Controlli Automatici A - A.A. 2005/06

Secondo Compito

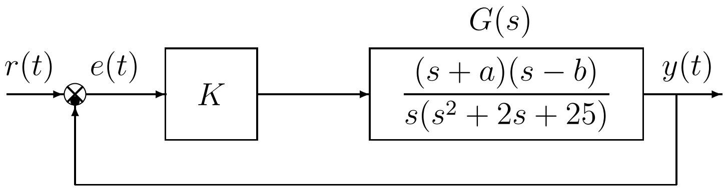
14 Dicembre 2005 - Esercizi

Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+a)(s-b)}{s(s^2+2s+25)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (2+K)s^2 + [25 + (a-b)K]s - K\,a\,b = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccll}
3 & 1 & 25+(a-b)K & \rightarrow & 1 > 0 \\
2 & 2+K & -K\,a\,b & \rightarrow & K > -2 \\
1 & (2+K)[25+(a-b)K] + K\,a\,b & & \rightarrow & (2+K)[25+(a-b)K] + K\,a\,b > 0 \\
0 & -K\,a\,b & & \rightarrow & K < 0
\end{array}$$

La disequazione di riga 1 può essere riscritta nel modo seguente:

$$(a-b)K^2 + [25 + 2(a-b) + a\,b]K + 50 > 0$$

Le soluzioni limite sono le seguenti:

$$K_{1,2} = \frac{-[25 + 2(a-b) + a\,b] \pm \sqrt{[25 + 2(a-b) + a\,b]^2 - 200(a-b)}}{2(a-b)}$$

Per i valori di a e di b utilizzati, le 2 radici $K_{1,2}$ sono sempre reali e il valore limite K^* per la stabilità è il seguente:

$$K^* = \begin{cases} \dfrac{-[25 + 2(a-b) + a\,b] + \sqrt{[25 + 2(a-b) + a\,b]^2 - 200(a-b)}}{2(a-b)} & \text{se} \quad a \neq b \\[2ex] \dfrac{-50}{25 + a\,b} & \text{se} \quad a = b \end{cases}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$K^* < K < 0$$

Nel caso $a = 3$ e $b = 5$ si ha: $K^* = -1.2956 < K < 0$. La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è

$$\omega^* = \sqrt{25 + (a-b)K^*}$$

Nel caso $a = 3$ e $b = 5$ si ha: $\omega^* = 5.2527$.

a.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

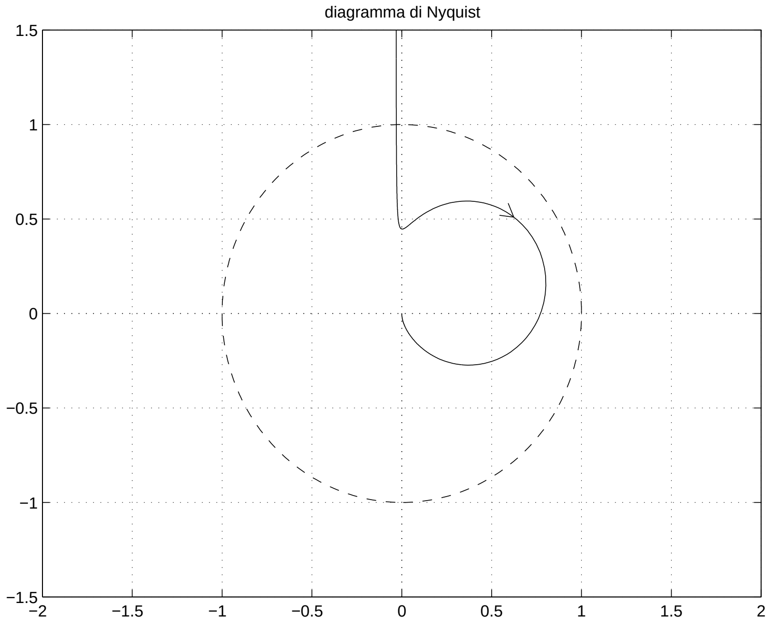


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $b = 5$ e $\omega \in [0,\ \infty]$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $b = 5$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1. La posizione dell'asintoto verticale è la seguente:

$$\sigma_a = \frac{-a\,b}{25}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{2}{25}\right) \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad \sigma_a = -0.032$$

