Controlli Automatici A - A.A. 2003/04

Secondo Compito

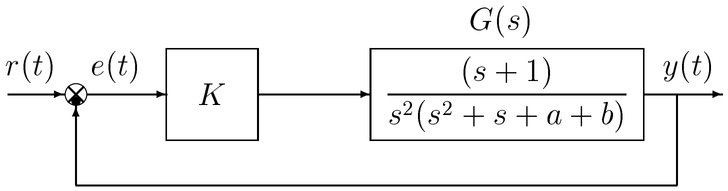
11 Dicembre 2003 - Esercizi

Compito Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

a.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

a.3) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori K^* del guadagno.

a.4) Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 4\,t^2$.

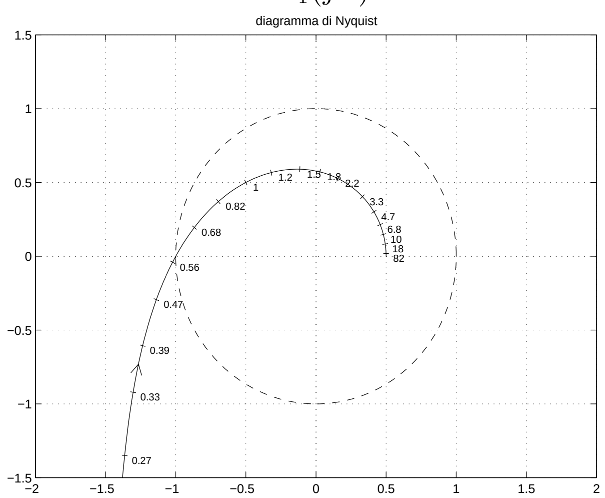
b) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi, nei limiti della precisione consentita dai grafici:

b.1) Indicare il margine di ampiezza $M_{a,i}$ e il margine di fase $M_{f,i}$.

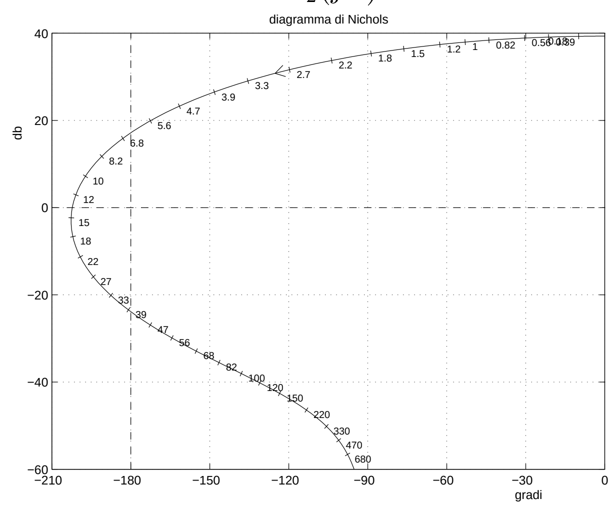
b.2) Calcolare per quali valori del guadagno $K_{p,i} > 0$ il sistema $K_{p,i}\,G_i(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile. Nota bene: i valori espressi in db vanno convertiti in valori numerici.

b.3) Determinare per quali valori di $\omega > 0$ il luogo delle radici della funzione $G_i(s)$ interseca l'asse immaginario.

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



$M_{a,1} = 1$

$M_{f,1} = 0$ gradi

$0 < K_{p,1} < 1$

$\omega_1 = 0.577$ rad/sec

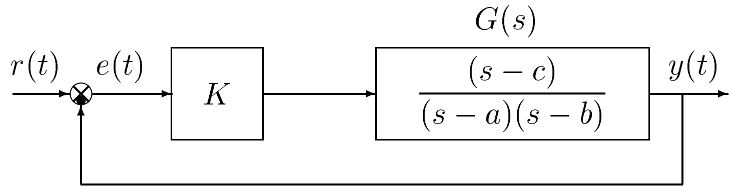
$M_{a,2} = -17.17$ db $= 0.1385$

$M_{f,2} = -22.23$ gradi

$0 < K_{p,2} < 0.1385$; $\quad K_{p,2} > 15.59$

$\omega_1 = 6.392$ rad/sec; $\quad \omega_2 \simeq 40$ rad/sec

c) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



c.1) Determinare in funzione del parametro $c > 0$ per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

