Controlli Automatici A - A.A. 2006/07

Secondo Compito

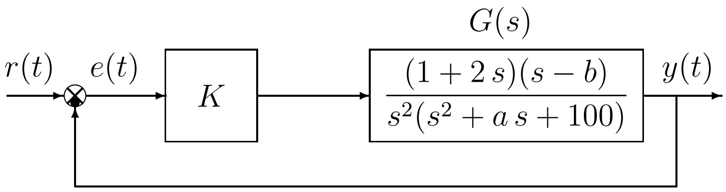
18 Dicembre 2006 - Esercizi

Compito A Nr. $\boxed{a =\quad}$ $\boxed{b =\quad}$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{K(1+2\,s)(s-b)}{s^2(s^2+a\,s+100)}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^4+a\,s^3+(2\,K+100)s^2+K(1-2\,b)s-K\,b=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 2\,K+100 & -K\,b \\
3 & a & K(1-2\,b) & \\
2 & K(2a+2b-1)+100a & -K\,a\,b & \\
1 & K(1-2\,b)[K(2a+2b-1)+100a]+K\,a^2\,b & & \\
0 & -K\,a\,b & &
\end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K>-\frac{100a}{(2a+2b-1)}, \qquad\qquad K<0$$

Dalla riga 1 si ottiene la disequazione seguente:

$$K[K(2a+2b-1)(1-2\,b)+100a(1-2\,b)+\,a^2\,b]>0$$

da cui, essendo $K<0$ si ricava:

$$-K(2a+2b-1)(2\,b-1)+\,a^2\,b-100a(2\,b-1)<0$$

Risolvendo rispetto a K si ottiene:

$$K(2a+2b-1)(2\,b-1)>\,a^2\,b-100a(2\,b-1)$$

da cui

$$K>-\frac{100a(2\,b-1)-\,a^2\,b}{(2a+2b-1)(2\,b-1)}=K^*$$

Tale relazione riscritta nel modo seguente

$$K>-\frac{100a}{(2a+2b-1)}+\frac{a^2\,b}{(2a+2b-1)(2\,b-1)}=K^*$$

mette in evidenza che si tratta si tratta di una relazione piú stringente di quella ottenuta dalla riga 2. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per

$$K^*<K<0$$

Nel caso $a = 3$ e $b = 5$ si ha: $K^* = -19.67 < K < 0$. La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{-\frac{K^*(2b-1)}{a}} = \sqrt{\frac{100(2\,b-1) - \,a\,b}{(2a+2b-1)}}$$

Nel caso $a = 3$ e $b = 5$ si ha: $\omega^* = 7.6811$.

a.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $b = 5$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

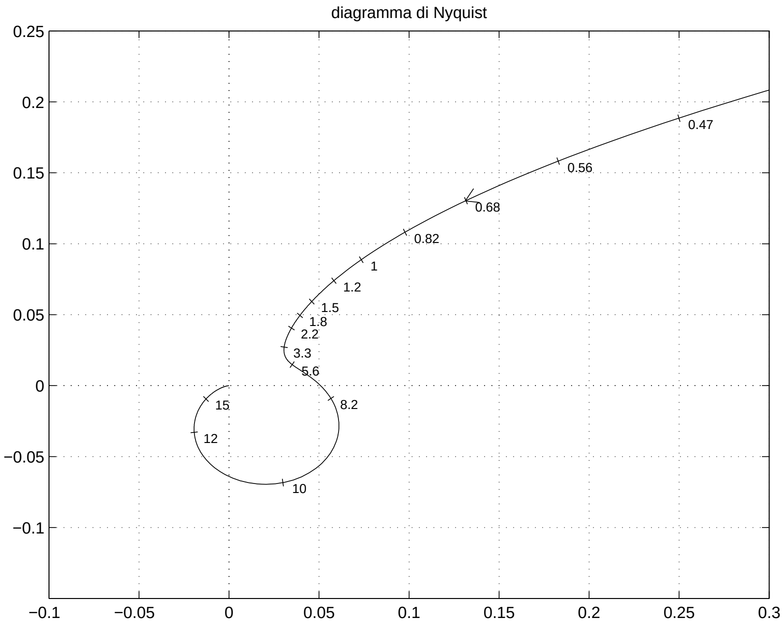


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $b = 5$ e $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 2 per cui non esiste nessun asintoto verticale. Esiste un'unica intersezione σ_1^* con il semiasse reale positivo. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto a.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad \sigma_1^* = 0.0508$$