Vi è un'unica intersezione σ_1^* con il semiasse reale positivo. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto a.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad \sigma_1^* = 0.7716$$

Il corrispondente valore di ω_1^* è quello determinato al punto a.1: $\omega_1^* = \sqrt{25+(a-b)K^*} = 5.2527$.

a.3) Calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 5\,t$.

Soluzione: l'errore a regime richiesto si calcola facilmente dopo aver calcolato la costante di velocità del sistema:

$$K_v = -\frac{K\,a\,b}{25} \qquad \rightarrow \qquad e(\infty) = \frac{R_0}{K_v} = -\frac{125}{K\,a\,b} \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad e(\infty) = -\frac{25}{3\,K}$$

b) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici:

b.1) Indicare il margine di ampiezza M_a e il margine di fase M_φ.

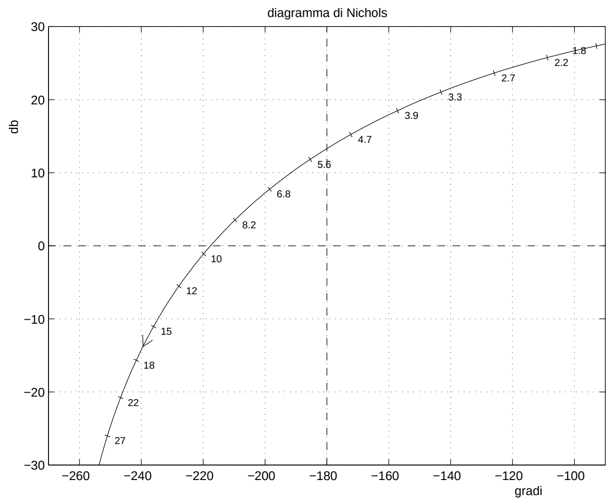
b.2) Calcolare per quali valori del guadagno $K_p > 0$ il sistema $K_p\,G(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile. Nota: i valori espressi in db vanno convertiti in valori numerici.

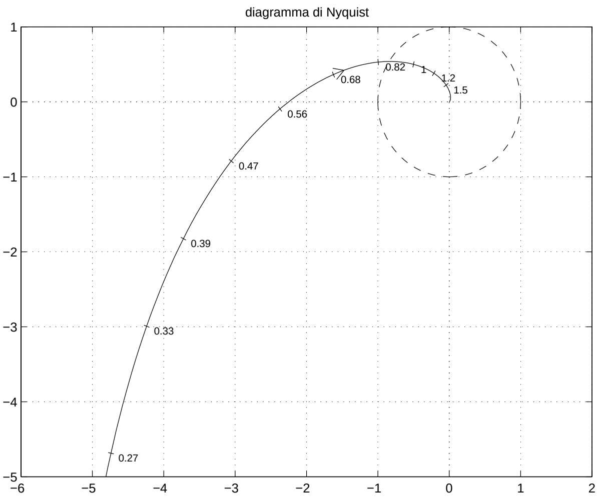
b.3) Determinare per quale valore K_φ del guadagno il sistema $K_\varphi\,G(s)$ presenta un margine di fase pari a $M_\varphi = 2(10 + a)$

b.4) Determinare per quale valore K_a del guadagno il sistema $K_a\,G(s)$ presenta un margine di ampiezza pari a $M_a = 2\,b$

Per $a = 3$ e $b = 5$ i valori richiesti sono i seguenti:

$G_1(j\omega)$ $\qquad\qquad$ $G_2(j\omega)$





b.1) $\quad M_a = -13.3$ db $= 0.216$

$\quad\quad M_\varphi = -37.6$ gradi

b.2) $\quad 0 < K_1 < 0.216$

b.3) $\quad K_\varphi = -18.9$ db $= 0.113$

b.4) $\quad K_a = -33.3$ db $= 0.0216$

b.1) $\quad M_a = -7.04$ db $= 0.44$

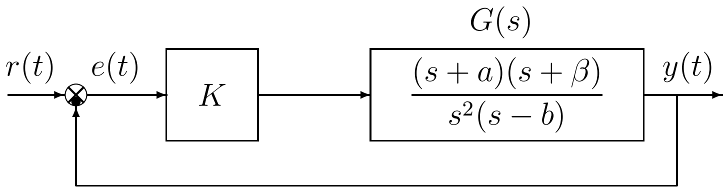
$\quad\quad M_\varphi = -32.59$ gradi

b.2) $\quad 0 < K_2 < 0.44$

b.3) $\quad K_\varphi = -12$ db $= 0.25$

b.4) $\quad K_a = -27.1$ db $= 0.044$

c) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



c.1) Determinare, in funzione del parametro $\beta > 0$, per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+a)(s+\beta)}{s^2(s-b)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (K-b)s^2 + K(a+\beta)s + K\,a\,\beta = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & K(a+\beta) & \rightarrow & 1 > 0 \\
2 & K-b & K\,a\,\beta & \rightarrow & K > b \\
1 & K(K-b)(a+\beta) - K\,a\,\beta & & \rightarrow & (K-b)(a+\beta) > a\,\beta \\
0 & K\,a\,\beta & & \rightarrow & K > 0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$K > b + \frac{a\,\beta}{a+\beta} = K^* \qquad \rightarrow \qquad \omega^* = \sqrt{K^*(a+\beta)}$$

Nel caso $a = 3$, $b = 5$ e $\beta = 2$ si ha:

$$K > K^* = 6.2, \qquad\qquad \omega^* = 5.5678$$

c.2) Posto $\beta = 2$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

Soluzione: il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$ e $b = 5$ è mostrato in Fig. 2. Vi è un'unica intersezione σ_1^* con il semiasse reale negativo:

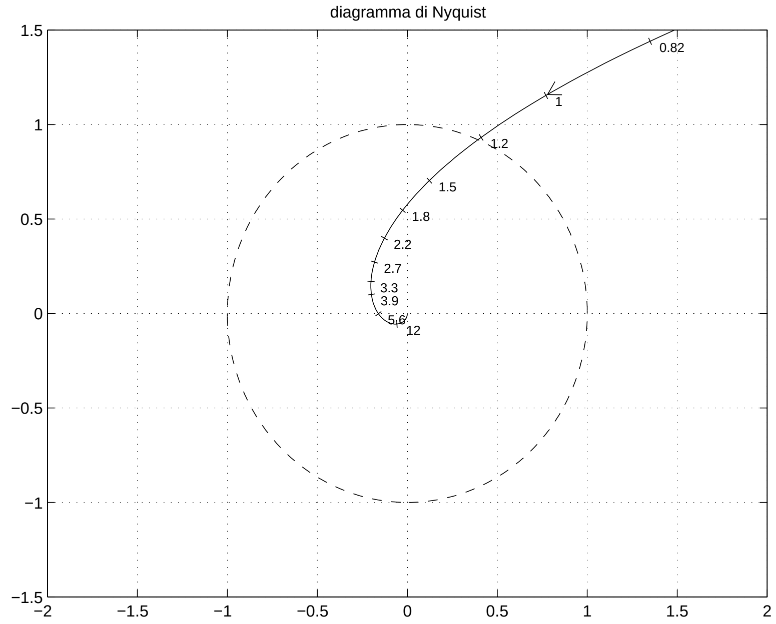


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$ e $b = 5$.

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} \qquad \xrightarrow{a=3,\, b=5} \qquad \sigma^* = -0.1613$$

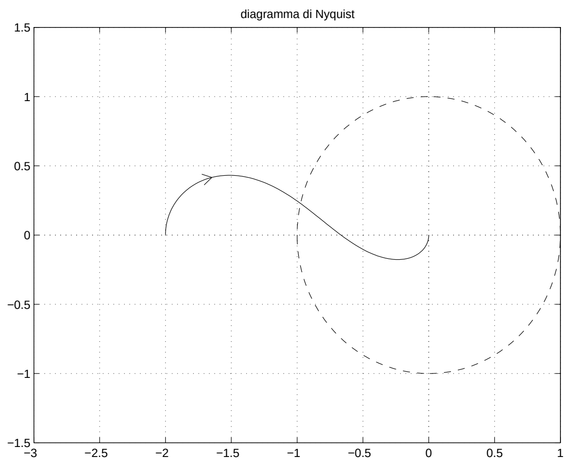
c.3) Calcolare, in funzione dei parametri K ed β, l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 4\,t^2$.

Soluzione: l'errore a regime è funzione della costante di accelerazione del sistema:

$$K_a = -\frac{K\,a\,\beta}{b} \qquad \rightarrow \qquad e(\infty) = \frac{R_0}{K_a} = -\frac{8\,b}{K\,a\,\beta} \qquad \xrightarrow{a=3,\, b=5} \qquad e(\infty) = -\frac{40}{3\,K\,\beta}$$

d) Sapendo che il diagramma di Nyquist riportato a fianco relativo ad un sistema $G(s)$ che ha un polo a parte reale positiva, determinare per quali valori del guadagno K il sistema $K\,G(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile:

$$K > 1.5$$



e) I diagrammi di Bode riportati sotto sono relativi ad un sistema $G_3(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione consentita dai grafici:

e.1) Indicare il margine di fase M_φ.

e.2) Calcolare per quali valori $K_p > 0$ del guadagno il sistema $K_p\,G(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile.

e.3) Determinare per quale valore K_φ del guadagno il sistema $K_\varphi\,G(s)$ presenta un margine di fase pari a $M_\varphi = 2(10 + a)$

e.4) Determinare per quale valore K_a del guadagno il sistema $K_a\,G(s)$ presenta un margine di ampiezza pari a $M_a = 2\,b$

e.5) Fornire una stima della larghezza di banda ω_{f0} del sistema retroazionato.

e.6) Fornire una stima del tempo di salita T_s della risposta al gradino del sistema retroazionato.

Per $a = 3$ e $b = 5$ i valori richiesti sono i seguenti:

e.1) $M_\varphi = -98$ gradi

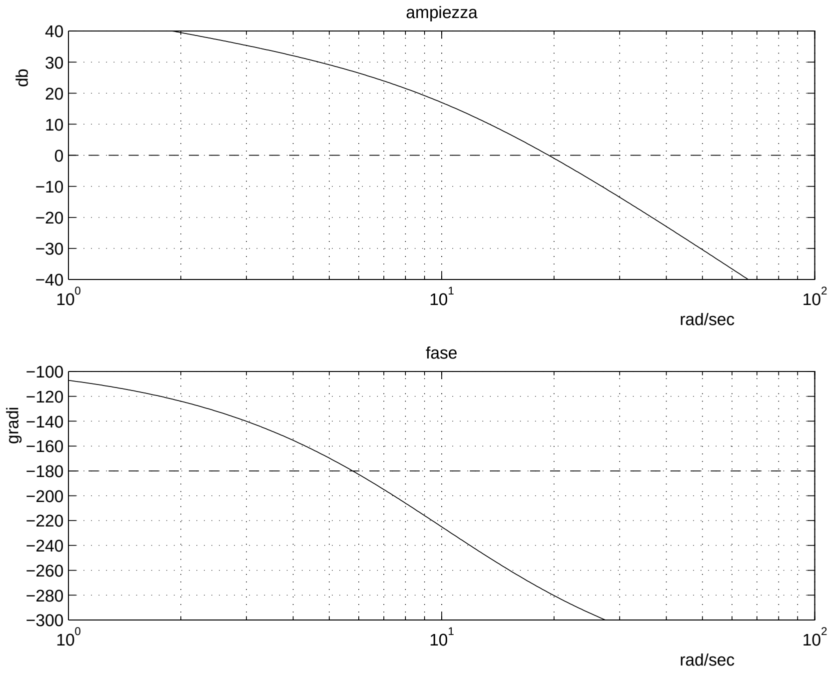
e.2) $0 < K_p < 0.044 = -27$ db

e.3) $K_\varphi = -32.3$ db $= 0.0242$

e.4) $K_a = -47.1$ db $= 0.00444$

e.5) $\omega_{f0} = 20$ rad/sec

e.6) $T_s = 0.05$ s



Controlli Automatici A
Secondo Compito
14 Dicembre 2005 - Domande Teoriche

Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle seguenti domande sostituendo ai parametri a e b i valori assegnati. Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Calcolare la posizione σ_a dell'asintoto verticale del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(1 + b\,s)(6\,s - 2)}{s(s^3 + 2\,s^2 + a\,s + 10)} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_a = \frac{-1}{5}\left(b - 3 - \frac{a}{10}\right)$$

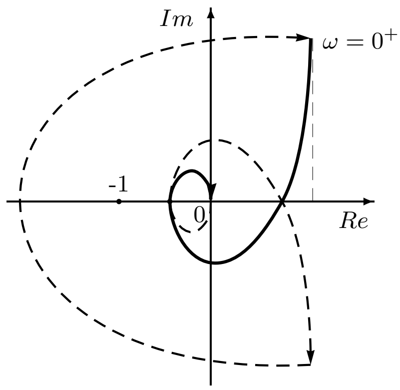
2. Nell'applicazione del criterio di Routh, le radici dell'equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla

⊗ sono radici anche dell'equazione caratteristica di partenza
○ sono tutte radici a parte reale nulla
⊗ sono radici simmetriche rispetto all'origine del piano complesso

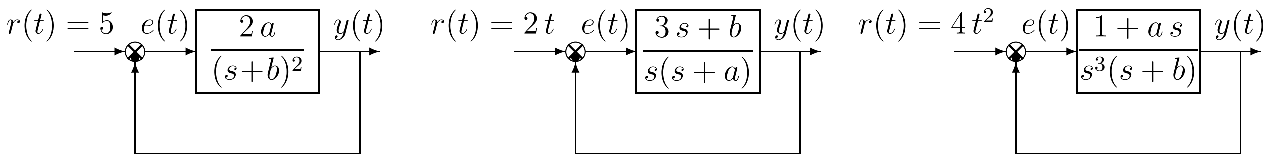
3. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con 1 polo nell'origine e tutti gli altri a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

○ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;
○ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
⊗ $(K < 0,\ |K| << 1)$;



4. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{5}{1 + \frac{2a}{b^2}} = \frac{5b^2}{b^2 + 2a} \qquad e(\infty) = \frac{2\,a}{b} \qquad e(\infty) = 0$$

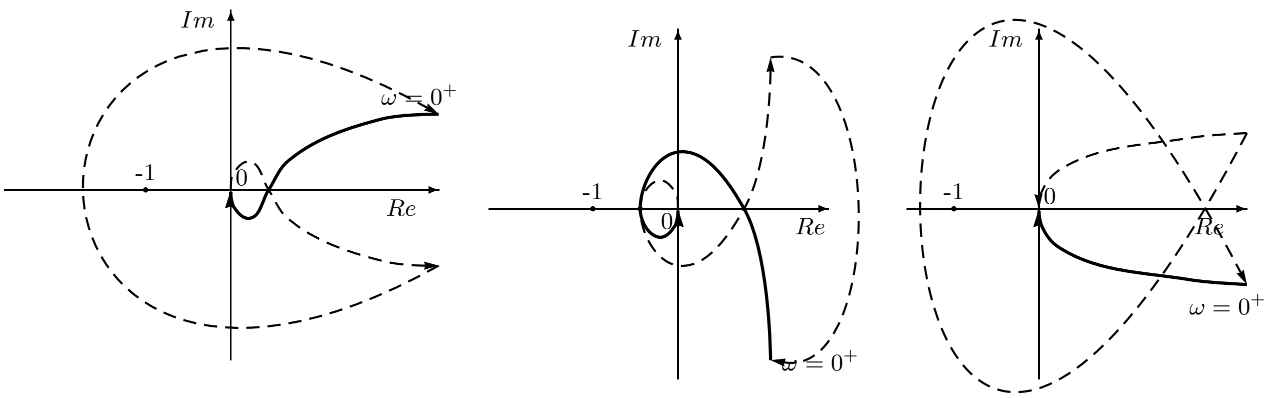
5. Il criterio di Routh per lo studio della stabilità di un sistema retroazionato

⊗ è un criterio necessario e sufficiente
○ è un criterio solo necessario
○ è un criterio solo sufficiente
○ può essere utilizzato solo per sistemi che ad anello aperto siano stabili

6. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa

○ ha un guadagno statico minore di 1
○ ha un guadagno statico maggiore di 1
⊗ ha un guadagno statico unitario

7. Chiudere all'infinito i seguenti diagrammi di Nyquist. Nota: tutti i diagrammi di Nyquist fanno riferimento a sistemi con tutti i poli a parte reale negativa eccezion fatta per un polo semplice o doppio nell'origine.



8. Enunciare il criterio di Nyquist nella sua formulazione più generale valida anche per sistemi instabili ad anello aperto).

   Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ ...

   non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio

   condizione ...

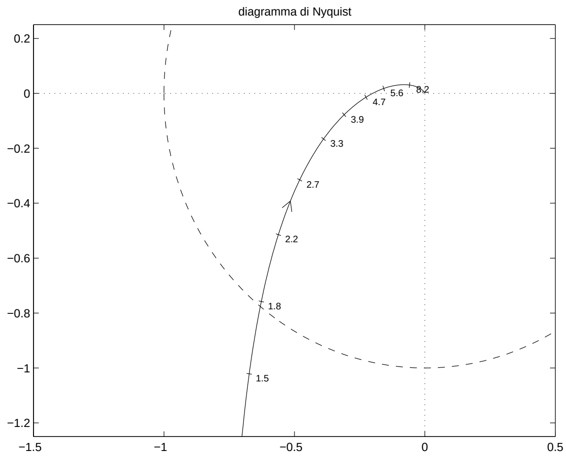
   necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli della funzione $F(j\omega)$ a parte reale positiva.

9. Nella determinazione degli errori a regime, il *principio del modello interno* afferma che:

   affinché sia neutralizzato (con errore a regime nullo) un modo $r(t)$ in ingresso corrispondente ad un polo nell'origine di ordine h, occorre che ...

   lo stesso modo sia presente nel regolatore (o nel sistema controllato), che pertanto deve avere un polo nell'origine pure di ordine h o superiore, cioè contenere un modello del sistema elementare $1/s^h$ che genera quel modo.

10. Dato il diagramma di Nyquist riportato a fianco, fornire una stima della larghezza di banda ω_{f0} del sistema retroazionato e del tempo di salita T_s della risposta al gradino del sistema retroazionato:



$$\omega_{f0} \simeq 1.8 \ \text{rad/s}$$

$$T_s \simeq 0.56 \ \text{s}$$

11. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con un elevato guadagno statico d'anello

   ⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$

   ○ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$

   ⊗ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sull'uscita del sistema