c.2) Posto $c = 0.2$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione di eventuali asintoti e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

c.3) Posto $c = 0.2$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente le intersezioni ω_i^* con l'asse immaginario, i corrispondenti valori K_i^* e la posizione σ_i dei punti di diramazione.

c.4) Posto $c = 0.2$, calcolare il valore del parametro K a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento T_a del sistema retroazionato.

c.5) Calcolare, in funzione dei parametri K ed c, l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 3$.

d) Tracciare "qualitativamente" il luogo delle radici del seguente sistema $G(s)$ nei due casi $K > 0$ e $K < 0$.

$$G(s) = \frac{(s+a)^2}{s^3}$$

La determinazione esatta dei punti di diramazione e delle intersezioni con l'asse immaginario <u>non è richiesta</u>. Si richiede il solo tracciamento "qualitativo" del luogo delle radici.

e) I diagrammi di Bode riportati sotto sono relativi ad un sistema a fase minima $G_3(s)$.

e.1) Indicare il margine di ampiezza M_a e il margine di fase M_f del sistema:

$M_a = 11 = 20.83$ db

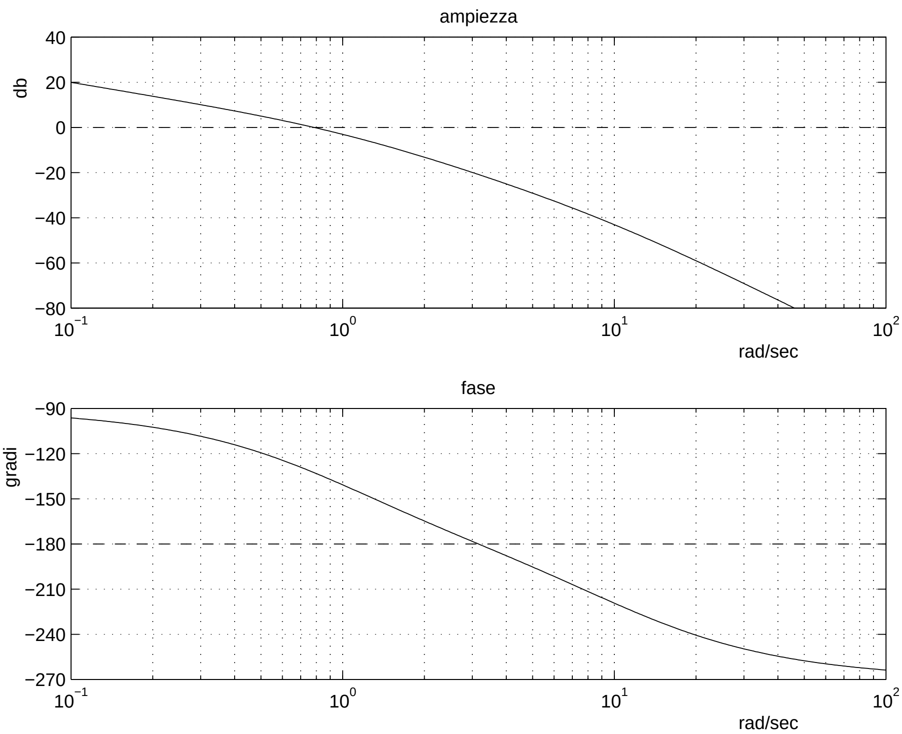
$M_f = 47.4$ gradi

e.2) Calcolare per quali valori del guadagno $K > 0$ il sistema $K\,G_3(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile.

$0 < K < 11$

e.3) Determinare per quale valore di ω il luogo delle radici della funzione $G_3(s)$ interseca l'asse immaginario.

$\omega \simeq 3.162$ rad/sec



Controlli Automatici A
Secondo Compito
11 Dicembre 2003 - Domande Teoriche

Compito Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle seguenti domande sostituendo ai parametri a e b i valori assegnati. Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Calcolare la posizione σ_a dell'asintoto verticale del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(5s^2 + 3\,a\,s + a)}{s(4s^2 + 2\,b\,s + b)} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_a = \frac{a}{b}$$

2. Nella costruzione di una tabella di Routh si è ottenuta la situazione riportata di fianco.

a) Scrivere la corrispondente equazione ausiliaria:

$$s^4 - 3s^2 - 4 = 0$$

b) Completare la tabella di Routh riportata di fianco utilizzando il metodo della "derivata".

c) Indicare quante sono le radici a parte reale negativa n_n, a parte reale positiva n_p e a parte reale nulla n_0 dell'equazione caratteristica presa in considerazione:

$$n_n = 3, \qquad n_p = 1, \qquad n_0 = 2$$

6	1	−2	−7	−4
5	1	−3	−4	
4	1	−3	−4	
3	0	0	0	
3′	4	−6		
2	−6	−16		
1	−100			
0	−16			

3. Data una funzione $G(s)$, come sono definite le costanti di posizione K_p, di velocità K_v e di accelerazione K_a che si utilizzano nel calcolo degli errori a regime?

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) \qquad K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s) \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2\,G(s)$$

4. Completare la seguente seconda formulazione del criterio di Nyquist (quella valida anche per sistemi instabili ad anello aperto).

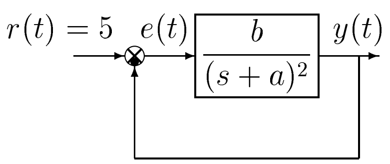
Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione

○ *solo necessaria* ○ *solo sufficiente* ⊗ *necessaria e sufficiente*

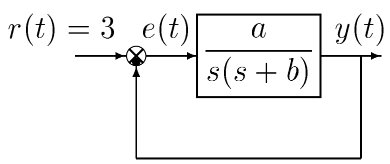
affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che:

il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva. Ogni giro in meno in senso antiorario o ogni giro in più in senso orario corrisponde alla presenza, nel sistema in retroazione, di un polo con parte reale positiva.

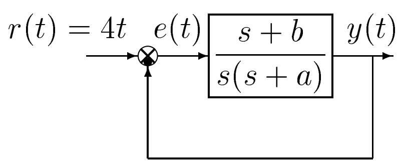
5. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{5\,a^2}{a^2 + b}$$



$$e(\infty) = 0$$



$$e(\infty) = \frac{4\,a}{b}$$

6. Calcolare il centro degli asintoti σ_0 del luogo delle radici della seguente funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s-2)}{(s^2 + 2a\,s + a^2 + b^2)(s + 2b)} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_0 = -a - b - 1$$

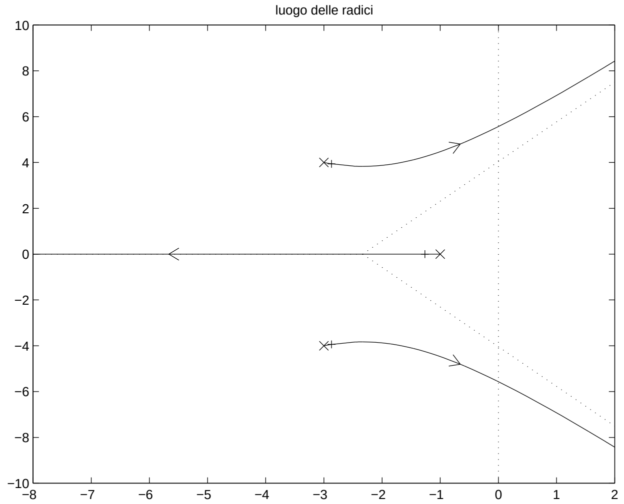
7. Sia dato il seguente luogo delle radici di una funzione $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

Utilizzando il teorema del baricentro determinare per quale valore reale σ_0 si ha la condizione di allineamento dei tre poli del sistema retroazionato al variare del parametro K:

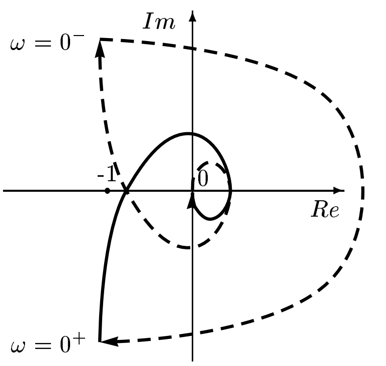
$$\sigma_0 = -\frac{7}{3} = -2.33$$

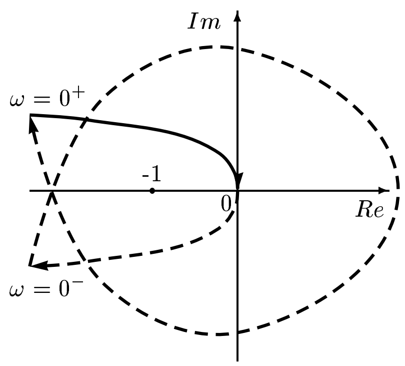
Fornire una stima del tempo di assestamento T_a corrispondente a tale condizione di allineamento:

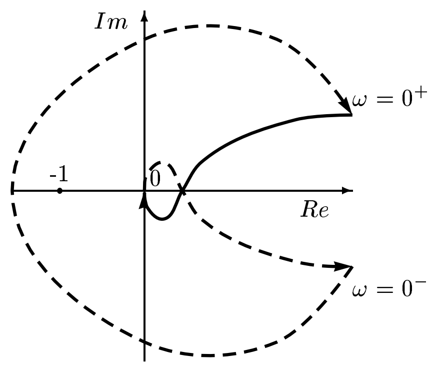
$$T_a = \frac{3}{|\sigma_0|} = \frac{9}{7} = 1.29$$



8. Chiudere all'infinito i seguenti diagrammi di Nyquist. Nota: tutti i diagrammi di Nyquist fanno riferimento a sistemi con tutti i poli a parte reale negativa eccezion fatta per un polo semplice o doppio nell'origine.







9. Se i coefficienti di un'equazione caratteristica sono "tutti positivi", allora

- ○ l'equazione caratteristica ha tutte le radici a parte reale positiva
- ○ l'equazione caratteristica ha tutte le radici a parte reale negativa
- ⊗ l'equazione caratteristica può avere radici a parte reale positiva
- ⊗ l'equazione caratteristica può avere radici a parte reale negativa

10. Se il luogo delle radici del sistema proprio $G(s)$ presenta un asintoto obliquo allora

- ⊗ il grado relativo $n - m$ di $G(s)$ è $n - m \geq 3$
- ○ il sistema $G(s)$ non ha zeri
- ⊗ il sistema $G(s)$ ha almeno 3 poli

11. Il margine di ampiezza M_A di un sistema $G(s)$:

- ○ è positivo se e solo se il sistema $G(s)$ è stabile;
- ○ è positivo se e solo se il sistema $G(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile;
- ○ è maggiore di 1 se e solo se il sistema $G(s)$ è stabile;
- ⊗ è maggiore di 1 se e solo se il sistema $G(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile;

Controlli Automatici A - Secondo Compito - Modena - 11 Dicembre 2003 - Risposte

La soluzione del compito viene fornita in forma simbolica. Le rappresentazioni grafiche e i valori numerici riportati a fianco della soluzione simbolica sono relativi al caso particolare $a = 3$ e $b = 7$.