Il corrispondente valore di ω_1^* è quello determinato al punto a.1: $\omega_1^* = 7.6811$.

a.3) Calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 5\,t^2$.

Soluzione: l'errore a regime richiesto si calcola facilmente dopo aver calcolato la costante di accelerazione del sistema:

$$K_a = -\frac{K\,b}{100} \qquad \rightarrow \qquad e(\infty) = \frac{R_0}{K_a} = -\frac{1000}{K\,b} \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad e(\infty) = -\frac{200}{K}$$

b) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici:

b.1) Indicare il margine di ampiezza M_a e il margine di fase M_φ.

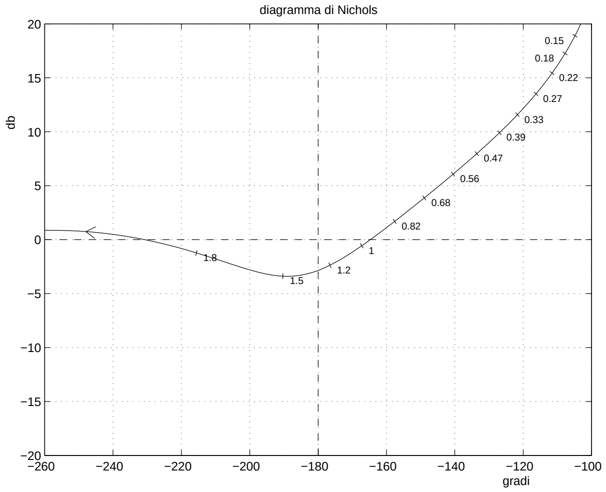
b.2) Calcolare per quali valori del guadagno $K_p > 0$ il sistema $K_p\,G(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile. Nota: i valori espressi in db vanno convertiti in valori numerici.

b.3) Determinare per quale valore K_φ del guadagno il sistema $K_\varphi\,G(s)$ presenta un margine di fase pari a $M_\varphi = (20 + 2a)$

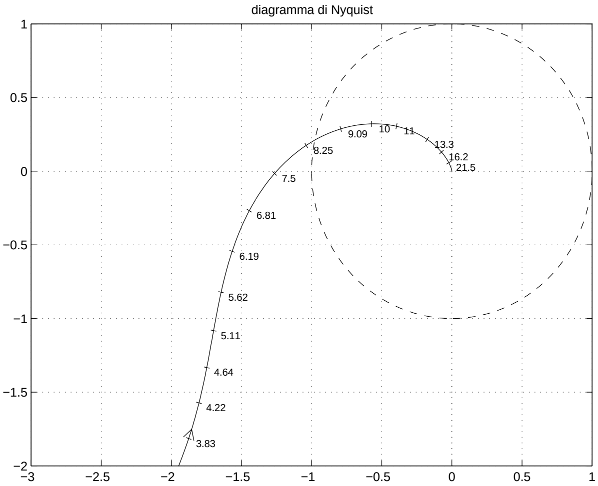
b.4) Determinare per quale valore K_a del guadagno il sistema $K_a\,G(s)$ presenta un margine di ampiezza pari a $M_a = (2 + 0.8b)$

