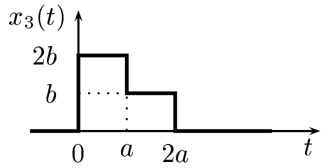
Controlli Automatici - Primo Compito
13 Novembre 2004 - Esercizi
Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = (a + b\,t^3)\,e^{-3\,t}, \qquad x_2(t) = e^t \sin(a\,t + b),$$



Soluzione:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{a}{s+3} + \frac{6\,b}{(s+3)^4}, \\ X_2(s) &= \frac{a\,\cos b}{(s-1)^2 + a^2} + \frac{(s-1)\,\sin b}{(s-1)^2 + a^2}, \\ X_3(s) &= \frac{b}{s}\left[2 - e^{-a\,s} - e^{-2a\,s}\right] \end{aligned}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{a\,b}{s(s^2 - b^2)}, \qquad G_2(s) = a + \frac{10}{(s+b)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s+b}{s^2 + a^2}$$

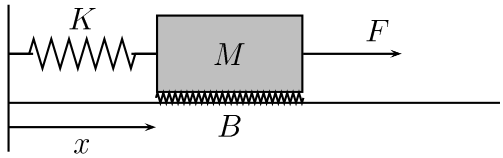
Soluzione:

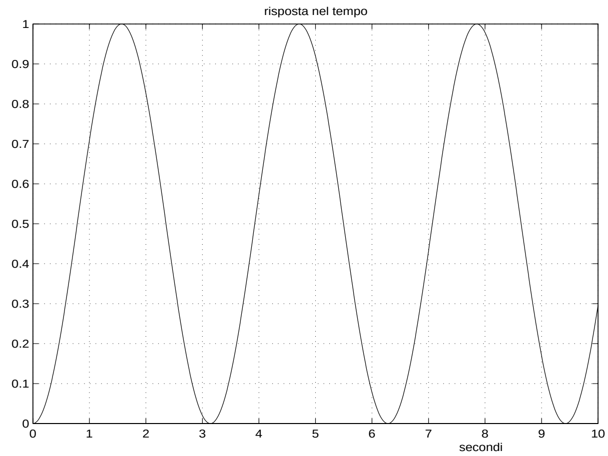
$$G_1(s) = \tfrac{a\,b}{s(s-b)(s+b)} = \tfrac{a}{2b}\left[\tfrac{1}{(s+b)} + \tfrac{1}{(s-b)} - \tfrac{2}{s}\right] \quad \rightarrow \quad g_1(t) = \tfrac{a}{2b}\left[e^{-b\,t} + e^{b\,t} - 2\right]$$

$$G_2(s) = a + \tfrac{10}{(s+b)^3} \quad \rightarrow \quad g_2(t) = a\,\delta(t) + 5\,t^2 e^{-b\,t}$$

$$G_3(s) = \tfrac{s+b}{s^2+a^2} = \tfrac{s}{s^2+a^2} + \tfrac{b}{a}\tfrac{a}{s^2+a^2} \quad \rightarrow \quad g_3(t) = \cos(a\,t) + \tfrac{b}{a}\sin(a\,t)$$

c) Il sistema massa-molla-smorzatore mostrato a fianco è caratterizzato dall'equazione differenziale $M\,\ddot{x} + B\,\dot{x} + K\,x = F$. Data la risposta $x(t)$ del sistema ad un gradino di forza $F = 10\,N$ (vedi l'andamento temporale mostrato a fianco), determinare:





c.1) la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema in forma simbolica:

$$G(s) = \frac{1}{M\,s^2 + B\,s + K}$$

c.2) la posizione di risonanza ω_R del sistema:

$$\omega_R = \omega_R = \sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{2\pi}{T} = 2$$

c.3) i valori numerici dei parametri M, B e K (cioè massa, attrito lineare e rigidità della molla):

$$M = 5, \qquad B = 0, \qquad K = 20$$

Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M\,s^2 + B\,s + K}$$

La risposta al gradino mostrata in figura evidenzia chiaramente che il tempo di assestamento del sistema è $T_a = \infty$, cioè il sistema è semplicemente stabile e i suoi poli complessi coniugati si trovano sull'asse immaginario. Una situazione di questo tipo si può avere solo se le dissipazioni del sistema sono nulle:

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = \infty \qquad \rightarrow \qquad \delta\omega_n = \frac{B}{2\,M} = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = 0$$

da cui si ricava:

$$B = 0 \qquad \rightarrow \qquad M\,s^2 + K = 0 \qquad \rightarrow \qquad s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{K}{M}} = \pm j\omega_n$$

Essendo $\delta = 0$, la pulsazione di risonanza ω_R coincide con $\omega_n = \omega$. Dalla misura del periodo $T \simeq 3.14$ s dell'oscillazione in uscita si risale facilmente al calcolo di ω_R:

$$\omega_R = \omega_n = \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{2\pi}{T} \simeq \frac{2\pi}{3.14} = 2 \tag{1}$$

Il valore a regime x_∞ del segnale in uscita $x(t)$ coincide con il valore medio $x_\infty = 0.5$ del segnale stesso ed è uguale al prodotto tra l'ampiezza dell'ingresso ($F = 10$) e il guadagno statico $G(0)$ del sistema:

$$x_\infty = F \cdot G(0) \qquad \rightarrow \qquad 0.5 = 10 \cdot \frac{1}{K} \qquad \rightarrow \qquad K = 20$$

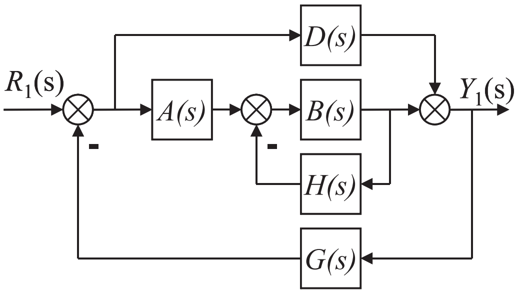
Il valore di M si determina facilmente sostituendo K in (1):

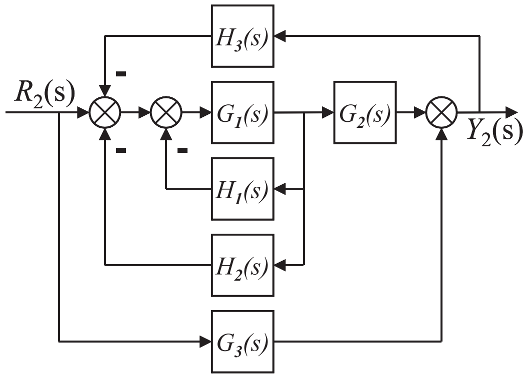
$$\omega_R = \sqrt{\frac{K}{M}} = 2 \qquad \rightarrow \qquad M \simeq \frac{K}{4} = 5$$

I valori numerici cercati dei parametri M, B e Ksono quindi i seguenti:

$$M = 5, \qquad B = 0, \qquad K = 20$$

d) Applicando la formula di Mason, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$ e $G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{R_2(s)}$ dei seguenti 2 schemi a blocchi:





$$G_1(s) = \frac{AB + D(1 + BH)}{1 + BH + ABG + DG + BHDG}$$

$$G_2(s) = \frac{G_1G_2 + G_3(1 + G_1H_1 + G_1H_2)}{1 + G_1H_1 + G_1H_2 + G_1G_2H_3}$$

e) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{10\, b\, (5 - s)^2}{s(s^2 - 6\, a\, s + 900)(10s + b)}$$

Le pulsazioni critiche del sistema sono: $\omega = 0$, $\omega = \frac{b}{10}$, $\omega = 5$ e $\omega = 30$.

Le funzioni approssimanti della $G(s)$ per $s \to 0^+$ e per $s \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = G(s)|_{s\to 0^+} = \frac{25}{90\, s} \qquad \to \qquad \begin{cases} |\cdot| & = & \infty \\ \varphi_0 & = & -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$G_\infty(s) = G(s)|_{s\to \infty} = \frac{b}{s^2} \qquad \to \qquad \begin{cases} |\cdot| & = & 0 \\ \varphi_\infty & = & -\pi \end{cases}$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$ sono mostrati in Fig. 1

Il guadagno β del diagramma asintotico di Bode delle ampiezze della funzione $G(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = \frac{b}{10}$ è il seguente:

$$\beta = \frac{10 \cdot b \cdot 25}{\frac{b}{10} \cdot 900 \cdot b} = \frac{25}{9 \cdot b}$$

f) Si faccia riferimento al sistema $G(s)$ il cui diagramma di Bode dei moduli è mostrato in figura. Sapendo che $G(s)$ è un sistema a fase minima e nei limiti della precisione consentita dal grafico:

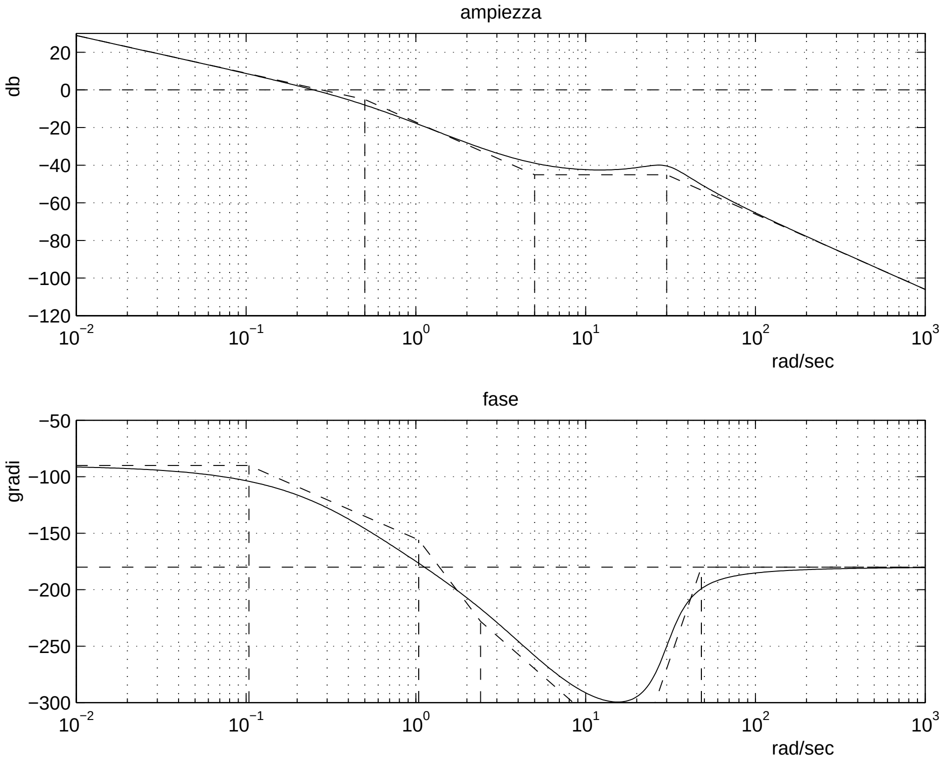


Figura 1: I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$

f.1) calcolare l'espressione analitica della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{100(1 + \frac{s}{5})^2}{(1 + \frac{2 \cdot 0.1}{(0.2)}\, s + \frac{s^2}{(0.2)^2})(1 + \frac{s}{200})}$$

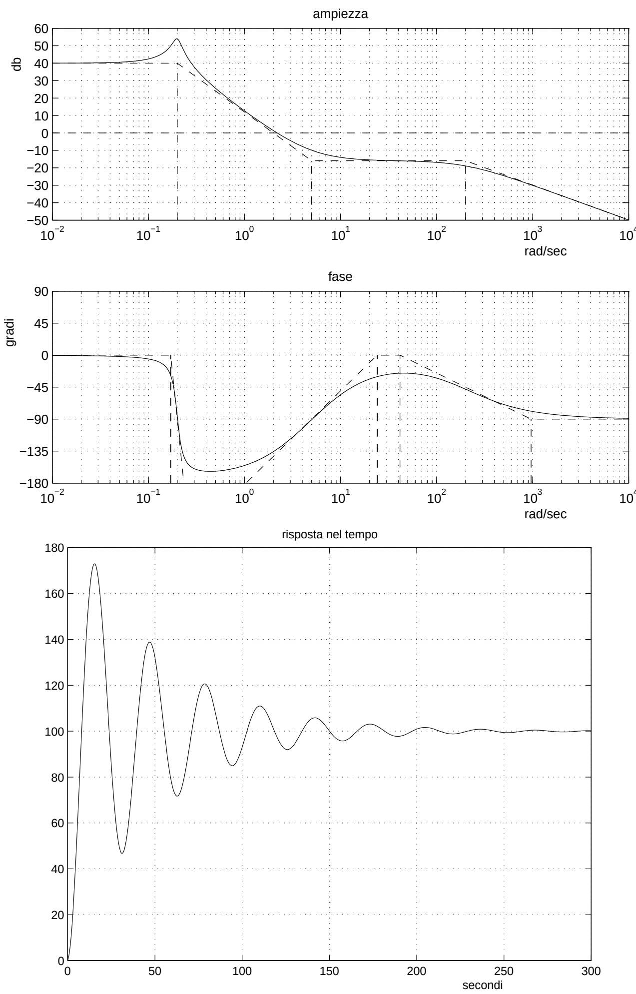
f.2) Utilizzando la formula di Bode e/o la funzione $G(s)$ calcolata al punto precedente, disegnare l'andamento qualitativo del diagramma delle fasi della funzione $G(s)$. (Vedi soluzioni riportata a fianco).

f.3) Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G(s)$ specificando in modo particolare il valore a regime dall'uscita y_∞ e del tempo di assestamento T_a:

$$y_\infty = 100 \qquad T_a = 150 \text{ s}$$

Nota. Si ricorda che:

$$S\% = 100\, e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}, \qquad \delta = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{M_R^2 - 1}}{2\, M_R}}$$



L'espressione analitica della funzione $G(s)$ è la seguente:

$$G(s) = \frac{100(1+\frac{s}{5})^2}{(1+\frac{2\cdot 0.1}{(0.2)}\,s+\frac{s^2}{(0.2)^2})(1+\frac{s}{200})}$$

Infatti: 1) il guadagno statico è $G(0)=100$; in corrispondenza della pulsazione $\omega_n = 0.2$ sono presenti 2 poli complessi coniugati caratterizzati da un coefficiente di smorzamento $\delta = 0.1$; alla pulsazione $\omega = 5$ agiscono 2 zeri e alla pulsazione $\omega = 200$ agisce un ultimo polo. Il calcolo di $\delta = 0.1$ può essere fatto leggendo dal diagramma dei moduli il picco di risonanza $M_R = 14$ db $= 5$ e utilizzando la relazione data:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{M_R^2-1}}{2\,M_R}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5^2-1}}{2\,5}} = 0.1005$$

L'andamento qualitativo del diagramma delle fasi può essere fatto utilizzando la funzione $G(s)$ appena trovata, oppure (essendo il sistema a fase minima) utilizzando la formula di Bode: al primo tratto a pendenza 0 corrisponde una fase $\varphi_0 = 0$; per $\omega = \omega_n = 0.2$ la fase è $\varphi_{0.2} = -\frac{pi}{2}$ per l'azione dei due poli complessi coniugati; nel tratto a pendenza -2 (per $\omega \simeq 1$) la fase tende a $\varphi_1 = -\pi$; per $\omega \simeq 30$) la fase tende di nuovo a zero $\varphi_{30} \simeq 0$; il tratto finale è a pendenza -1 per cui $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati a fianco della domanda f.1.

La risposta al gradino unitario della funzione $G(s)$ è sicuramente oscillatoria smorzata in quanto il sistema è dominato da una coppia di poli complessi coniugati posizionati in

$$p_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = -0.1\cdot 0.2 \pm j\,0.2\sqrt{1-(0.1)^2} = -0.02 \pm j\,0.199$$

Il tempo di assestamento T_a del sistema è:

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{0.02} = 150 \text{ s}$$

Il periodo T dell'oscillazione e la massima sovraelongazione S del sistema sono:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.199} \simeq 3.14 \text{ s}, \qquad S\% = 100\,e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 100\,e^{\frac{-0.1\pi}{\sqrt{1-0.1^2}}} = 72.9\,\%$$

Siccome il gradino in ingresso ha ampiezza unitaria, il valore y_∞ raggiunto a regime dall'uscita è $y_\infty = G(0) = 100$. Il valore massimo $y_M = y_\infty(1+\frac{S\%}{100}) = 172.9$ è raggiunto in corrispondenza dell'istante $T_M = \frac{T}{2} \simeq 15.7$ s. L'andamento qualitativo della risposta al gradino unitario della funzione $G(s)$ è mostrato a fianco della domanda f.3.

g) Si faccia riferimento al diagramma di Nichols (mostrato in figura) della funzione $G(s)$. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

g.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = b + 4\cos(2a\,t + \frac{\pi}{6})$ Utilizzando il concetto di "funzione di risposta armonica", il valore a regime dell'uscita è il seguente:

$$y_\infty(t) \simeq b\cdot G(0) + 4\,|G(j\,2\,a)|\,\cos(2a\,t + \frac{\pi}{6} + \arg[G(j\,2\,a)])$$

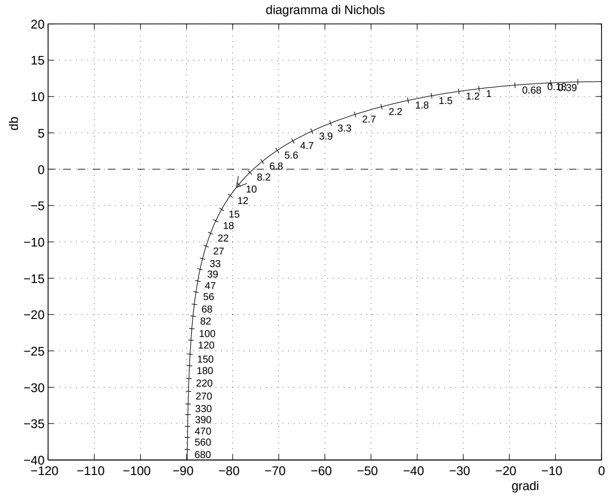
Per $a = 3$ e $b = 5$ si ha $x(t) = 5 + 4\cos(6\,t + \frac{\pi}{6})$. Dal diagramma di Nichols risulta che il guadagno statico $G(0)$ e la funzione di risposta armonica $G(j\,6)$ valgono:

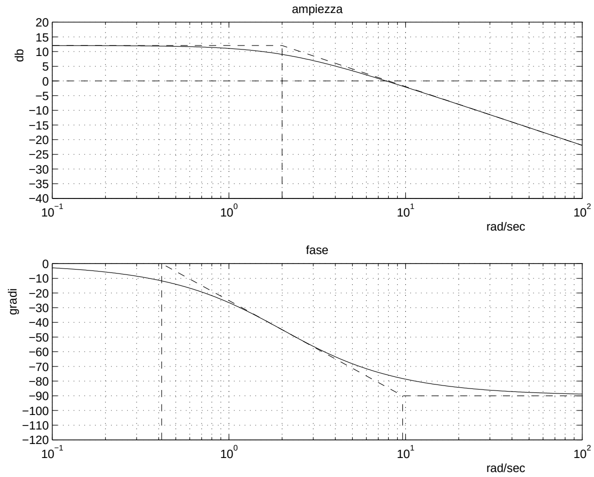
$$G(0) = 12 \text{ db} = 4, \qquad |G(j\,6)| \simeq 2 \text{ db} = 1.26, \qquad \arg[G(j\,6)] \simeq -72^o$$

Il valore a regime dell'uscita è quindi il seguente:

$$y_\infty(t) \simeq 20 + 5\,\cos(6\,t + \frac{\pi}{6} - 72^o\frac{\pi}{180}]) \simeq 12 + 5\,\cos(6\,t - 0.73)$$

g.2) ricostruire i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ leggendo il diagramma di Nichols in corrispondenza di $\omega = \{0.1,\ 0.2,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 20,\ 50,\ 100\}$. Guardando i diagrammi di Bode così ottenuti, fornite una stima del tempo di assestamento $T_a \simeq 1.5$ del sistema $G(s)$.





I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati a fianco del Diagramma di Nichols. Chiaramente la funzione $G(s)$ rappresenta un sistema del primo ordine con un polo in corrispondenza della pulsazione $\omega = 2$. Il tempo di assestamento del sistema è quindi $T_a = \frac{3}{2} = 1.5$ s.

Controlli Automatici - Primo Compito
13 Novembre 2004 - Domande
Compito Nr. $\boxed{a = 3}$ $\boxed{b = 5}$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad "a" e "b" i valori assegnati e si risponda alle domande. Per ciascuno dei test a soluzione multipla, segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test contengono più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate.

1. Scrivere, in funzione dei segnali $V(t)$ e $I(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento (conduttanza di un circuito RLC):

$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{C\,s}{C\,L\,s^2 + RC\,s + 1} \qquad \rightarrow \qquad C\,L\,\ddot{I}(t) + RC\dot{I}(t) + I(t) = C\,\dot{V}(t)$$

2. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è l'andamento temporale $g_1(t)$ corrispondente ad una coppia di poli complessi coniugati posizionati in $p_{1,2} =$ "a" $\pm\, j$ "b" (indicare in modo simbolico i parametri non noti):

$$g_1(t) = M\,e^{a\,t}\sin(b\,t + \varphi)$$

3. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema del primo ordine caratterizzato da un guadagno statico pari ad "a" ed un tempo di assestamento pari a "b":

$$G(s) = \frac{a}{1 + \frac{b}{3}s} = \frac{3\,a}{b\,s + 3}$$

4. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s - b}{a\,s^2 + 2\,b\,s + 4} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = \frac{1}{a}$$

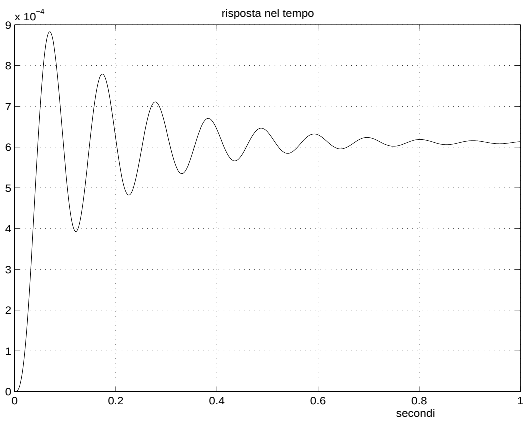
5. Calcolare il valore il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2\,s + b}{s(s + a)(s - b)} \qquad \rightarrow \qquad y_\infty =$$

il teorema del valore finale non può essere applicato perchè il sistema è instabile

6. Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G_1(s)$. Calcolare il guadagno statico $K_0 = \frac{8000}{(60^2+a^2)(60^2+b^2)} \simeq 0.0006$ e fornire una stima del tempo di assestamento
$T_a \simeq \frac{3}{b}$ s.

$$G_1(s) = \frac{100(s + 80)}{((s + 60)^2 + a^2)((s + b)^2 + 60^2)}$$



7. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{a - b\,s}{a + b\,s} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} M(\omega) = & 1 \\ \varphi(\omega) = & -2\arctan\dfrac{b\,\omega}{a} \end{cases}$$

8. Calcolare la trasformata $Y(s)$ del segnale di uscita corrispondente all'equazione differenziale $2\,\dot{y}(t) + 3\,a\,y(t) = 4\,x(t)$, in presenza dell'ingresso non nullo $X(s)$ e dalla condizione iniziale $y(0) = b$.

$$Y(s) = \frac{4}{2\,s + 3\,a}\,X(s) + \frac{2\,b}{2\,s + 3\,a}$$

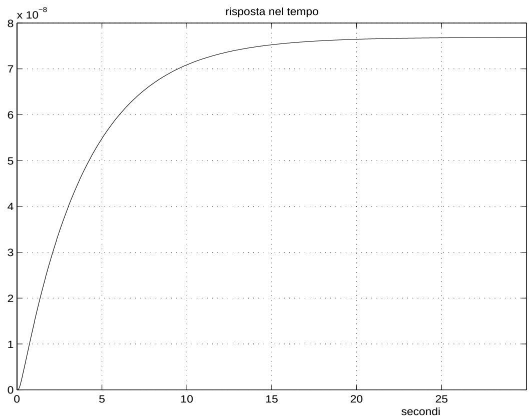
9. Sia dato il seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s + 4.35)(2\,s + 46)}{(s + 273)(3\,s + 156)(20\,s + 5.2)(s^2 + 10.3s + 25)(s^2 + 18.3s + 470)}$$

Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G(s)$ stimando qualitativamente il tempo di assestamento T_a e la massima sovraelongazione $S\%$ del sistema:

$$T_a = \frac{3}{0.26} \simeq 12 \text{ s}$$

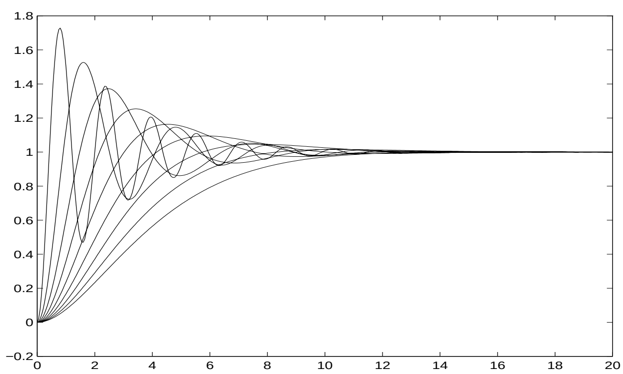
$$S\% = 0$$



10. Si considerino le risposte al gradino unitario riportate in figura.

Quali di questi parametri rimangono costanti per tutti i sistemi che hanno generato gli andamenti riportati in figura?

- ○ picco di risonanza M_R;
- ○ pulsazione naturale ω_n;
- ⊗ tempo di assestamento T_a;
- ○ massima sovraelongazione $S\%$;
- ○ coefficiente di smorzamento δ;



11. La pulsazione di risonanza ω_R di un sistema del 2^o ordine è:

- ○ $\omega_R = \omega_n\sqrt{1 - \delta^2}$
- ⊗ $\omega_R = \omega_n\sqrt{1 - 2\delta^2}$
- ○ $\omega_R = \delta\sqrt{1 - \delta^2}$
- ○ $\omega_R = \delta\sqrt{1 - 2\delta^2}$

12. Sia $y(t) = Y(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica del sistema lineare $G(s)$ all'ingresso $x(t) = X\sin(\omega t + \varphi_0)$. La definizione della corrispondente funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è:

- ○ $F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}e^{j(\varphi(\omega)+\varphi_0)}$
- ○ $F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}e^{j(\varphi(\omega)-\varphi_0)}$
- ⊗ $F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}e^{j\varphi(\omega)}$
- ⊗ la $F(\omega)$ non è funzione dell'ampiezza X del segnale di ingresso