Controlli Automatici - Primo Compito
12 Novembre 2003 - Soluzioni

Compito Nr. $a =$ $b =$

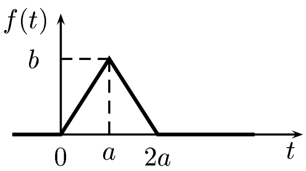
Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = a\, t^3\, e^{-b\,t}, \qquad \Longrightarrow \qquad X_1(s) = \frac{3!\, a}{(s+b)^4}$$

$$x_2(t) = b\, e^{at} \cos[(a+b)\,t], \qquad \Longrightarrow \qquad X_2(s) = \frac{b(s-a)}{(s-a)^2 + (a+b)^2}$$



$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} X_3(s) &= \frac{b}{a}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-a\,s} + \frac{1}{s^2}e^{-2\,a\,s}\right] \\ &= \dfrac{b}{a\,s^2}\left[1 - 2e^{-a\,s} + e^{-2\,a\,s}\right] \end{cases}$$

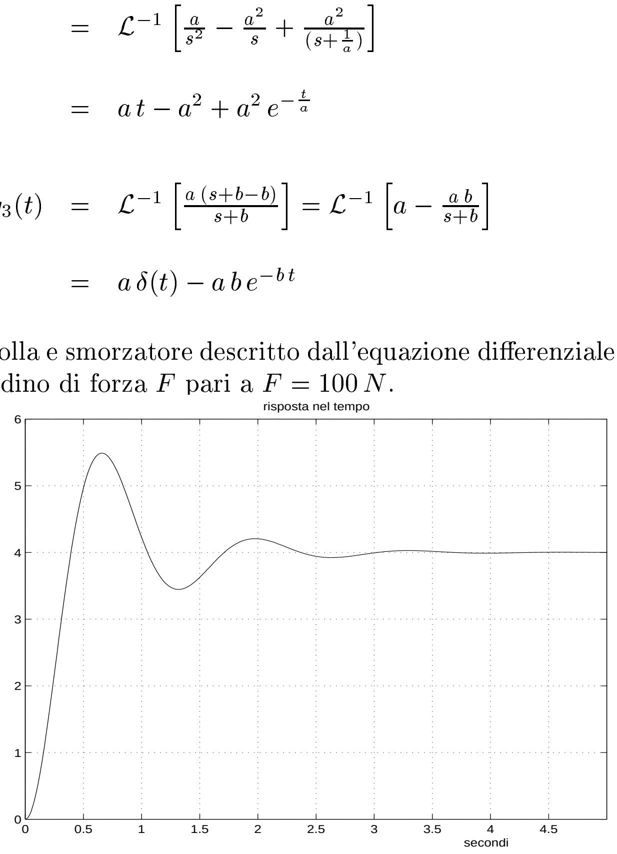
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{a\,s+b}{(s-a)^2+b^2}, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} g_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a\,(s-a+a)+b}{(s-a)^2+b^2}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a\,(s-a)}{(s-a)^2+b^2} + \frac{a^2+b}{b}\,\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right] \\ &= \left[a\,\cos(b\,t) + \frac{a^2+b}{b}\,\sin(b\,t)\right] e^{a\,t} \end{cases}$$

$$G_2(s) = \frac{a}{s^2(1+a\,s)}, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} g_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+\frac{1}{a})}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s} + \frac{a^2}{(s+\frac{1}{a})}\right] \\ &= a\,t - a^2 + a^2\, e^{-\frac{t}{a}} \end{cases}$$

$$G_3(s) = \frac{a\,s}{s+b} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} g_3(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a\,(s+b-b)}{s+b}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[a - \frac{a\,b}{s+b}\right] \\ &= a\,\delta(t) - a\,b\,e^{-b\,t} \end{cases}$$

c) In figura è mostrata la risposta $x(t)$ di un sistema massa, molla e smorzatore descritto dall'equazione differenziale $\ddot{x} + B\,\dot{x} + K\,x = F$, quando in ingresso viene posto un gradino di forza F pari a $F = 100\,N$.



c.1) Determinare la posizione dei poli dominanti del sistema:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\,\omega = -1.5\ + j\,4.76$$

c.2) ed il valore dei parametri B e K (rispettivamente coefficiente di attrito lineare e rigidità della molla);

$K = 25,$ $\qquad B = 3$

I parametri σ ed ω si ricavano facilmente leggendo il tempo di assestamento $T_a = 2\,\mathrm{s}$ e il periodo dell'oscillazione $T = 1.32$ s dalla risposta al gradino del sistema:

$$\sigma = -\frac{3}{T_a} = -\frac{3}{2} = -1.5, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.32} = 4.76$$

I poli $p_{1,2}$ sono le radici dell'equazione caratteristica $s^2 + B\,s + K = 0$:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\,\omega = -\frac{B}{2} \pm\, j\,\sqrt{\frac{B^2}{2} - 4K}$$

per cui è chiaro che:

$$B = -2\,\sigma = 3, \qquad K = \omega^2 + \frac{B^2}{4} = 25$$

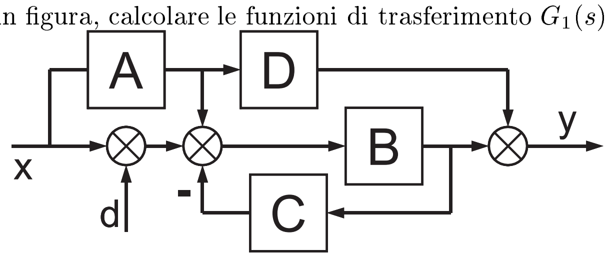
Peraltro, il valore di K poteva essere facilmente ricavato dalla relazione sul guadagno statico:

$$\frac{F}{K} = y_\infty \qquad \rightarrow \qquad K = \frac{F}{y_\infty} = \frac{100}{4} = 25$$

d) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{D(s)}$$



Le due relazioni si ricavano direttamente applicando la formula di Mason:

$$G_1(s) = \frac{B + AB + AD(1+BC)}{1+BC}, \qquad G_2(s) = \frac{B}{1+BC}$$

e) Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10b(s^2 + 0.4as + 4)}{s(s-5b)(1+\frac{s}{200})^2}$$

e.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$;
In Fig. 1 sono riportati i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ nel caso $a = 2$, $b = 6$. Le funzioni approssimanti della funzione $G(s)$ per $\omega = 0^+$e per $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

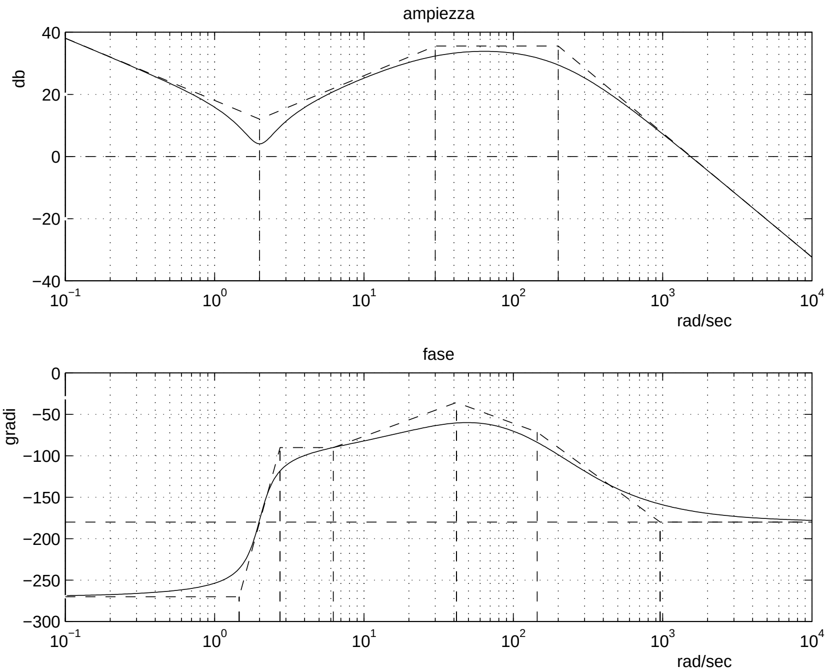


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ nel caso $a = 2$, $b = 6$.

$$G_0(s) = \frac{10b(4)}{s(-5b)(1)^2} = -\frac{8}{s} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} |\cdot| &= \infty \\ \varphi_0 &= -\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$G_\infty(s) = \frac{10b(s^2)}{s(s)(\frac{s}{200})^2} = \frac{400000\, b}{s^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} |\cdot| &= 0 \\ \varphi_0 &= -\pi \end{cases}$$

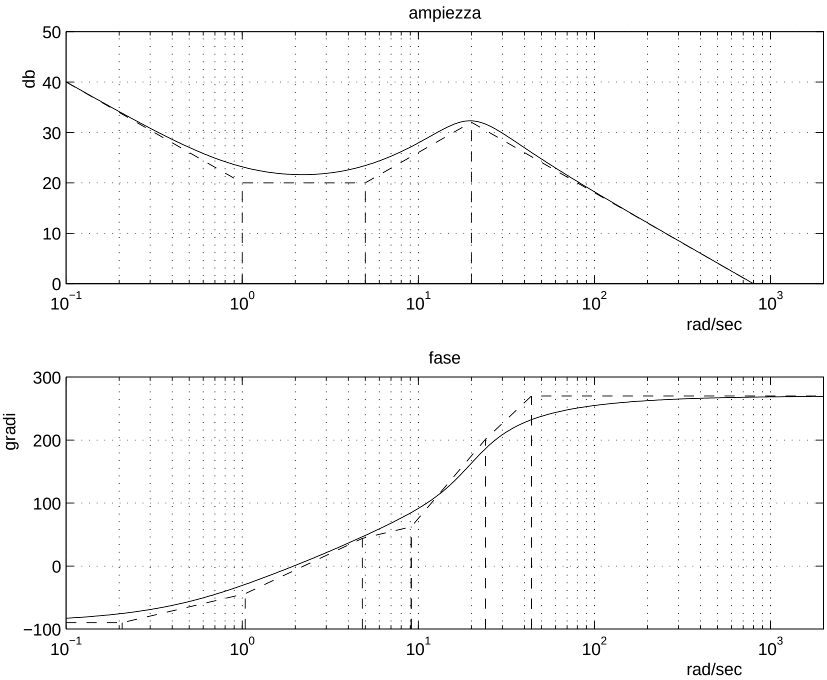
La pendenza iniziale del diagramma dei moduli è di -20 db/dec per la presenza del polo nell'origine. Il primo cambiamento di pendenza si ha alla pulsazione $\omega = 2$ quando agiscono i 2 zeri complessi coniugati. La posizione del punto a cui corrispondente il cambiamento di pendenza si determina nel modo seguente:

$$\beta = \left| \frac{s\, G(s)}{2} \right|_{s=0} = \left| \frac{10b(s^2 + 0.4as + 4)}{2(s - 5b)(1 + \frac{s}{200})^2} \right|_{s=0} = \left| \frac{10b(4)}{2(-5b)(1)^2} \right| = 4 = 12 \text{ db}$$

e.2) Leggere in modo approssimato dai diagrammi asintotici di Bode i valori del modulo e della fase della funzione $G(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$. Per esempio, nel caso $a = 2$ e $b = 6$ si ha:

$$|G(j\,100)| = 46 = 33.2 \text{ db} \qquad\qquad \arg[G(j\,100)] = -1.23 \text{ rad} = -70.3 \text{ gradi}$$

f) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



f.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = a\cos(5b\,t + \pi/3)$;

f.2) calcolare per quale valore di $\omega_0 = 1.97$ rad/s il sistema si comporta come un semplice guadagno $K_0 > 0$. Calcolare inoltre il valore di tale guadagno: $K_0 = 12.1 = 21.6$ db.

f.3) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$$G(s) = \frac{800(s+1)(s+5)}{s(s^2 - 20s + 400)}$$

La pendenza iniziale indica la presenza di un polo**o**nell'origine. In $\omega = 1$ e $\omega = 5$ sono presenti due zeri stabili. In $\omega = 20$ è presente una copia di poli complessi coniugati instabili.

f.1) Nel caso $a = 2$ e $b = 6$, utilizzando la funzione di risposta armonica si ha:

$$y_\infty(t) \simeq 2|G(j30)|\cos\{30\,t + \pi/3 + \arg[G(j30)]\} = 2 \cdot 31.2\cos(30\,t + \pi/3 - 152\,\pi/180)$$

Dall'analisi fatta al punto f.3) risulta evidente che il sistema $G(s)$ in esame non è stabile per cui la $y_\infty(t)$ calcolata è solo una risposta teorica che non esiste da un punto di vista pratico.

g) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ il cui diagramma di Nichols è mostrato in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

g.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:
$x(t) = b + 10\,\sin(2a\,t)$;

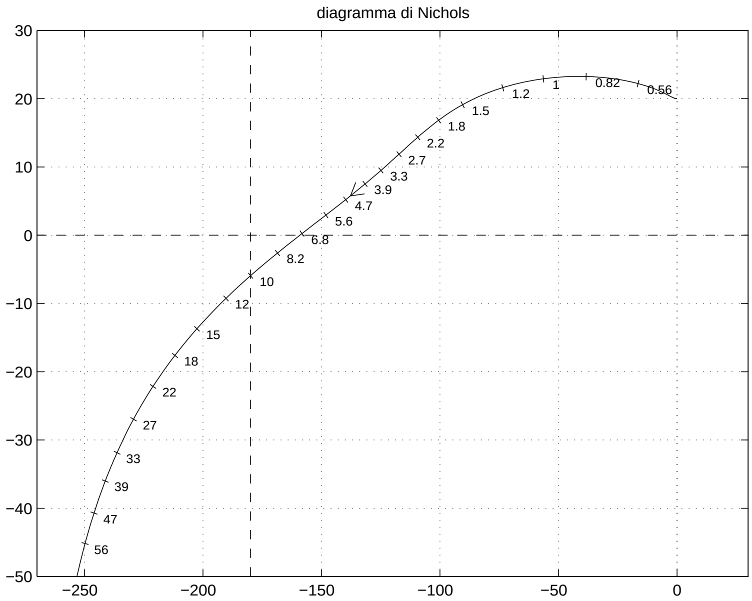
g.2) calcolare per quali valori di ω il sistema si comporta come un semplice guadagno K. Calcolare inoltre i corrispondenti valori di K.

$$\omega_1 = 0 \text{ rad/s}$$

$$K_1 = 10 = 20 \text{ db}$$

$$\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$$

$$K_2 = -0.51 \simeq -(-6 \text{ db})$$



g1) Nel caso $a = 2$ e $b = 6$ si ha:

$$y(t) = 6|G(j0)| + 10|G(j4)|\sin\{4\,t + \arg[G(j4)]\} = 6 \cdot 10 + 10 \cdot 2.29\sin\{4\,t - 133 \cdot \pi/180]\}$$

h) Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli mostrato in figura.

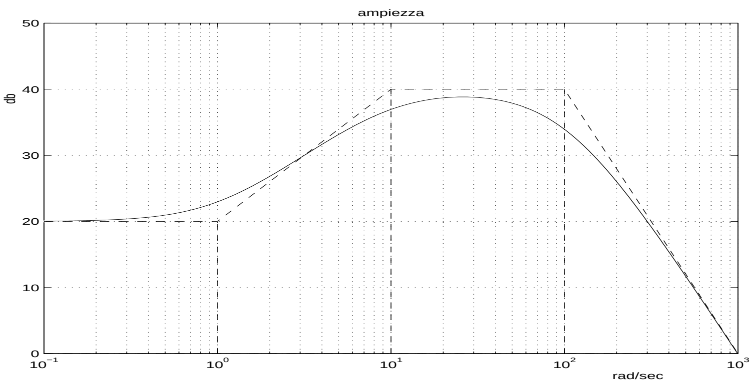
h.1) sapendo che il sistema è a fase minime, stimare "indicativamente" la fase del sistema in corrispondenza delle seguenti pulsazioni:

$$\omega_1 = 0.1 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 \simeq 0$$

$$\omega_2 = 1 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 \simeq \frac{\pi}{4}$$

$$\omega_3 = 35 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 \simeq 0$$

$$\omega_4 = 1000 \quad \rightarrow \quad \varphi_4 \simeq -\pi$$



Controlli Automatici - Primo Compito
12 Novembre 2003 - Domande
Compito Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande. Per ciascuno dei test a soluzione multipla, segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test contengono più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate.

1. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + a}{s^3 + 2\,s^2 + b\,s + 3} \qquad \rightarrow \qquad \dddot{y} + 2\ddot{y} + 5\dot{y} + 4\,y = \ddot{x} + 3\,x$$

2. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione della coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ corrispondente all'andamento temporale $g_1(t) = 3\,e^{-a\,t}\cos(b\,t + 0.2)$:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -a \pm j\,b$$

3. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un ritardo puro di durata "a" in cascata con un guadagno puro di ampiezza "b":

$$G(s) = b\,e^{-a\,s}$$

4. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

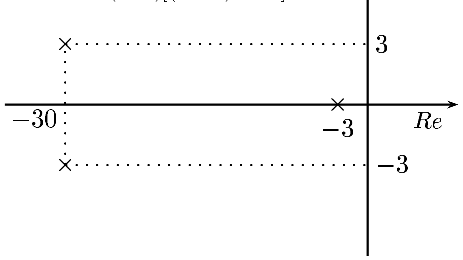
$$Y(s) = \frac{b\,s^2 + 1}{s(s+a)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = \infty$$

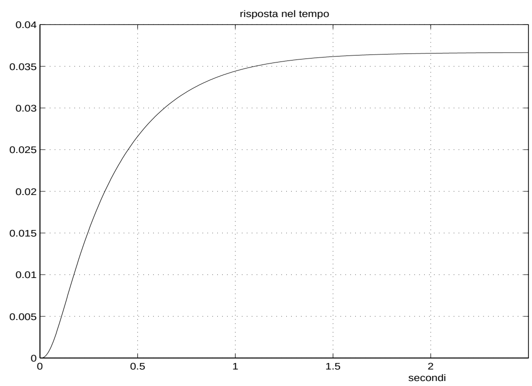
5. Calcolare il valore il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s - b}{s(s^2 + 5s + a)} \qquad \rightarrow \qquad y_\infty = -\frac{b}{a}$$

6. Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G_1(s)$. Calcolare il guadagno statico $K_0 = 0.0366$ e fornire una stima del tempo di assestamento
$T_a = 1$ s.

$$G_1(s) = \frac{100}{(s+3)[(s+30)^2+3^2]}$$





7. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{e^{-t_0 s}}{s+a} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} M(\omega) = & \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \\[2ex] \varphi(\omega) = & -t_0\omega - \arctan\dfrac{\omega}{a} \end{cases}$$

8. Calcolare l'evoluzione libera (cioè per $x = 0$) del sistema $\dot{y} + a\,y = x$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = b$.

$$\mathcal{L}[\dot{y} + a\,y = 0] \quad \rightarrow \quad s\,Y(s) - y(0) + a\,Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{y(0)}{s+a} \quad \rightarrow \quad y(t) = b\,e^{-a\,t}$$

9. Sia dato il seguente sistema $G(s)$:

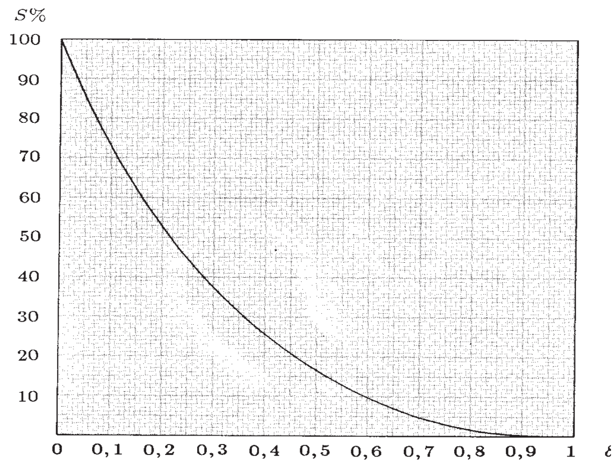
$$G(s) = \frac{(s+4.5)(s+476)}{(s+4773)(s+16)(s+99)\underline{(s^2+0.3s+250)}(s^2+83s+4780)}$$

Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a e la massima sovraelongazione $S\%$ del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

$$T_a = \frac{3}{0.15} = 20 \text{ s}$$

$$S\% \simeq 99\%$$

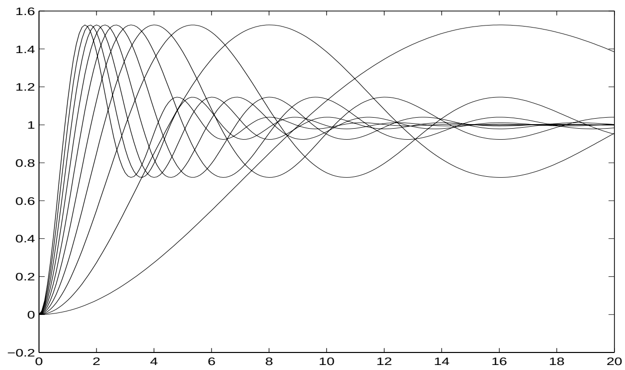
Eventualmente, se lo si ritiene utile, si utilizzi il grafico riportato a fianco.



10. Si considerino le risposte al gradino unitario riportate in figura.

Quali di questo parametri rimangono costanti per tutti i sistemi che hanno generato gli andamenti riportati in figura?

- ○ tempo di assestamento T_a;
- ⊗ massima sovraelongazione $S\%$;
- ⊗ coefficiente di smorzamento δ;
- ⊗ picco di risonanza M_R;
- ○ pulsazione naturale ω_n;



11. Il diagramma di bode dei moduli del sistema $G(s) = \frac{1-\tau s}{1+\tau s}$ è:

- ⊗ una retta orizzontale
- ○ una curva ascendente
- ○ una curva discendente

12. Il sistema dinamico $G(s) = \frac{2(s+1)}{s+2}$

- ⊗ ha un guadagno statico unitario
- ○ ha guadagno unitario alle elevate frequenze ($\omega \to \infty$)
- ⊗ ha una fase positiva per tutte le pulsazioni

13. La massima sovraelongazione in % del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$ in risposta ad un gradino unitario è

- ○ $S = 0\,\%$
- ○ $S = 10\,\%$
- ⊗ $S = 100\,\%$