**Controlli Automatici A - A.A. 2004/05**

**Secondo Compito**

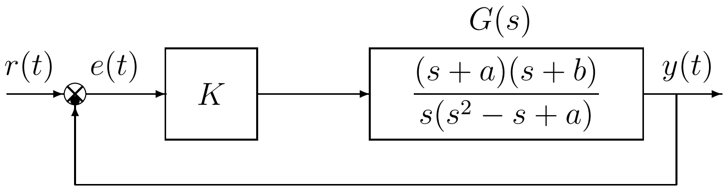
**17 Dicembre 2004 - Esercizi**

**Compito A Nr.** $a =$ | $b =$

| | |
|---|---|
| Nome: | |
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad $a$ e $b$ i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:




a.1) Determinare per quali valori del parametro $K$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+a)(s+b)}{s(s^2-s+a)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (K-1)s^2 + [a + K(a+b)]s + K\,a\,b = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccccc}
3 & 1 & a + K(a+b) & \rightarrow & 1 > 0 \\
2 & K-1 & K\,a\,b & \rightarrow & K > 1 \\
1 & (K-1)[a+K(a+b)] - K\,a\,b & & \rightarrow & (a+b)\,K^2 - b(1+\,a)\,K - a > 0 \\
0 & K\,a\,b & & \rightarrow & K > 0
\end{array}$$

In base alla regola dei segni dei coefficienti di una equazione di secondo grado, è possibile affermare che le due soluzioni $K_1$ e $K_2$ dell'equazione di secondo grado della riga 1 sono reali e di segni opposti: $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$. Inoltre, la corrispondente disequazione è positiva all'esterno di tali valori. Quindi il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$K > K_2 = \frac{b(1+\,a) + \sqrt{b^2(1+\,a)^2 + 4a(a+b)}}{2(a+b)} = K^*$$

Nel caso $a = 3$ e $b = 5$ si ha: $K > 2.64$. La pulsazione $\omega^*$ corrispondente al valore limite $K^*$ è

$$\omega^* = \sqrt{a + K^*(a+b)}$$

Nel caso $a = 3$ e $b = 5$ si ha: $\omega^* = 4.91$.

a.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione $\sigma_a$ dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni $\sigma_i^*$ con l'asse reale negativo e i corrispondenti valori delle pulsazioni $\omega_i^*$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $b = 5$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1. La posizione dell'asintoto verticale è la seguente:

$$\sigma_a = b\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{2\,b}{a} + 1, \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad \sigma_a = 4.33$$

Vi è un'unica intersezione $\sigma_1^*$ con il semiasse reale negativo. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto a.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad \sigma_1^* = -0.379$$

Il corrispondente valore di $\omega_1^*$ è quello determinato al punto a.1: $\omega_1^* = \sqrt{a+K^*(a+b)} = 4.91$.

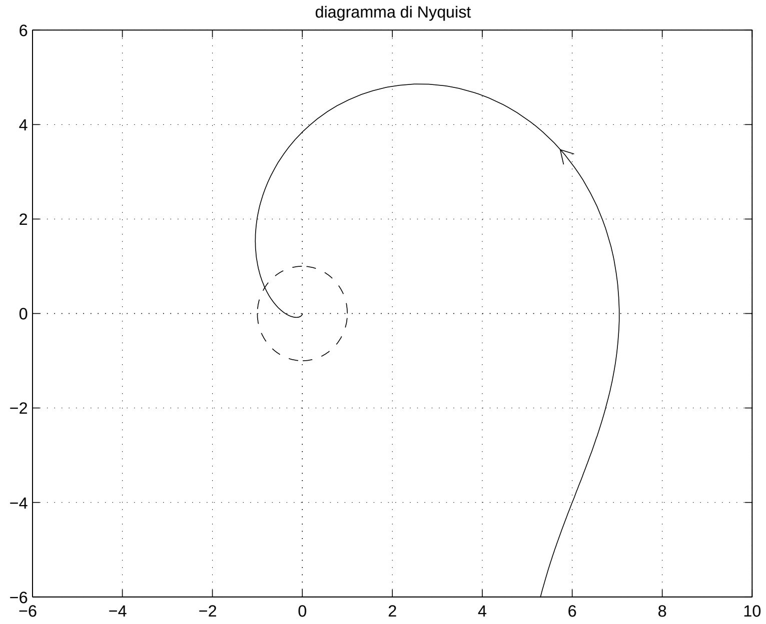



Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $b = 5$ e $\omega \in [0,\ \infty]$.

a.3) Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 4\,t$.