a.1) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+1)}{s^2(s^2+s+a+b)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + s^3 + (a+b)s^2 + K\,s + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & a+b \quad K & \rightarrow & \\ 3 & 1 & K & \rightarrow & \\ 2 & a+b-K & K & \rightarrow & K < a+b \\ 1 & K(a+b-K)-K & & \rightarrow & K[a+b-1-K] > 0 \\ 0 & K & & \rightarrow & K > 0 \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$0 < K < a+b-1 = K^* = 9$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è

$$\omega^* = \sqrt{\frac{a_1(K^*)}{a_3}} = \sqrt{K^*} = \sqrt{a+b-1} = 3$$

a.2) Il guadagno di anello del sistema è

$$G(s) = \frac{(s+1)}{s^2(s^2+s+a+b)}$$

Il corrispondente diagramma di Nyquist per $a = 3$, $b = 7$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

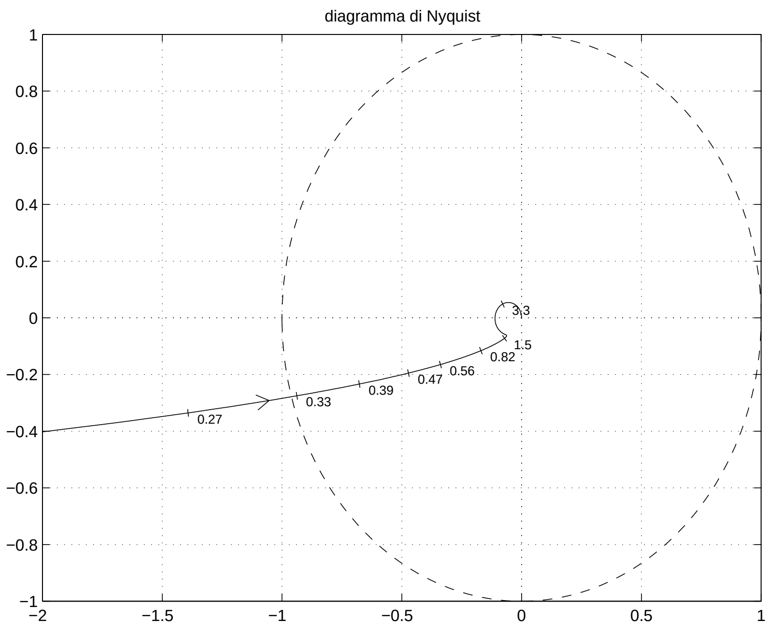


Figura 1: Diagramma di Nyquist per $a = 3$, $b = 7$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ del guadagno di anello $G(s)$.

Il diagramma di Nyquist non ha asintoti. L'intersezione σ_1 con il semiasse negativo si determina agevolmente dall'analisi di stabilità svolta al punto a)

$$\sigma_1 = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{a+b-1} = -\frac{1}{9} = -0.1111$$

in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = \sqrt{a+b-1} = 3$.

a.3) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+1)}{s^2(s^2+s+a+b)} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici per $a = 3$, $b = 7$ e al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 2. Il centro degli asintoti σ_c si trova in

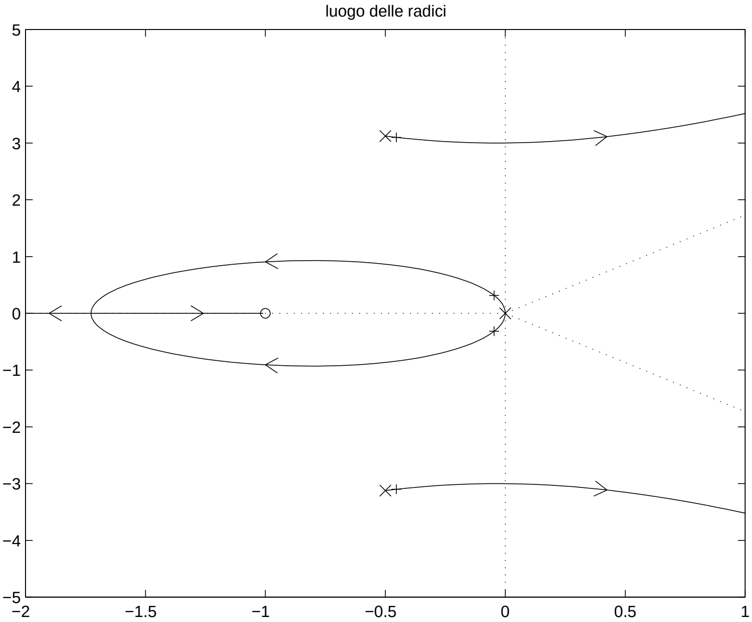


Figura 2: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ per $a = 3$, $b = 7$ e al variare del parametro $K > 0$.

$$\sigma_c = \frac{1}{3}(-1+1) = 0$$

Le intersezioni con l'asse immaginario si hanno in corrispondenza del valore limite K^* del guadagno calcolato al punto a):

$$K = K^* = a + b - 1 = 9$$

ed il corrispondente valore della pulsazione è $\omega^* = \sqrt{a+b-1} = 3$

a.4) L'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 4\,t^2 = 8\,t^2/2$ è:

$$e_a = \frac{8}{K_a} = \frac{8(a+b)}{K} = \frac{80}{K}$$

c.1) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s-c)}{(s-a)(s-b)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^2 + (K-a-b)s + a\,b - K\,c = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & a\,b - K\,c \\ 1 & K-a-b & \\ 0 & a\,b - K\,c & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \rightarrow & \\ \rightarrow & K > a+b \\ \rightarrow & a\,b - K\,c > 0 \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per:

$$K_1 = 10 = a + b < K < \frac{a\,b}{c} = 105 = K_0$$

dove K_1 annulla la riga 1 mentre K_0 annulla la riga 0. Esiste un intervallo di stabilità per il sistema retroazionato se e solo se:

$$a + b < \frac{a\,b}{c} \qquad \rightarrow \qquad c < \frac{a\,b}{a+b} = 2.1$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è

$$\omega_1 = \sqrt{a\,b - K^*\,c} = \sqrt{a\,b - (a+b)c} = \sqrt{19} = 4.36$$

La pulsazione ω_0 corrispondente al valore limite K_0 è $\omega_0 = 0$.

c.2) Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $b = 7$, $c = 0.2$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

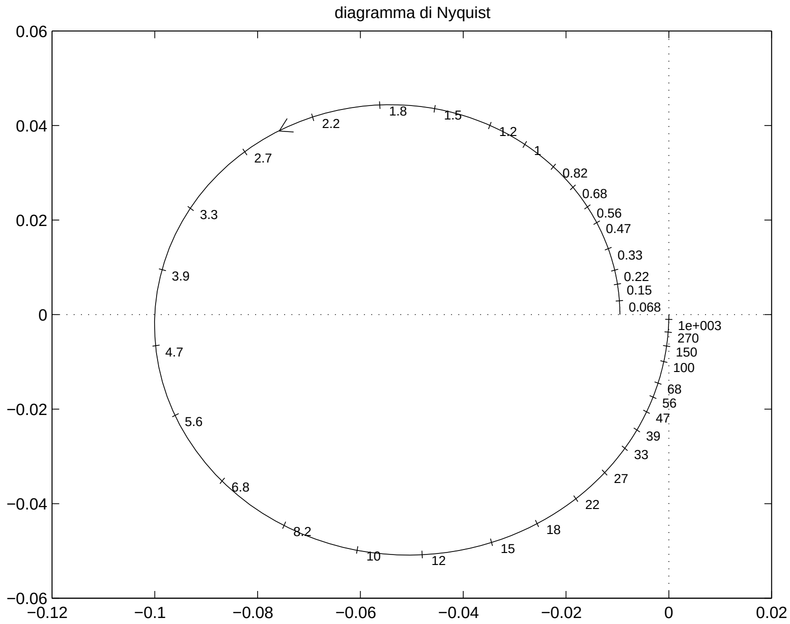


Figura 3: Diagramma di Nyquist per $a = 3$, $b = 7$, $c = 0.2$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ del guadagno di anello $G(s)$.

Il diagramma di Nyquist non ha asintoti. Le intersezione σ_0e σ_1 con il semiasse negativo si determinano agevolmente dalla precedente analisi di stabilità:

$$\sigma_0 = -\frac{1}{K_0} = -\frac{c}{a\,b} = -0.0095, \qquad\qquad \sigma_1 = -\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{a+b} = -0.1$$

in corrispondenza delle pulsazioni $\omega_1 = \sqrt{a\,b - (a+b)c} = 4.36$ e $\omega_0 = 0$.

c.3) L'andamento qualitativo del luogo delle radici della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $b = 7$, $c = 0.2$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 4. Il luogo delle radici ha un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo. Le intersezioni con l'asse immaginario si hanno in corrispondenza dei valori K_0 e K_1 trovati con l'analisi di stabilità

$$K_0 = \frac{a\,b}{c} = 105, \quad \omega_0 = 0, \qquad\qquad K_1 = a+b = 10, \quad \omega_1 = \sqrt{a\,b - (a+b)c} = 4.36$$

I punti di diramazione sull'asse reale si determinano risolvendo la seguente equazione:

$$\frac{dG(s)}{ds} = 0 \qquad \rightarrow \qquad (s-a)(s-b) - (s-c)(2s-a-b) = 0$$

Risolvendo l'equazione $s^2 - 2c\,s + c(a+b) - a\,b = 0$ si trova:

$$\sigma_{1,2} = c \pm \sqrt{(a-c)(b-c)} = 0.2 \pm \sqrt{2.8 \cdot 6.8} = 0.2 \pm 4.36 = \left\{ \begin{array}{r} 4.56 \\ -4.16 \end{array} \right.$$

c.4) Il punto del luogo delle radici a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento coincide con il punto di diramazione σ_2 posizionato sul semiasse reale negativo. Il corrispondente valore di K è il seguente:

$$K = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=\sigma_2} = -\left.\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)}\right|_{s=\sigma_2} = a + b - 2c + 2\sqrt{(a-c)(b-c)} = 18.327$$

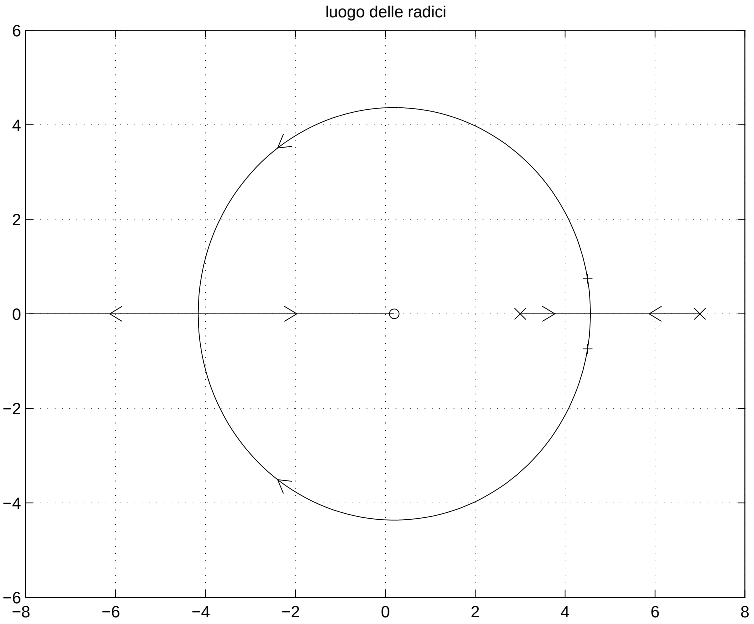


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ per $a = 3$, $b = 7$, $c = 0.2$ e al variare del parametro $K > 0$.

Il corrisponde valore del tempo di assestamento è

$$T_a = \frac{3}{|\sigma_2|} = \frac{3}{\sqrt{(a-c)(b-c)} - c} = \frac{3}{4.16} = 0.72 \text{ s}$$

c.5) L'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 3$ è:

$$e_p = \frac{3}{1 + K_p} = \frac{3}{1 - \frac{K\,c}{a\,b}} = \frac{3a\,b}{a\,b - K\,c} = \frac{63}{21 - K\,c}$$

d) In Fig. 5 e in Fig. 6 sono riportati gli andamenti qualitativi dei luoghi delle radici della funzione

$$G(s) = \frac{(s+a)^2}{s^3}$$

al variare del parametro $K > 0$ e $K < 0$.

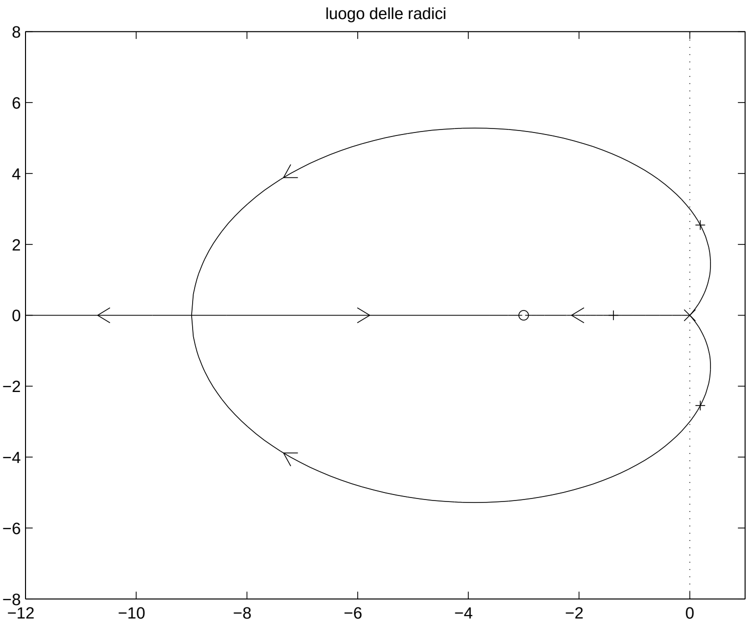


Figura 5: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

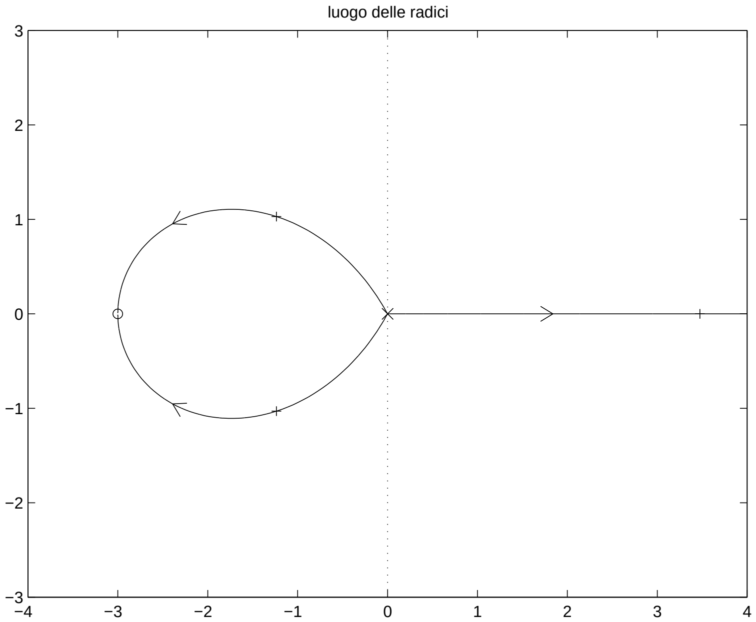


Figura 6: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.