B = 210^o$$

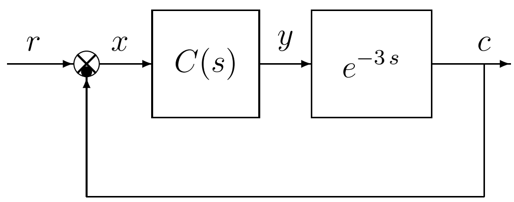
Un punto A ammissibile è quello corrispondente alla pulsazione $\omega = 1.2$:

$$M_A = 17.92\,\mathrm{db} = 7.87, \quad \varphi_A = 231.4^o \qquad \longrightarrow \qquad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0226, \quad \varphi = -21.4^o$$

La rete correttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega\, \sin\varphi} = 2.075, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega\, \sin\varphi} = 98.93 \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{1 + 2.075\, s}{1 + 98.93\, s}$$

c) Dato il sistema retroazionato riportato a fianco, progettare il regolatore $C(s)$ in modo che il sistema retroazionato abbia un errore a regime nullo per ingresso a gradino e un margine di ampiezza $M_a = 4$. Calcolare inoltre la pulsazione ω^*.



Sol. Per potere avere errore a regime nullo il regolatore $C(s)$ deve essere ti tipo integrale:

$$C(s) = \frac{K}{s}$$

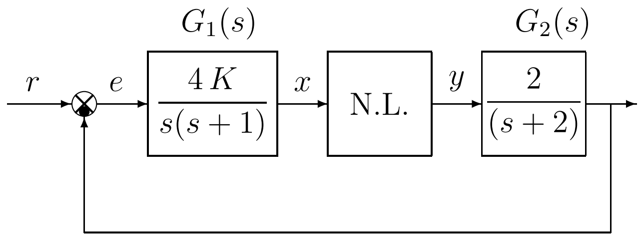
Per $K = 1$, il margine di stabilità e la pulsazione critica del sistema sono:

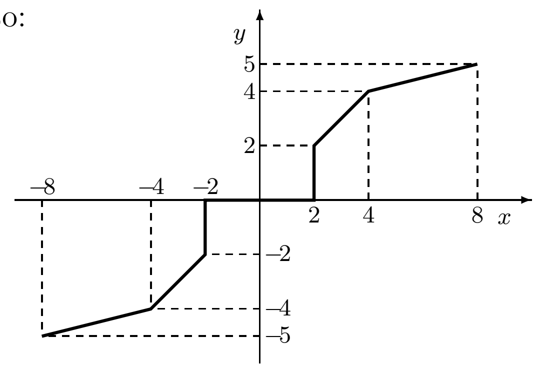
$$K^* = \omega^* = \frac{\pi}{2\, t_0} = \frac{\pi}{6} = 0.536$$

Il valore di K necessario per imporre un margine di ampiezza $M_a = 4$ al sistema compensato si ottiene nel modo seguente:

$$-\frac{K}{K^*} = -\frac{1}{M_a} \qquad \rightarrow \qquad K = \frac{K^*}{M_a} = 0.134$$

d) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





d.1) Posto $K = 1$, determinare il punto di lavoro (x_0, y_0) del sistema retroazionato corrispondente al valore d'ingresso $r = 4$.

Sol. Il guadagno statico del sistema $G_1(s)$ è infinito per cui la retta di carico è orizzontale:

$$y = \frac{r}{K_2\,K_3} = 4 \qquad \text{essendo} \qquad K_2 = 1, \quad K_3 = 1$$

Il punto di lavoro è quindi il punto (4, 4).

d.2) Posto $K = 1$, $r = 4$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro.

Sol. Le pendenze delle 2 rette che racchiudono a settore tutta la non linearità nell'intorno del punto di lavoro (4, 4) sono:

$$\alpha = \frac{1}{4} = 0,25, \qquad \beta = 2$$

In questo caso il cerchio critico inrerseca l'asse relae negativo nei punti

$$-\frac{1}{\alpha} = -4, \qquad -\frac{1}{\beta} = -0.5$$

Per $K = 1$, il guadagno d'anello del sistema è

$$G(s) = G_1(s)\,G_2(s) = \frac{8}{s(s+1)(s+2)}$$

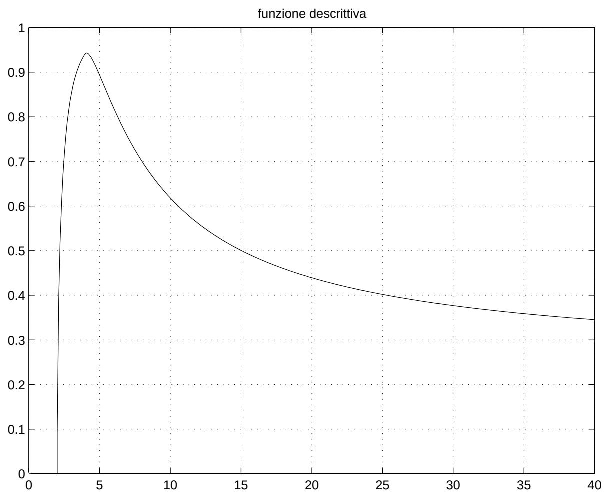
Il margine di ampiezza e la pulsazione critica del sistema $G(s)$ sono

$$K^* = \frac{3}{4}, \qquad \omega^* = \sqrt{2}$$

L'intersezione con il semiasse reale negativo si ha nel punto $-1/K^* = -1.333$ per cui la funzione di risposta armonica del sistema $G(s)$ interseca il cerchio critico e quindi non si può dire niente sulla stabilità o meno del sistema retroazionato perchè il criterio del cerchio è solo un criterio sufficiente.

d.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, ...) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

Sol. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 3. Il valore



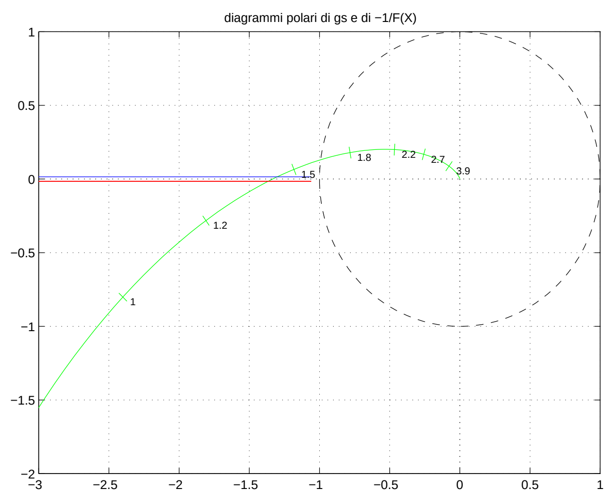


Figura 3: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

massimo m_1 e il valore limite m_2 della funzione descrittiva $F(X)$ valgono $m_1 = 0.9434$, $m_2 = 0.25$.

d.4) Discutere "qualitativamente" (in funzione anche dei parametri m_1 ed m_2) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema G(s) è $K^* = 0.75$. Al variare di K si hanno quindi queste 3 possibili soluzioni:

1) $0 < K < \dfrac{K^*}{m_1} = 0.795$: la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.

2) $0.795 = \dfrac{K^*}{m_1} < K < \dfrac{K^*}{m_2} = 3$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).

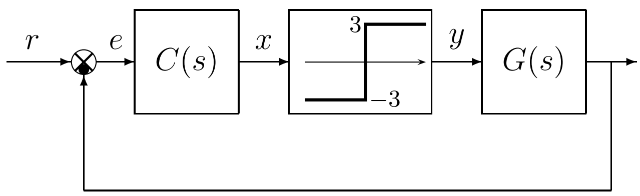
3) $K > \dfrac{K^*}{m_2} = 3$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite instabile.

d.5) Posto $K = 1$, determinare la pulsazione ω^* degli eventuali cicli limite stabili presenti nel sistema retroazionato.

Sol. La pulsazione ω^* degli eventuali cicli limite stabili coincide con la pulsazione del punto di intersezione con il semiasse reale negativo:

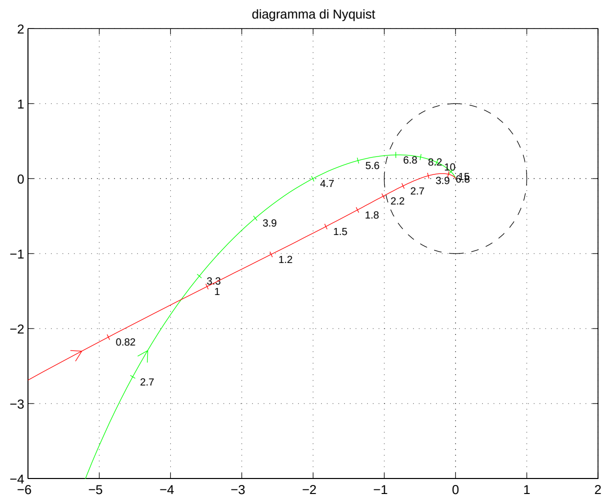
$$\omega^* = \sqrt{2} = 1.41$$

e) Sia dato il sistema retroazionato riportato a fianco, e il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ riportato sotto.



e.1) Posto $C(s) = 1$, determinare l'ampiezza X^* e la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta che è presente all'interno del sistema quando $r = 0$.

e.2) Progettare una erte correttrice $C(s)$, in modo che l'oscillazione autosostenuta che è presente all'interno del sistema quando $r = 0$ sia caratterizzata da un'ampiezza $X^* = 2$ e da una pulsazione $\omega^* = 3.3$.



Sol.

e.1) La funzione descrittiva del relè ideale è:

$$F(X) = \frac{12}{\pi X}$$

L'intersezione della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ con il semiasse reale negativo avviene nel punto -2 in corrispondenza della pulsazione $\omega = 4.7$. Il margine di ampiezza del sistema è quindi $K^* = 0.5$. L'ampiezza X^* dell'oscillazione autosostenuta si ricava imponendo $F(X^*) = K^*$:

$$\frac{12}{\pi X^*} = 0.5 \qquad \rightarrow \qquad X^* = \frac{24}{\pi} = 7.6394$$

e.2) Per poter avere un'oscillazione autosostenuta con ampiezza $X^* = 2$, il margine di ampiezza K^* del sistema compensato dovrà essere uguale a $F(X^*)$:

$$K^* = \frac{12}{\pi X^*} = \frac{6}{\pi} = 1.91 \qquad \rightarrow \qquad B = -\frac{1}{K^*} = -0.5236$$

Modulo e fase del punto B:

$$M_B = 0.5236, \quad \varphi_B = 180^o$$

Il punto A è quello corrispondente alla pulsazione $\omega = 3.3$:

$$M_A = 3.822, \quad \varphi_A = 199.1^o \qquad \longrightarrow \qquad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.137, \quad \varphi = -19.1^o$$

La rete correttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 0.7482, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi} = 5.8846 \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{1 + 0.7482\, s}{1 + 5.8846\, s}$$

f) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare la seguente rete correttrice

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 3\, \frac{s+1}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = D(s)\big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = 3\, \frac{20(1-z^{-1}) + (1+z^{-1})}{20(1-z^{-1})} = \frac{3.15 - 2.85\, z^{-1}}{(1-z^{-1})} = \frac{M(z)}{E(z)}$$

da cui si ricava:

$$m(k) = m(k-1) + 3.15\, e(k) - 2.85\, e(k-1)$$

g) Calcolare la risposta all'impulso unitario $x(n) = (1, 0, 0, \ldots)$ del seguente sistema dinamico discreto, partendo da condizioni iniziali nulle:

$$y(n+2) - 0.4\; y(n+1) - 0.6\; y(n) = 2\, x(n+1)$$

Sol. Utilizzando le Z-trasformate si ottiene:

$$Y(z) = \frac{2\, z}{z^2 - 0.4\, z - 0.6}\, X(z) = \frac{2\, z}{(z-1)(z+0.6)}$$

Scomponendo in fratti semplici si ottiene:

$$Y(z) = z \left[\frac{1.25}{z-1} - \frac{1.25}{z+0.6} \right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 1.25\, [1 - (-0.6)^n]$$

Controlli Automatici B
5 Aprile 2006 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considera corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. Il metodo di Ziegler-Nichols per determinare i valori di primo tentativo dei parametri di un regolatore standard PID

   ⊗ richiede la conoscenza della risposta al gradino del sistema da controllare
   ○ richiede la conoscenza della risposta impulsiva del sistema da controllare
   ○ richiede la conoscenza esatta del modello del sistema da controllare
   ⊗ è applicabile in modo approssimato anche al controllo di sistemi non lineari

2. Sia $Y(X)\sin(\omega t + \varphi(X))$ la fondamentale del segnale periodico $y(t)$ presente all'uscita della nonlinearità algebrica $y(t) = f[x(t)]$ in risposta all'ingresso $x(t) = X\sin(\omega t)$. La funzione descrittiva $F(X)$ è definita nel modo seguente:

$$F(X) = \frac{Y(X)}{X}\, e^{j\varphi(X)}$$

3. Calcolare la funzione di trasferimento $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$4\,y(k) + 2\,y(k-1) + y(k-2) = 5\,x(k-1) + 3\,x(k-2) \qquad \rightarrow \qquad G(z) = \frac{5\,z+3}{4\,z^2+2\,z+1}$$

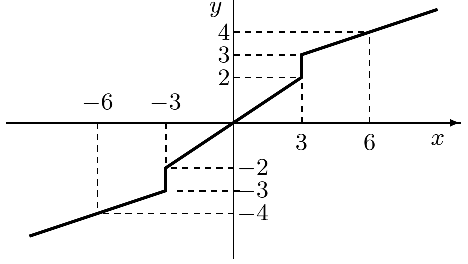
4. Sia $G(z)$ la trasformata Z della successione numerica $g(k)$. Scrivere gli enunciati dei teoremi del valore iniziale e del valore finale:

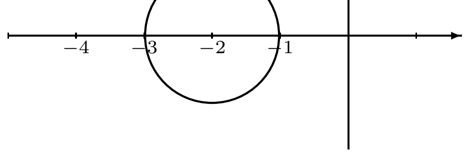
$$g(0) = g(k)|_{k=0} = \lim_{z\to\infty} G(z) \qquad\qquad \lim_{k\to\infty} g(k) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})G(z)$$

5. Tipicamente, quali delle seguenti reti correttrici è bene utilizzare se si vuole stabilizzare in retroazione un sistema caratterizzato da un margine di fase fortemente negativo?