Soluzione: l'errore a regime richiesto si calcola facilmente dopo aver calcolato la costante di velocità del sistema:

$$K_v = K\frac{a\,b}{a} = K\,b \qquad \rightarrow \qquad e(\infty) = \frac{R_0}{K_v} = \frac{4}{b} \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad e(\infty) = 0.8$$

b) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici:

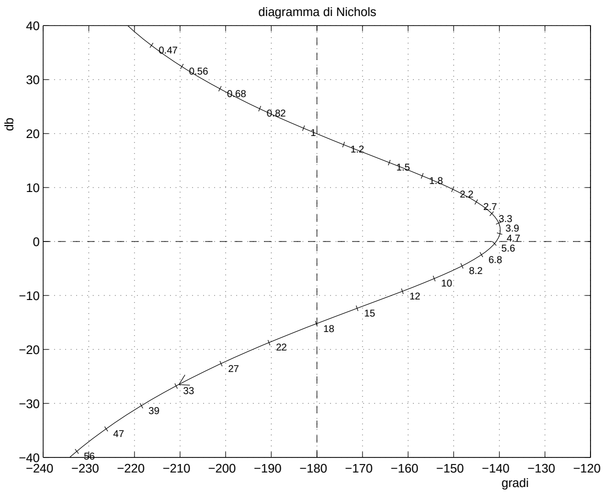
b.1) Indicare il margine di ampiezza $M_{a,i}$ e il margine di fase $M_{f,i}$.

b.2) Calcolare per quali valori del guadagno $K_{p,i}$ il sistema $K_{p,i}\ G_i(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile. Nota: i valori espressi in db vanno convertiti in valori numerici.

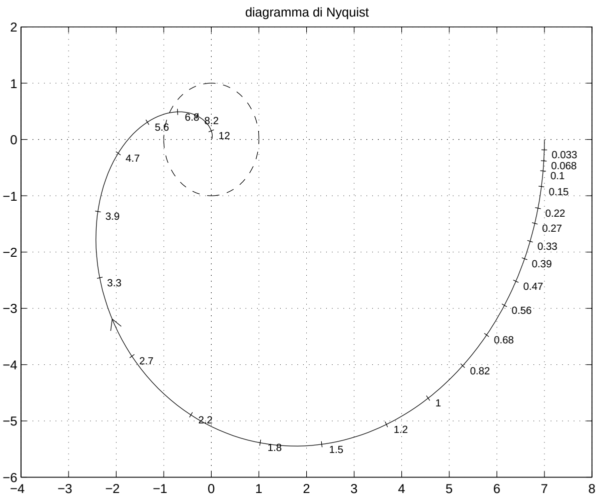
b.3) Determinare la larghezza di banda $\omega_{f0,i}$ del sistema retroazionato.

b.4) Determinare il periodo $T_{1,i}$ e $T_{2,i}$ delle oscillazione persistenti che si hanno nel sistema retroazionato quando $K$ coincide con i valori limite di stabilità determinati al punto b.2.

$G_1(j\omega)$




$G_2(j\omega)$




$M_{a,1} \simeq 15$ db $\simeq 5.6$

$M_{f,1} \simeq 39.3^o$

$0.1 \quad < K_{p,1} < \quad 5.75$

$\omega_{f0,1} = \quad 5.4$ rad/s

$T_{1,1} \simeq 5.7$ s , $\qquad T_{1,2} \simeq 0.35$ s

$M_{a,2} \simeq 0.57$

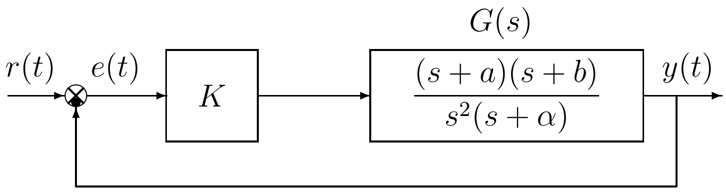
$M_{f,2} \simeq -28.3^o$

$-0.143 \quad < K_{p,2} < \quad 0.57$

$\omega_{f0,2} \simeq 6.4$ rad/s

$T_{2,1} \simeq \infty, \qquad T_{2,2} \simeq 1.26$ s

c) Sia dato il seguente sistema retroazionato:




c.1) Determinare in funzione del parametro $\alpha > 0$ per quali valori del parametro $K$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+a)(s+b)}{s^2(s+\alpha)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (K+\alpha)s^2 + K(a+b)s + K\,a\,b = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & 1 & K(a+b) & \rightarrow & 1 > 0 \\ 2 & K+\alpha & K\,a\,b & \rightarrow & K+\alpha > 0 \\ 1 & K[(K+\alpha)(a+b) - a\,b] & & \rightarrow & (K+\alpha)(a+b) - a\,b > 0 \\ 0 & K\,a\,b & & \rightarrow & K > 0 \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$K > \frac{a\,b}{a+b} - \alpha = K^* \qquad \rightarrow \qquad \omega^* = \sqrt{K^*(a+b)}$$

Nel caso $a = 3$, $b = 5$ e $\alpha = 0.4$ si ha:

$$K > K^* = 1.47, \qquad \omega^* = 3.43$$

c.2) Posto $\alpha = 0.4$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

Soluzione: il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$ e $b = 5$ è mostrato in Fig. 2. Vi è un'unica intersezione $\sigma_1^*$ con il semiasse reale negativo:

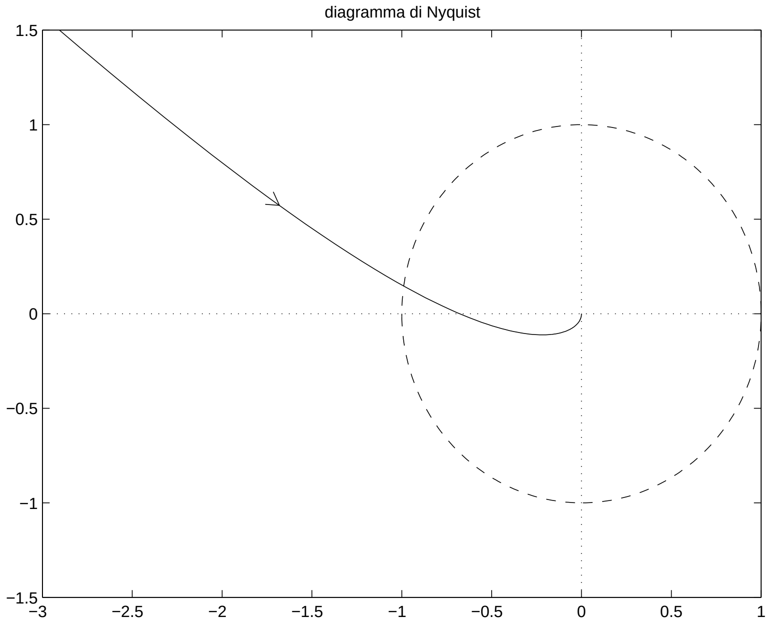



Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$ e $b = 5$.

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad \sigma^* = -0.678$$

c.3) Calcolare, in funzione dei parametri $K$ ed $\alpha$, l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 3\,t^2$.

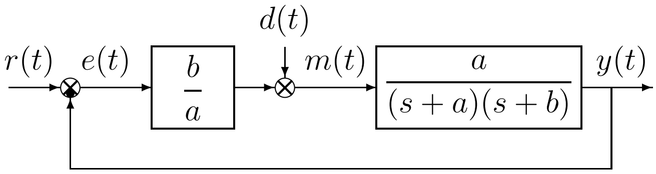
Soluzione: l'errore a regime è funzione della costante di accelerazione del sistema:

$$K_a = \frac{K\,a\,b}{\alpha} \qquad \rightarrow \qquad e(\infty) = \frac{R_0}{K_a} = \frac{6\,\alpha}{K\,a\,b} \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad e(\infty) = \frac{6\,\alpha}{15\,K}$$

d) Sia dato il sistema retroazionato riportato a fianco.

d.1) Posto $d(t) = 0$, calcolare il valore a regime $e(\infty)$ della variabile $e(t)$ quando $r(t) = 2$.

$$e(\infty) = \frac{2}{1 + K_p} = \frac{2\,a}{a+1}$$




d.2) Posto $r(t) = 0$, calcolare il valore a regime $m(\infty)$ della variabile $m(t)$ quando $d(t) = 3$.

Soluzione: la funzione di trasferimento che lega $d(t)$ ad $m(t)$ è identica a quella che lega $r(t)$ ad $e(t)$. Per calcolare il valore a regime di $m(t)$ è quindi possibile usare la stessa formula valida per gli errori a regime per ingresso a gradino:

$$m(\infty) = \frac{3}{1 + K_p} = \frac{3\,a}{a+1}$$

e) I diagrammi di Bode riportati sotto sono relativi ad un sistema a fase minima $G_3(s)$.

e.1) Indicare il margine di ampiezza $M_A$ e il margine di fase $M_f$ del sistema:

$$M_A \simeq 2.907 \text{ (9.268 db)}, \qquad M_f \simeq 20 \text{ gradi}$$

e.2) Calcolare per quali valori del guadagno $K > 0$ il sistema $K\,G_3(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile.

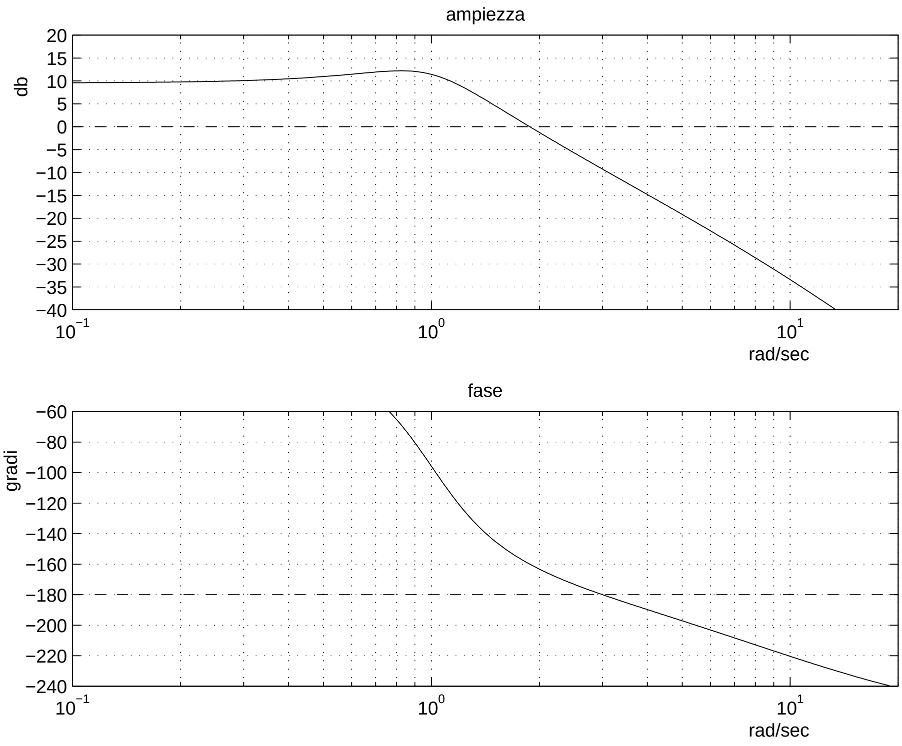
$$-0.333 < K < 2.907$$

e.3) Determinare per quale valore di $K > 0$ il margine di fase $M_\varphi$ del sistema $K\,G_3(s)$ posto in retroazione unitaria risulta $M_\varphi = 40^o$:

$$K \simeq 0.5$$

e.4) Determinare per quale valore di $K > 0$ il margine di ampiezza $M_A$ del sistema $K\,G_3(s)$ posto in retroazione unitaria risulta $M_A = 0.1$:

$$K \simeq 29$$



**Controlli Automatici A**
**Secondo Compito**
**17 Dicembre 2004 - Domande Teoriche**

**Compito A Nr.** $a =$ | $b =$

| Nome: | |
|---|---|
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

Rispondere alle seguenti domande sostituendo ai parametri $a$ e $b$ i valori assegnati. Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Calcolare la posizione $\sigma_a$ dell'asintoto verticale del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(5s+a)(s+b)}{s(s^2+3\,s+a)} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_a = b\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{2b+a}{a}$$

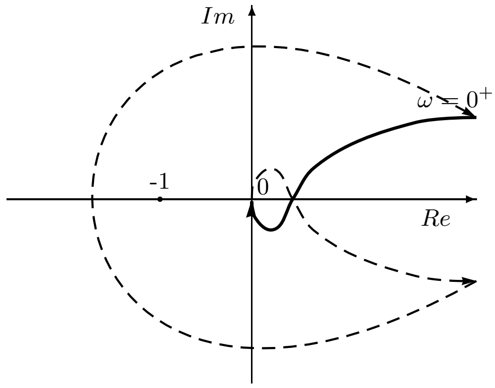
2. Sia data la seguente equazione caratteristica: $-3\;s^4 - s^3 - 2\,s^2 - 4\,s - 5 = 0$, anche senza calcolare la tabella di Routh è possibile affermare che:

○ l'equazione caratteristica ha almeno una radice a parte reale positiva;
○ l'equazione caratteristica ha almeno una radice a parte reale negativa;
⊗ l'equazione caratteristica può avere delle radici a parte reale positiva;
⊗ l'equazione caratteristica può avere delle radici radici a parte reale negativa;

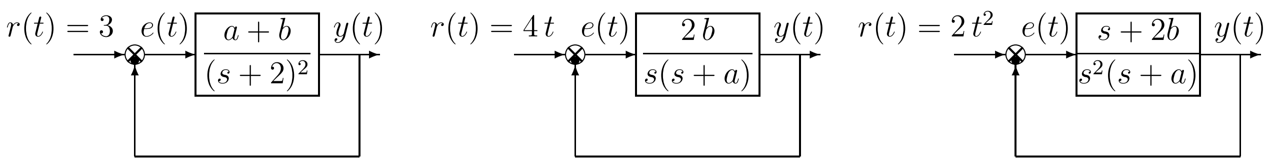
3. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con 2 poli nell'origine e tutti gli altri a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di $K$:

○ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
⊗ $(K < 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;




4. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:

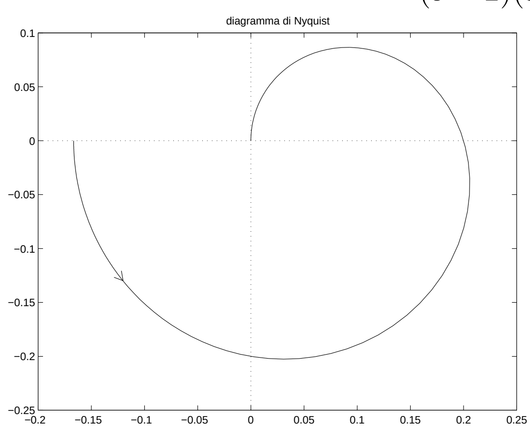



$$e(\infty) = \frac{12}{4+a+b} \qquad e(\infty) = \frac{2\,a}{b} \qquad e(\infty) = \frac{2\,a}{b}$$

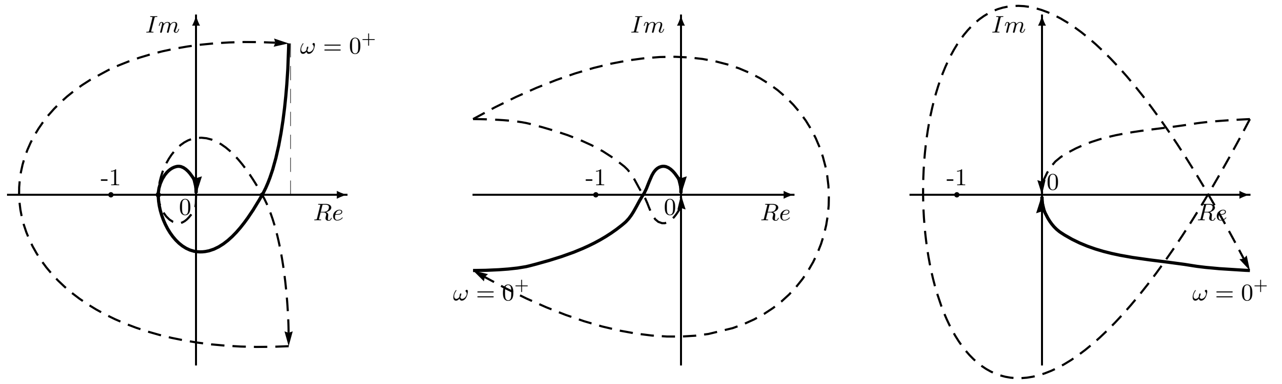
5. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \dfrac{-(s+1)}{(s-2)(s-3)}$

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di $K$:

⊗ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
○ $(K < 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;



6. Chiudere all'infinito i seguenti diagrammi di Nyquist. Nota: tutti i diagrammi di Nyquist fanno riferimento a sistemi con tutti i poli a parte reale negativa eccezion fatta per un polo semplice o doppio nell'origine.




7. Enunciare il criterio di Nyquist nella sua formulazione più semplice valida solo per sistemi stabili ad anello aperto).

   *Criterio di Nyquist.* *Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per ...*

   *un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ non circondi né tocchi il punto critico $-1+j0$.*

8. Il margine di fase $M_\varphi$ di un sistema $G(s)$:

   ○ è positivo se e solo se il sistema $G(s)$ è stabile;

   ⊗ è positivo se e solo se il sistema $G(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile;

   ○ è maggiore di 1 se e solo se il sistema $G(s)$ è stabile;

   ○ è maggiore di 1 se e solo se il sistema $G(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile;

9. Una stima della larghezza di banda $\omega_{f0}$ di un sistema retroazionato avente $G(s)$ sul ramo diretto e $H(s) = h$ sul ramo di retroazione è:

   ○ $\omega_{f0}$ tale che $|G(j\omega_{f0})| = 1$

   ○ $\omega_{f0}$ tale che $|G(j\omega_{f0})| = h$

   ⊗ $\omega_{f0}$ tale che $|G(j\omega_{f0})| = \frac{1}{h}$

10. Siano $M_0 = G(j0)$ ed $M_1 = \max_\omega |G(j\omega)|$, rispettivamente, il guadagno statico e il valore massimo del modulo della funzione di risposta armonica del sistema lineare stabile $G(s)$. Il picco di risonanza $M_R$ del sistema $G(s)$ è definito come segue:

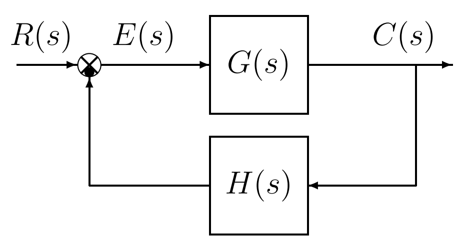
    ○ $M_R = M_1$

    ⊗ $M_R = \frac{M_1}{M_0}$

    ○ $M_R = \sqrt{M_1 M_0}$

    ⊗ $M_R = M_1 - M_0$ (se $M_0$, $M_1$ ed $M_R$ sono espressi in db)

11. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro $\alpha$ interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:




$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$