Per $a = 3$ e $b = 5$ i valori richiesti sono i seguenti:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



b.1) $M_a = 2.848$ db $= 1.388$

$M_\varphi = 12.18$ gradi

b.2) $0 < K_1 < 1.388$

b.3) $K_\varphi = -2.28$ db $= 0.769$

b.4) $K_a = -12.7$ db $= 0.231$

b.1) $M_a = -1.938$ db $= 0.8$

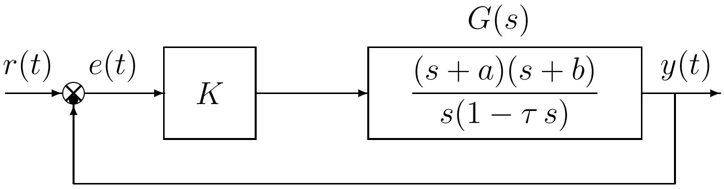
$M_\varphi = -15.28$ gradi

b.2) $0 < K_2 < 0.8$

b.3) $K_\varphi = -41.9$ db $= 0.00802$

b.4) $K_a = -17.5$ db $= 0.133$

c) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



c.1) Determinare, in funzione del parametro $\tau > 0$, per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + K\frac{(s+a)(s+b)}{s(1-\tau s)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad (K-\tau)s^2 + [K(a+b)+1]s + K\,a\,b = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & K-\tau & K\,a\,b \\ 1 & K(a+b)+1 & \\ 0 & K\,a\,b & \end{array}$$

In questo caso tutti e tre i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh sono funzioni di K per cui per trovare tutte le soluzioni occorre considerare sia il caso di coefficienti tutti positivi:

$$\begin{cases} K-\tau > 0 \\ K(a+b)+1 > 0 \\ K\,a\,b > 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad K > \tau$$

che il caso di coefficienti tutti negativi:

$$\begin{cases} K-\tau < 0 \\ K(a+b)+1 < 0 \\ K\,a\,b < 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad K < -\frac{1}{a+b}$$

Quindi, il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$\left(K < -\frac{1}{a+b} = K_1^*\right) \qquad \cup \qquad (K > \tau = K_2^*)$$

Per $K = K_1^*$ si annulla la prima riga della tabella di Routh per cui la pulsazione ω_1^* può essere calcolata utilizzando i coefficienti della seconda riga della tabella di Routh:

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{K_1^*\, a\, b}{K_1^* - \tau}} = \sqrt{\frac{a\, b}{1 + \tau(a+b)}} \qquad \xrightarrow{a=3,\, b=5} \qquad \omega_1^* = 2.402$$

Per $K = K_2^*$ l'ordine dell'equazione caratteristica diminuisce di una unità. In questo caso si può dimostrare che la pulsazione critica ω_2^* è infinita: $\omega_2^* = \infty$.

c.2) Posto $\tau = 0.2$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione: il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$ e $b = 5$ è mostrato in Fig. 2. La posizione dell'asintoto verticale è:

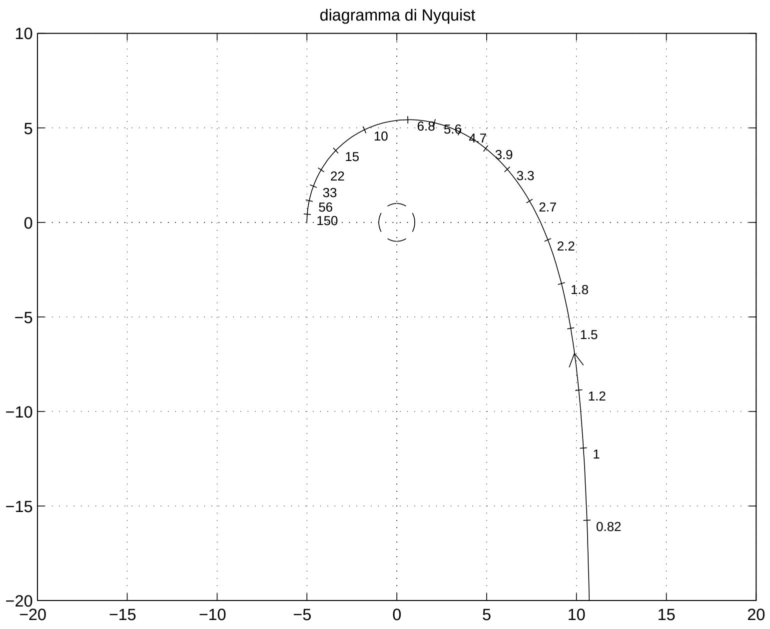


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$ e $b = 5$.