   ○ un regolatore PD;
   ⊗ un regolatore PI;
   ○ una rete anticipatrice;
   ⊗ una rete ritardatrice;

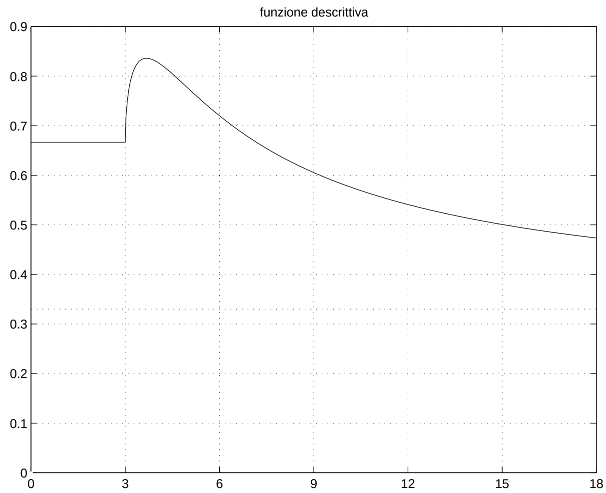
6. Sia (0, 0) il punto di lavoro. Disegnare il cerchio critico corrispondente alle seguente non linearità:





7. Quella riportata a fianco è la funzione descrittiva $F(X)$ di una non linarità posta in retroazione su di un sistema lineare $G(s)$ caratterizzato da un margine di ampiezza $M_\alpha = 0.6$. Fornire una stima dell'ampiezza X^* di ciascun ciclo limite (stabile e instabile) eventualmente presente all'interno del sistema retroazionato:

   $X_1^* = 9$ Stabile? $\boxed{\text{si}}$



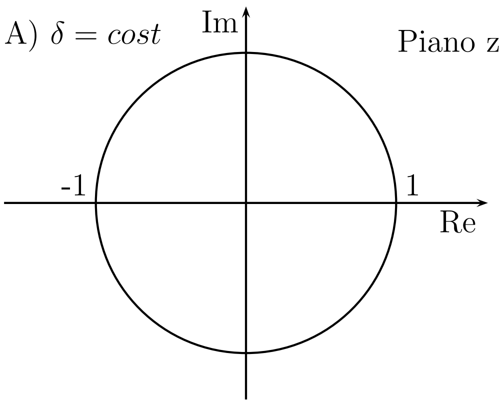
8. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = y_0$:

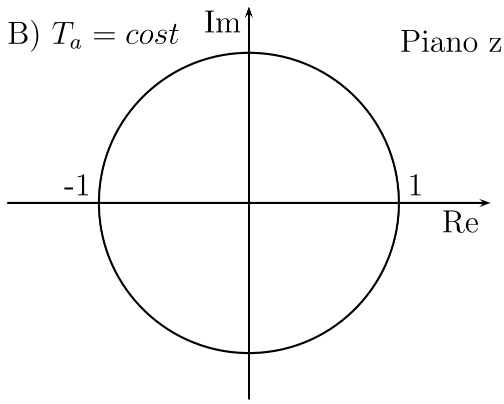
$$y(n+1) = 0.3\,y(n) \qquad \rightarrow \qquad y(n) = y_0\,(0.3)^n$$

9. Indicare quale dei seguenti sistemi discreti $G(z)$ ha la risposta impulsiva $g(k)$ che tende a zero più rapidamente:

   ○ $G(z) = \frac{1}{(z-0.3)}$
   ○ $G(z) = \frac{1}{(z-0.8)}$
   ⊗ $G(z) = \frac{1}{z^2(z+0.2)}$
   ○ $G(z) = \frac{1}{z(z+0.3)}$

10. Tracciare qualitativamente sul piano z: A) i luoghi a coefficiente di smorzamento δ costante; B) i luoghi a decadimento esponenziale costante





11. Tracciare qualitativamente i diagrammi di bode dei moduli e delle fasi di una rete anticipatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1\, s)}{(1+\tau_2\, s)}$ con $\tau_1 > \tau_2$: