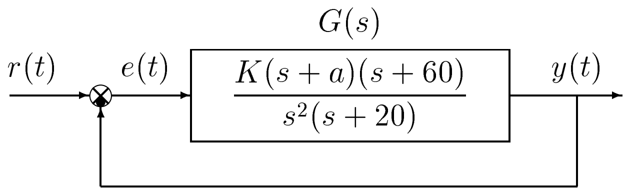
**Controlli Automatici - Secondo Compito**
**17 Maggio 2001 - Esercizi**

**Compito Nr.** $a =$

| Nome: | |
|---|---|
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad $a$ il valore assegnato e si risponda alle domande.

1. Sia dato il seguente sistema in retroazione:




1.a) Determinare per quali valori del parametro $K$ il sistema retroazionato è stabile.

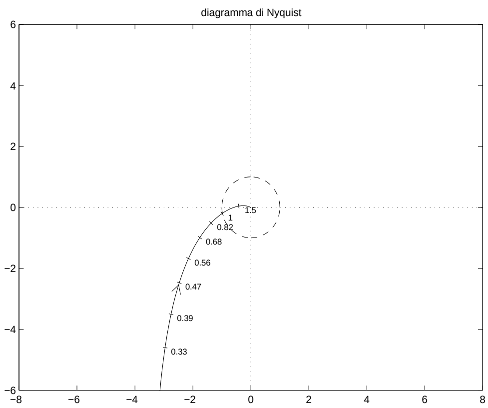
1.b) Posto $K = 20$, determinare l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato in risposta ai seguenti segnali si ingresso: a) $r(t) = 2$, b) $r(t) = 3\,t$, c) $r(t) = t^2$.

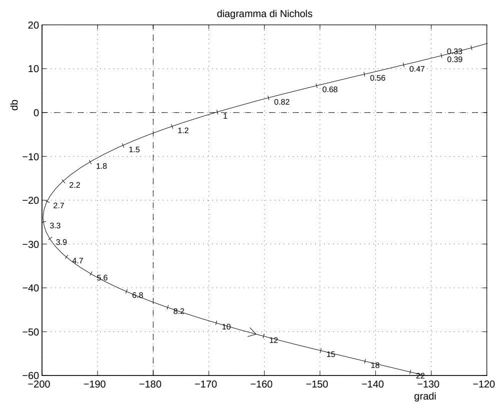
1.c) Tracciare qualitativamente il *luogo delle radici* della funzione $G(s)$ al variare del parametro $K$. Tracciare il luogo delle radici sia per $K > 0$ che per $K < 0$. Calcolare esattamente le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario. Determinare la posizione dei punti di diramazione solo in modo "qualitativo".

1.d) Posto $K = 20$, tracciare qualitativamente il *contorno delle radici* del sistema retroazionato al variare del parametro $a > 0$. Calcolare esattamente:
a) la posizione degli asintoti;
b) il minimo tempo di assestamento $T_a^*$ del sistema retroazionato;
c) il valore $a^*$ di $a$ corrispondente al minimo tempo di assestamento $T_a^*$;
d) per quali valori di $a$ il sistema retroazionato è stabile;

2) Si faccia riferimento hai seguenti diagrammi di Nyquist e di Nichols della funzione $G_1(s)$:

$$G_1(s) = \frac{0.02(s+10)^2}{s(s+1)^2}$$




Con il grado di precisione consentito dai due diagrammi, determinare i seguenti parametri:
a) disegnare il diagramma polare "completo" (chiudere il diagramma all'infinito);
b) dire se in base al criterio di Nyquist il sistema retroazionato è stabile: no □; si □;
c) il margine di fase del sistema: $M_F = \ldots$
d) il margine di ampiezza del sistema: $M_A = \ldots$
e) determinare per quali valori di $\omega$ il luogo delle radici della funzione $G_1(s)$ interseca l'asse immaginario: $\omega_1 = \ldots\ldots$, $\omega_2 = \ldots\ldots$
f) determinare per quali valori di $K$ il sistema $K\,G_1(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile: ............
g) fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato: $\omega_{f0} = \ldots$

3) Sia dato il seguente sistema:

$$G_2(s) = \frac{K\,e^{-2\,s}}{a\,s}$$

Determinare per quali valori di $K > 0$ il corrispondente sistema retroazionato è stabile.

1.a) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1+\frac{K(s+a)(s+60)}{s^2(s+20)}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^3+(20+K)\,s^2+K(60+a)s+60\,K\,a=0$$

a cui corrisponde la seguente tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc|cc}
3 & 1 & K(60+a) & & \\
2 & 20+K & 60\,K\,a & \rightarrow & K>-20 \\
1 & (20+K)K(60+a)-60\,K\,a & & \rightarrow & K[(20+K)(60+a)-60\,a]>0 \\
0 & 60\,K\,a & & \rightarrow & K>0
\end{array}$$

Quindi, il sistema retroazionato risulta stabile se:

$$K>\frac{40a-1200}{60+a}=K^* \tag{1}$$

In corrispondenza del valore $K=K^*$, il sistema retroazionato presenta una coppia di poli complessi coniugati sull'asse immaginario caratterizzati dalla pulsazione:

$$\omega^*=\sqrt{40a-1200}$$

1.b) Per $K=20$ il sistema retroazionato è stabile. Siccome il sistema è di tipo 2, presenta un errore a regime nullo per ingresso a gradino e per ingresso a rampa. Nel caso di ingresso parabolico, l'errore a regime è costante e vale:

$$e_a=\frac{R_0}{K_a}=\frac{2}{60\,a}=\frac{1}{30\,a}$$

1.c) L'andamento qualitativo del luogo delle radici della funzione $G(s)$ per $a=40$ e $K>0$ è riportato in Fig. 1. Il luogo delle radici per $a=40$ e $K<0$ è riportato in Fig. 2 Le intersezioni con l'asse

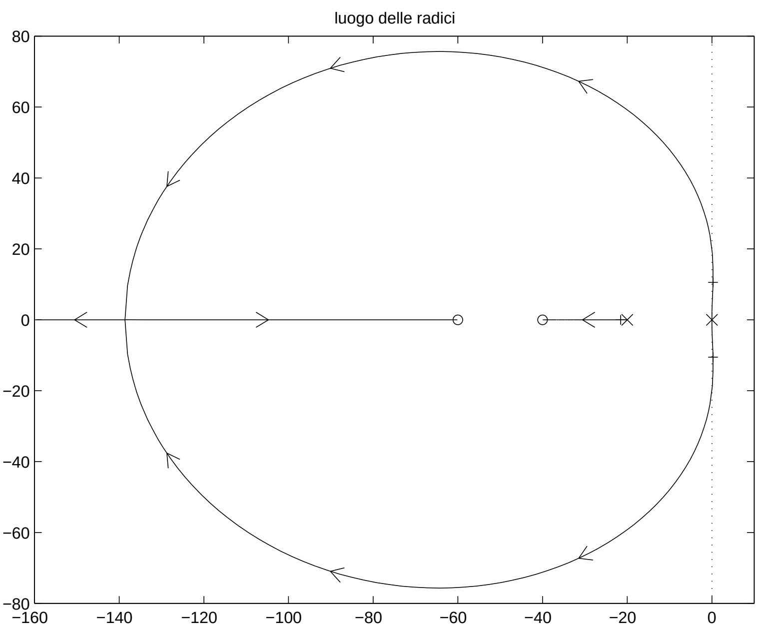



Figura 1: Luogo delle radici della funzione $G(s)$ per $a=40$ e $K>0$.

immaginario si hanno in corrispondenza dei valori di $K^*$ e di $\omega^*$ trovati al punto 1.a).

1.d) Posto $K=20$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato diventa:

$$1+\frac{20(s+a)(s+60)}{s^2(s+20)}=0$$

Se si esplicita il parametro $a$ si ottiene:

$$1+a\frac{20(s+60)}{s^2(s+20)+20s(s+60)}=0 \qquad \rightarrow \qquad 1+a\frac{20(s+60)}{s(s^2+40s+1200)}=0$$

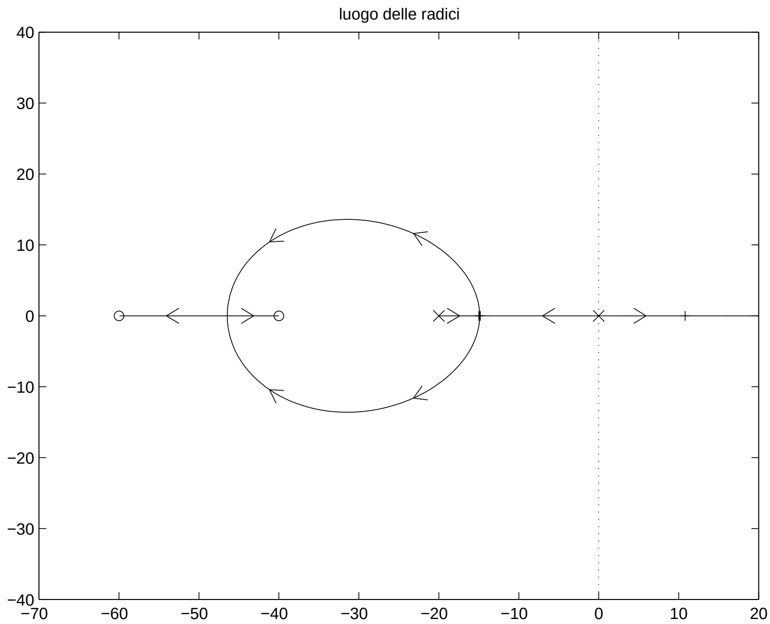



Figura 2: Luogo delle radici della funzione $G(s)$ per $a = 40$ e $K < 0$.

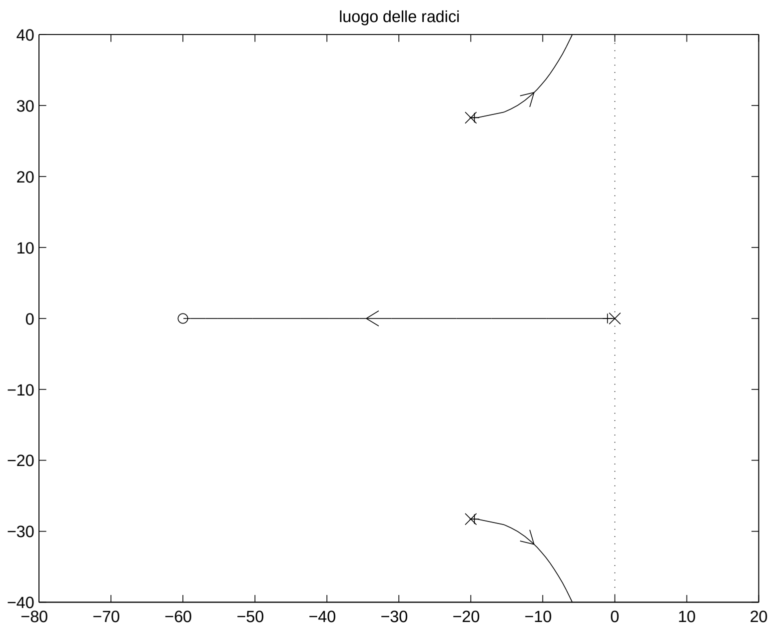



Figura 3: Contorno delle radici.

Il sistema ha 3 poli: uno nell'origine e gli altri due in $s_{12} = -20 \pm j20\sqrt{2}$. L'andamento qualitativo del il contorno delle radici riportato in Fig. 3.

a) Il contorno ha 2 asintoti verticali il cui centro è

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(-20 - 20 + 60) = 10$$

b) La condizione di minimo tempo di assestamento si ha quando le 3 radici del sistema sono allineate, cioè quando (in base al teorema del baricentro):

$$\sum_i p_i = -3\sigma_a = -40 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_a = \frac{40}{3}$$

Il tempo di assestamento vale quindi

$$T_a = \frac{3}{\sigma_a} = \frac{9}{40}$$

c) Il valore di $a^*$ si calcola nel modo seguente:

$$a^* = -\frac{1}{G(s)}\bigg|_{s=-\sigma_a} = 12.06$$

d) I valori di $a$ per cui il sistema retroazionato è stabile si determinano risolvendo la disequazione (1) rispetto ad $a$ dopo aver posto $K = 20$:

$$20 > \frac{-1200 + 40a}{60 + a} \qquad \rightarrow \qquad 0 < a < 120 = a^*$$

2) Facendo riferimento ai due diagrammi si ottiene che:

a) il diagramma polare "completo" si chiude all'infinito inserendo una semicirconferenza percorsa in senso orario che parte dall'alto e termina in basso;
b) in base al criterio di Nyquist il sistema retroazionato **è stabile**;
c) il margine di fase del sistema è $M_F \simeq 12^o$;
d) il margine di ampiezza del sistema è $M_A = 1.715 \simeq 5$ db;
e) il luogo delle radici della funzione $G_1(s)$ interseca l'asse immaginario in corrispondenza dei punti: $\omega_1 \simeq 1.35$, $\omega_2 \simeq 7$;
f) i valori di $K$ per cui il sistema $K\,G_1(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile sono:

$$0 < K < 1.715, \qquad K > 145.8 \simeq 43 \text{ db}$$

g) una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato è $\omega_{f0} \simeq 1$.

3) Il sistema $G_2(s)$ è un sistema composto da un ritardo finito in cascata ad un integratore. Tale sistema è stabile per

$$0 < \frac{K}{a} < \frac{\pi}{2t_0} = \frac{\pi}{4} \qquad \rightarrow \qquad 0 < K < \frac{\pi a}{4}$$

la prima intersezione con il semiasse negativo si ha in corrispondenza della pulsazione

$$\omega = \frac{\pi}{4}$$

**Esame scritto di "Controlli Automatici"** - Modena - 17 Maggio 2001 - Domande Teoriche

| | |
|---|---|
| Nome: | |
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. A regime, un sistema di "tipo 2" posto in retroazione unitaria è in grado di inseguire

   ○ un riferimento parabolico con un errore di inseguimento nullo;
   ⊗ un riferimento parabolico con un errore di inseguimento finito;
   ⊗ un riferimento a rampa con un errore di inseguimento nullo;
   ○ un riferimento a rampa con un errore di inseguimento finito;

2. Nel caso di sistemi a retroazione non unitaria, per il calcolo dell'errore a regime $e(t) = r(t) - 7c(t)$ è possibile utilizzare le stesse formule trovate per il caso a retroazione unitaria se si utilizza al posto di $G(s)$ la funzione

   ○ $G_e(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-2]}$
   ○ $G_e(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)[1-7H(s)]}$
   ⊗ $G_e(s) = \frac{7G(s)}{1+G(s)[H(s)-7]}$
   ○ $G_e(s) = \frac{2G(s)}{1+G(s)[2H(s)-1]}$

3. Sia $1 + K\,G(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato al variare di $K > 0$. Le radici doppie (anche quelle complesse) del corrispondente luogo delle radici al variare del parametro $K$ sono tutte e sole le soluzioni

   ○ dell'equazione $\frac{dG(s)}{ds} = 0$
   ⊗ del sistema di equazioni: $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{dG(s)}{ds} = 0$
   ○ del sistema di equazioni: $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{dG(s)}{ds} = 0$, $\frac{d^2G(s)}{ds^2} = 0$

4. Sia $G_0(s)$ il sistema ad anello chiuso corrispondente al sistema lineare $G(s)$ posto in retroazione unitaria negativa. I luoghi ad N costante sono i punti del piano complesso dove

   ○ è costante il modulo di $G(j\omega)$
   ○ è costante il modulo di $G_0(j\omega)$
   ○ è costante la fase di $G(j\omega)$
   ⊗ è costante la fase di $G_0(j\omega)$

5. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale ($r = n - m > 0$ è il grado relativo)

   ⊗ quando $r = 2$ e $K_1$ è positiva
   ○ quando $r = 2$ e $K_1$ è negativa
   ○ quando $r = 4$ e $K_1$ è positiva
   ⊗ quando $r = 4$ e $K_1$ è negativa

6. Un sistema con ritardo $G(s) = 5\frac{e^{-s\theta}}{s}$ posto in retroazione con un guadagno $K$

   ⊗ è un sistema lineare
   ⊗ presenta un errore a nullo per ingresso a gradino unitario
   ○ è un sistema a fase minima
   ⊗ il suo diagramma di Nyquist tende all'origine ed ha infinite intersezioni con l'asse reale
   ○ è stabile per ogni valore di $K$

7. In corrispondenza di una radice multipla di ordine $h$ il luogo delle radici

   ○ presenta $2\,h$ rami entranti

   ⊗ presenta $h$ rami entranti e $h$ rami uscenti

   ⊗ i rami entranti si alternano a quelli uscenti

   ⊗ le tangenti ai rami entranti ed uscenti dividono il piano in settori di ampiezza $\frac{\pi}{h}$

8. Il teorema del baricentro del luogo delle radici si applica

   ○ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 1$

   ⊗ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$

   ○ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 3$

9. Nella seconda formulazione del criterio di Nyquist, quella valida anche per sistemi “instabili”, si fa l’ipotesi che il sistema, oltre a poter avere un polo semplice o doppio nell’origine,

   ○ sia a fase minima

   ○ abbia poli semplici sull’asse immaginario

   ⊗ non abbia poli sull’asse immaginario

   ○ non si fanno ipotesi aggiuntive

10. Dato un sistema $G(s)$, per calcolare il guadagno statico del sistema retroazionato $G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ utilizzando i luoghi ad M costante si deve leggere il valore $M$

    ○ della più piccola circonferenza esterna e tangente al diagramma polare completo $G(j\omega)$

    ○ della più grande circonferenza interna e tangente al diagramma polare completo $G(j\omega)$

    ⊗ della circonferenza che passa per il punto $G(0)$

    ○ della circonferenza che passa per il punto $G(j)$

11. Quando è possibile utilizzarlo, il metodo del contorno delle radici si applica

    ○ ai soli sistemi lineari con retroazione unitaria

    ○ ai soli sistemi lineari con retroazione algebrica

    ⊗ ai sistemi lineari con retroazione qualunque

12. Il contorno delle radici studia, sul piano complesso, le curve descritte dalle radici dell’equazione caratteristica al variare di un parametro. Tale parametro

    ○ può essere un parametro qualunque dell’equazione caratteristica

    ⊗ deve essere un parametro che entra linearmente nell’equazione caratteristica

    ○ deve essere una costante di tempo relativa ad un polo o ad uno zero del sistema

13. Per studiare in modo “esatto” la stabilità di un sistema a ritardo finito in retroazione si può utilizzare

    ○ il criterio di Routh

    ⊗ il criterio di Nyquist

    ○ il luogo delle radici

14. Siano $M_0 = G(j0)$ ed $M_1 = \max_\omega |G(j\omega)|$, rispettivamente, il guadagno statico e il valore massimo del modulo della funzione di risposta armonica del sistema lineare stabile $G(s)$. Il picco di risonanza $M_R$ del sistema $G(s)$ è definito come segue

    ○ $M_R = M_1$

    ⊗ $M_R = \frac{M_1}{M_0}$

    ○ $M_R = \sqrt{M_1 M_0}$

    ⊗ $M_R = M_1 - M_0$ (se $M_0$, $M_1$ ed $M_R$ sono espressi in db)