$$\sigma_a = a\, b \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \tau\right) \qquad \xrightarrow{a=3,\, b=5} \qquad \sigma_a = 11$$

Le due intersezioni con l'asse reale σ_1^* e σ_2^* corrispondono ai 2 valori limite di stabilità K_1^* e K_2^* calcolati al punto C.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K_1^*} = a + b, \qquad \qquad \sigma_2^* = -\frac{1}{K_2^*} = -\frac{1}{\tau} = -5$$

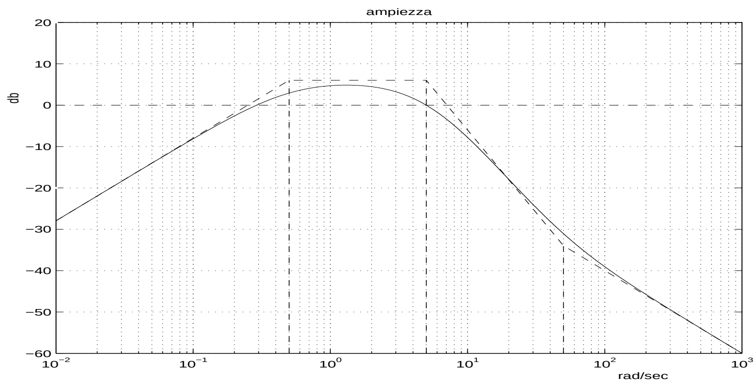
I corrispondenti valori di ω^* sono quelli calcolati al punto C.1: $\omega_1^* = \sqrt{a\, b/(1 + \tau(a+b))}$ e $\omega_2^* = \infty$.

c.3) Calcolare, in funzione dei parametri K e τ, l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 3\, t$.

Soluzione: l'errore a regime è funzione della costante di velocità del sistema:

$$K_v = K\, a\, b \qquad \rightarrow \qquad e(\infty) = \frac{R_0}{K_v} = \frac{3}{K\, a\, b} \qquad \xrightarrow{a=3,\, b=5} \qquad e(\infty) = \frac{3}{15\, K}$$

d) Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli mostrato in figura. Sapendo che il sistema è a fase minima, stimare "indicativamente" la fase del sistema in corrispondenza delle seguenti pulsazioni:



$$\omega_1 = 0.05 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 \simeq \frac{\pi}{2}$$

$$\omega_2 = 0.5 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 \simeq \frac{\pi}{4}$$

$$\omega_3 = 5 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 \simeq -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega_4 = 1000 \quad \rightarrow \quad \varphi_4 \simeq -\frac{\pi}{2}$$

e) I diagrammi di Bode riportati sotto sono relativi ad un sistema $G_3(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione consentita dai grafici:

e.1) Indicare il margine di fase M_φ del sistema.

e.2) Calcolare per quali valori del guadagno K_p il sistema $K_p\,G(s)$ in retroazione è stabile.

e.3) Determinare per quale valore K_φ del guadagno il sistema $K_\varphi\,G(s)$ presenta un margine di fase pari a $M_\varphi = 20 + 4a$.

e.4) Determinare per quale valore K_a del guadagno il sistema $K_a\,G(s)$ presenta un margine di ampiezza pari a $M_a = 3\,b$.

e.5) Determinare per quale valore del guadagno K_ω il sistema $K_\omega\,G(s)$ retroazionato ha una larghezza di banda $\omega_{f0} \simeq 50$ rad/s.

Per $a = 3$ e $b = 5$ i valori richiesti sono i seguenti:

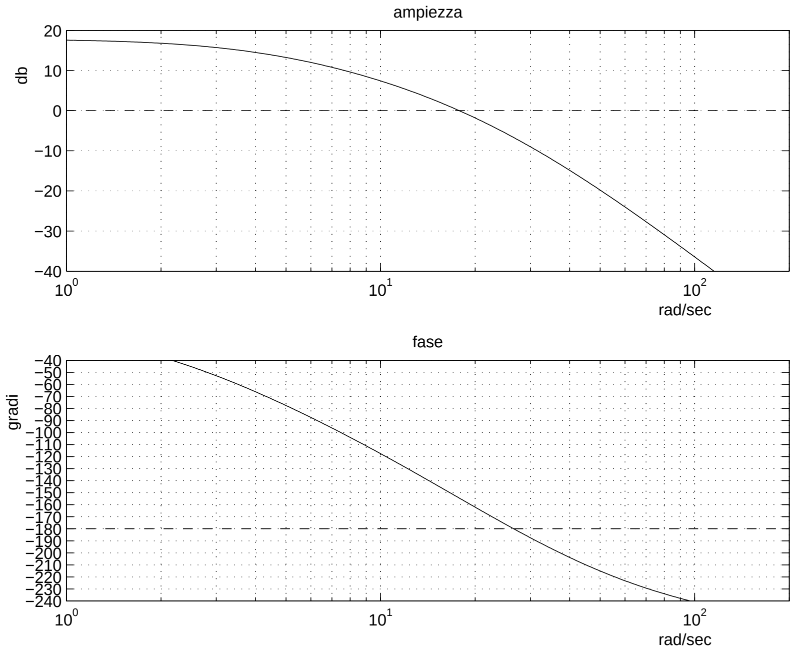
e.1) $M_\varphi = 25.5$ gradi

e.2) $0 < K_p < 2.16 = 6.69$ db

e.3) $K_\varphi = -1.39$ db $= 0.852$

e.4) $K_a = -16.8$ db $= 0.144$

e.5) $K_\omega \simeq 20$ db $= 10$



Controlli Automatici A
Secondo Compito
18 Dicembre 2006 - Domande Teoriche

Compito A Nr. $\boxed{a =\quad}$ $\boxed{b =\quad}$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle seguenti domande sostituendo ai parametri a e b i valori assegnati. Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

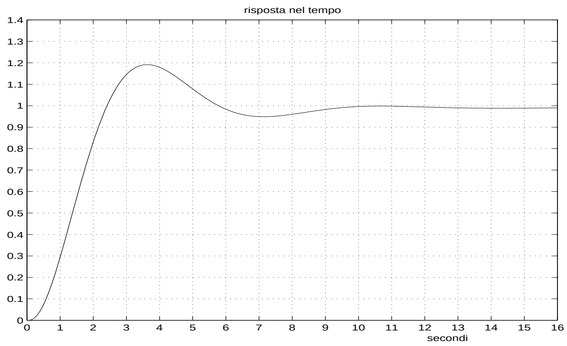
1. Calcolare l'eventuale posizione σ_a dell'asintoto verticale del diagramma di Nyquist di $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s-2)(2+a\,s)}{s^2(s+0.1)(s^2+b\,s+5)} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_a = \nexists$$

2. Quella riportata a fianco é la risposta temporale $y(t)$ del sistema retroazionato $G_0(s)$:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

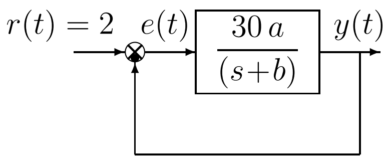
ad un gradino unitario posto in ingresso. Da tale risposta al gradino é possibile ricavare una stima dei seguenti parametri.



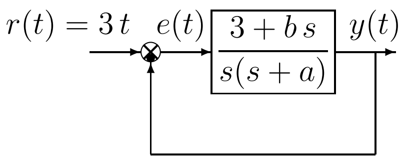
a) Guadagno statico del sistema $G(s)$:
- ○ $G(0) \simeq 0.1$
- ○ $G(0) \simeq 1$
- ○ $G(0) \simeq 10$
- ⊗ $G(0) \simeq 100$

b) Larghezza di banda del sistema $G_0(s)$:
- ○ $\omega_{f0} \simeq 0.1$
- ⊗ $\omega_{f0} \simeq 1$
- ○ $\omega_{f0} \simeq 10$
- ○ $\omega_{f0} \simeq 100$

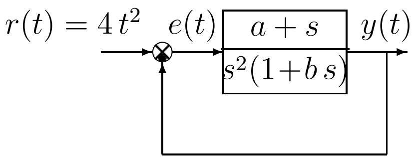
3. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{2b}{30a+b}$$



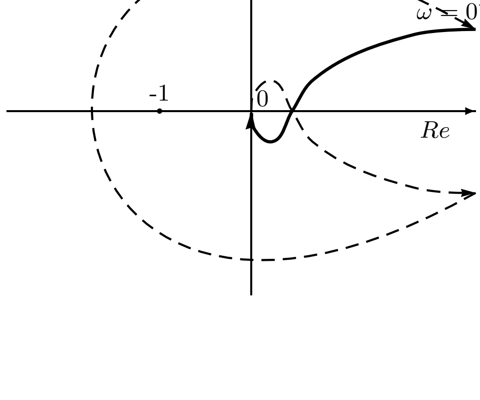
$$e(\infty) = a$$



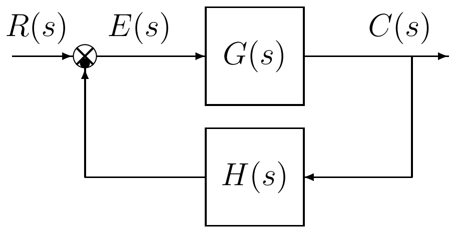
$$e(\infty) = \frac{8}{a}$$

4. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con 2 poli nell'origine e tutti gli altri a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:
- ○ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
- ⊗ $(K < 0,\ |K| << 1)$;
- ○ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
- ○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;



5. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

6. Enunciare il Criterio di Routh:

Ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella di Routh corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa. (C.N.S.)

7. Si supponga che nella costruzione di una tabella di Routh si è ottenuta la situazione riportata di fianco.

a) Scrivere la corrispondente equazione ausiliaria:

$$2\,s^6 + 4\,s^4 + 6\,s^2 + 10 = 0$$

b) Le radici dell'equazione ausiliaria:

○ sono sempre tutte posizionate sull'asse reale

⊗ sono radici simmetriche rispetto all'asse reale

○ non sono mai posizionate sull'asse immaginario

⊗ sono radici simmetriche rispetto all'asse immaginario

7	1	2	3	5	0
6	2	4	6	10	0
5	0	0	0	0	
4	...				
3	...				
2	...				
1	...				
0	...				

8. Completare la seguente seconda formulazione del criterio di Nyquist (quella valida anche per sistemi instabili ad anello aperto).

Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione

○ *solo necessaria* ○ *solo sufficiente* ⊗ *necessaria e sufficiente*

affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che:

il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva. Ogni giro in meno in senso antiorario o ogni giro in più in senso orario corrisponde alla presenza, nel sistema in retroazione, di un polo con parte reale positiva.

9. La formula di Bode per il calcolo della fase di un sistema a partire dal diagramma delle ampiezze

○ è una formula approssimata

⊗ è una formula esatta

○ è valida per tutti sistemi lineari stabili

⊗ è valida per tutti i sistemi lineari a fase minima

10. Il margine di ampiezza M_α di un sistema $G(s)$:

○ è positivo se e solo se il sistema $G(s)$ è stabile;

○ è positivo se e solo se il sistema $G(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile;

○ è maggiore di 1 se e solo se il sistema $G(s)$ è stabile;

⊗ è maggiore di 1 se e solo se il sistema $G(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile;