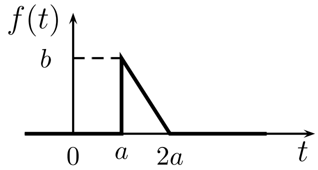
Controlli Automatici - Primo Compito
9 Novembre 2005 - Esercizi
Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [a\,t + \cos(b\,t)]\,e^{2\,t}, \qquad x_2(t) = a\,\delta(t) - b\,t^4 e^{-b\,t},$$



Soluzione:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{a}{(s-2)^2} + \frac{s-2}{(s-2)^2+b^2}, \\ X_2(s) &= a - \frac{b\,4!}{(s+b)^5}, \\ X_3(s) &= \frac{b}{s}\,e^{-as} - \frac{b}{a}\,\frac{1}{s^2}\,e^{-as} + \frac{b}{a}\,\frac{1}{s^2}e^{-2as} \end{aligned}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{3\,s+a}{(s+a)^2+b^2}, \qquad G_2(s) = \frac{b}{s(s+a)^2}, \qquad G_3(s) = \frac{2\,s^2+b^2}{s^2+a^2}$$

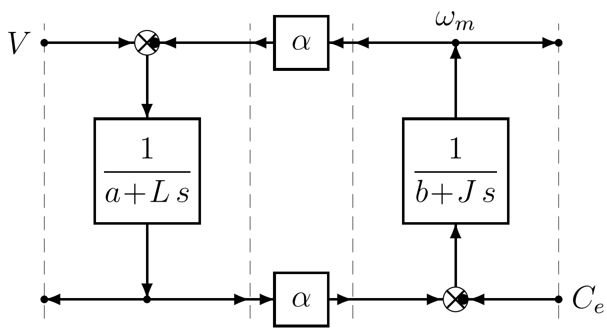
Soluzione:

$$G_1(s) = \frac{3\,s+a}{(s+a)^2+b^2} = \frac{3(s+a)}{(s+a)^2+b^2} - \frac{2\,a}{b}\,\frac{b}{(s+a)^2+b^2} \quad \rightarrow \quad g_1(t) = e^{-a\,t}\left[3\cos b\,t - \frac{2\,a}{b}\sin b\,t\right]$$

$$G_2(s) = \frac{b}{s(s+a)^2} = \frac{b}{a^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} - \frac{a}{(s+a)^2}\right] \quad \rightarrow \quad g_2(t) = \frac{b}{a^2}\left[1 - e^{-a\,t} - a\,t\,e^{-a\,t}\right]$$

$$G_3(s) = \frac{2\,s^2+b^2}{s^2+a^2} = 2 + \frac{b^2-2\,a^2}{a}\,\frac{a}{s^2+a^2} \quad \rightarrow \quad g_3(t) = 2\,\delta(t) + \frac{b^2-2\,a^2}{a}\,\sin a\,t$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta la dinamica di un motore in corrente continua (V è la tensione in ingresso, C_e è la coppia resistente, ω_m è la velocità angolare del motore, α è la costante di coppia, L ed a sono l'induttanza e la resistenza del circuito di armatura, b e J sono il coefficiente di attrito e il momento di inerzia del motore).



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s) = \frac{\omega_m(s)}{V(s)}$ e $G_2(s) = \frac{\omega_m(s)}{C_e(s)}$ che legano gli ingressi $V(s)$ e $C_e(s)$ all'uscita $\omega_m(s)$:

$$G_1(s) = \frac{\omega_m(s)}{V(s)} = \frac{\alpha}{(a+L\,s)(b+J\,s)+\alpha^2}, \qquad G_2(s) = \frac{\omega_m(s)}{C_e(s)} = -\frac{(a+L\,s)}{(a+L\,s)(b+J\,s)+\alpha^2}$$

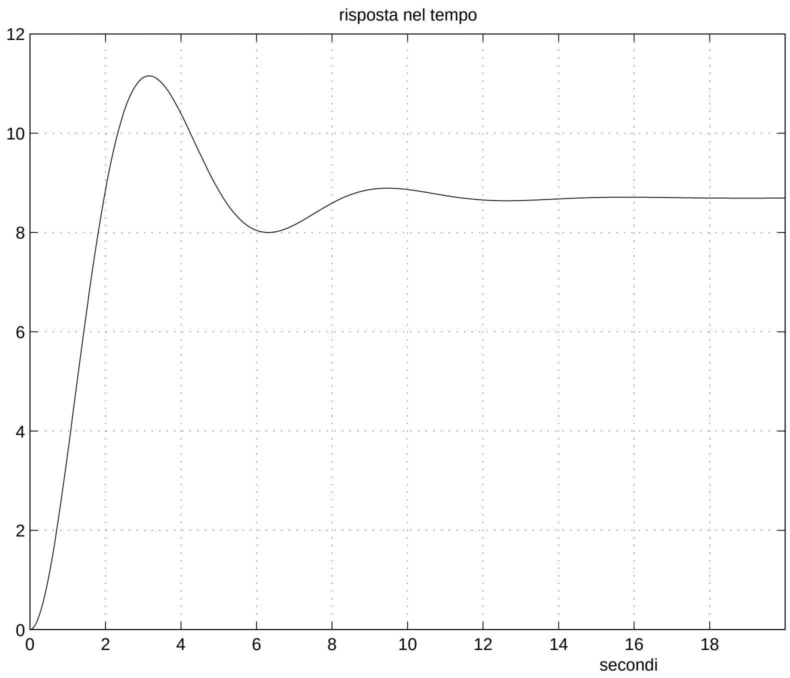


Figura 1: Risposta della funzione $G_1(s)$ ad un gradino di ampiezza 100 quanto $a = 3$ e $b = 5$.

c.2) Posto $L = 10$, $J = 10$, $\alpha = 10$ ed utilizzando l'approssimazione dei sistemi a poli dominanti, calcolare l'andamento qualitativo della risposta della funzione di trasferimento $G_1(s)$ ad un gradino di tensione $V(t) = 100$ in ingresso. Riportare tale andamento sui fogli a quadretti che vi sono stati forniti. Inoltre, calcolare il tempo di assestamento T_a, la massima sovraelongazione $S\%$ e il periodo T dell'eventuale oscillazione smorzata (se è presente):
Soluzione. La funzione di trasferimento ha la forma seguente:

$$G_1(s) = \frac{10}{(b + 10\,s)(a + 10\,s) + 100} = \frac{10}{100\,s^2 + 10(a+b)s + a\,b + 100}$$

I poli sono sempre complessi coniugati, infatti il discriminante Δ del polinomio a denominatore è sempre negativo per $a,\ b \in [1,\ 12]$:

$$\Delta = 100(a+b)^2 - 400(a\,b + 100) = 100[(a-b)^2 - 400] < 0$$

La posizione dei poli della funzione $G_1(s)$ è la seguente:

$$p_{1,2} = -\frac{a+b}{20} \pm j\,\frac{\sqrt{400 - (a-b)^2}}{20} = -\frac{a+b}{20} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{20}\right)^2} = -\sigma \pm j\,\omega$$

I parametri richiesti sono:

$$T_a = \frac{3}{\sigma} = \frac{60}{a+b}, \qquad S\% = 100\,e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}, \qquad \delta = \cos[\arctan(\frac{\omega}{\sigma})], \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{40\pi}{\sqrt{400 - (a-b)^2}}$$

L'andamento qualitativo della risposta della funzione di trasferimento $G_1(s)$ ad un gradino di tensione $V(t) = 100$ in ingresso è mostrato in Fig. 1.

c.3) Sempre per $L = 10$, $J = 10$ e $\alpha = 10$, disegnare l'andamento qualitativo dei diagrammi asintotici di Bode (di ampiezza e fase) della funzione di trasferimento $G_1(s)$. Riportare tali grafici sui fogli a quadretti che vi sono stati forniti. Utilizzando tali grafici, oppure utilizzando direttamente la funzione $G_1(s)$, calcolare la risposta a regime $\omega_\infty(t)$ del sistema alla seguente sollecitazione sinusoidale in ingresso: $V(t) = 100 + a\,\cos(b\,t)$.
Soluzione. L'andamento qualitativo dei diagrammi asintotici di Bode (di ampiezza e fase) della funzione di trasferimento $G_1(s)$ è mostrato in Fig. 2. Per $a,\ b \in [0,\ 10]$, la pulsazione naturale ω_n del sistema è limitata tra 2 valori ben precisi:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a\,b + 100}{100}} \qquad\qquad 1 < \omega_n < \sqrt{10}$$

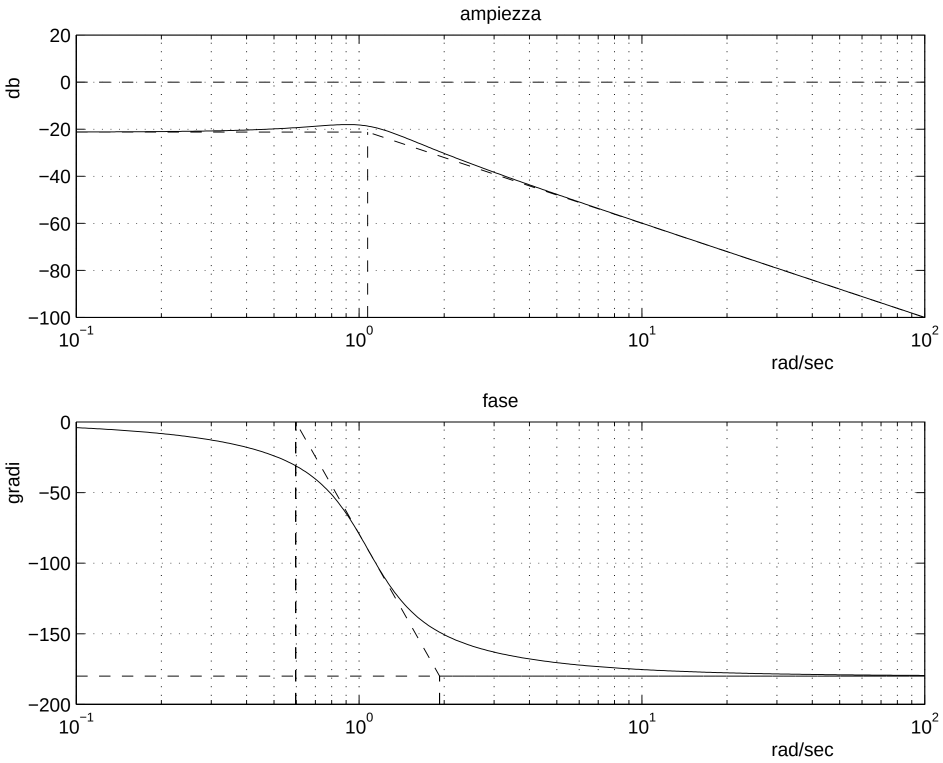


Figura 2: Diagrammi asintotici di Bode della funzione quanto $a = 3$ e $b = 5$.

La risposta a regime $\omega_\infty(t)$ del sistema seguente sollecitazione sinusoidale in ingresso $V(t) = 100 + a\,\cos(b\,t)$ è la seguente:

$$\omega_\infty(t) = 100\, G_1(0) + a\,|G(j\,b)|\cos[b\,t + \mathrm{Arg}G(j\,b)]$$

d) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{s\,(s+400)}{(1+a\,s)(s^2 - 0.3\,b\,s + 9)}$$

Nota. La presenza di uno zero nell'origine (anzichè di un polo) non modifica le regole di tracciamento dei diagrammi asintotici: la pendenza iniziale è +1 (anzichè -1) e la formula per il calcolo di β alla pulsazione di primo cambio pendenza è sempre valida (basta porre $h = -1$).

<u>Soluzione</u>. Le pulsazioni critiche del sistema sono: $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{a}$, $\omega_n = 3$ e $\omega = 400$. Le funzioni approssimanti della $G(s)$ per $s \to 0^+$ e per $s \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = G(s)|_{s\to 0^+} = \frac{400\,s}{9} \qquad \to \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} |\cdot| &=& \infty \\ \varphi_0 &=& \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$G_\infty(s) = G(s)|_{s\to\infty} = \frac{1}{a\,s} \qquad \to \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} |\cdot| &=& 0 \\ \varphi_\infty &=& -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$ sono mostrati in Fig. 3

Il guadagno β del diagramma asintotico di Bode delle ampiezze della funzione $G(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = \frac{1}{a}$ è il seguente:

$$\beta = \frac{\frac{1}{a}\cdot 400}{9} = \frac{400}{9\cdot a}$$

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

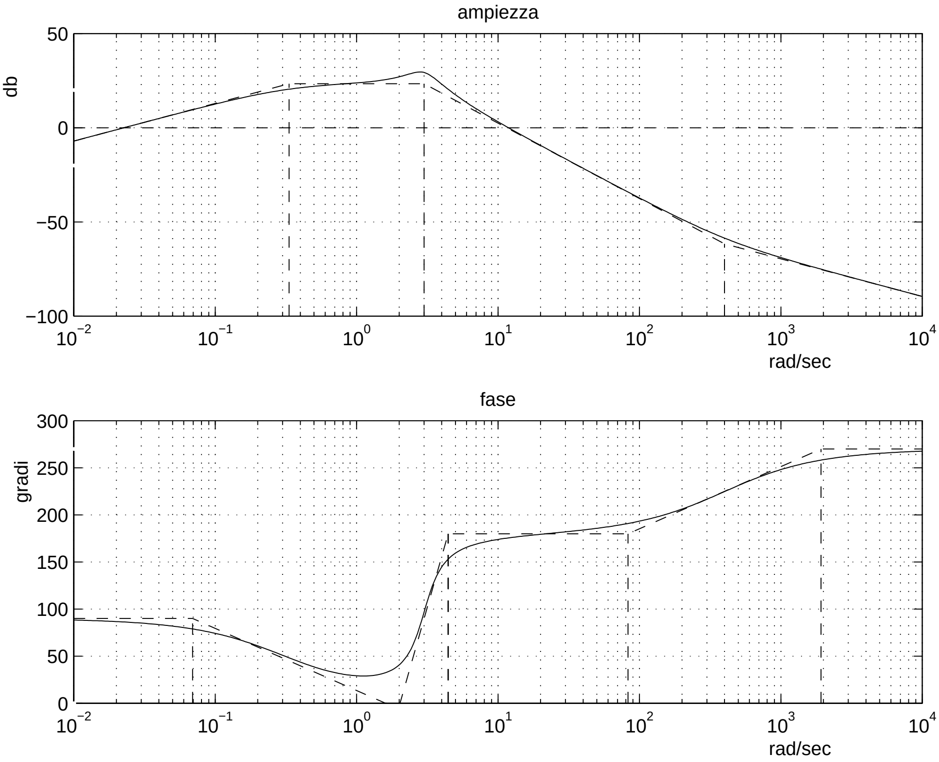
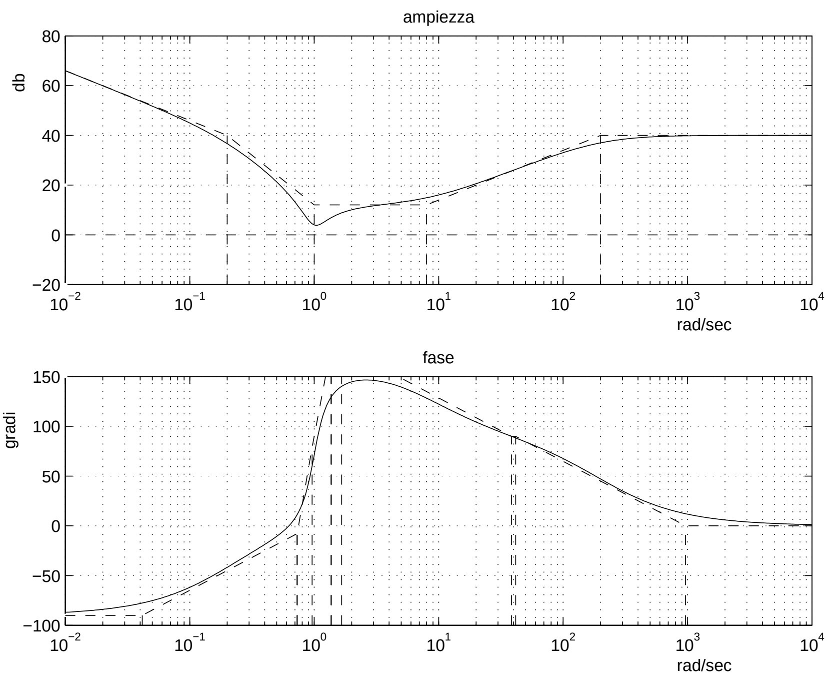


Figura 3: I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$

e.1) calcolare la risposta “a regime” $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 2\,a\,\sin(0.1\,b\,t + \pi/6)$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



$$G(s) = \frac{100(s^2 + 0.4\,s + 1)(s - 8)}{s(s - 0.2)(s + 200)}$$

$$= \frac{20(1 + 0.4\,s + s^2)(1 - \frac{s}{8})}{s(1 - \frac{s}{0.2})(1 + \frac{s}{200})}$$

La risposta “a regime” $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 2\,a\,\sin(0.1\,b\,t + \pi/6)$ è la seguente:

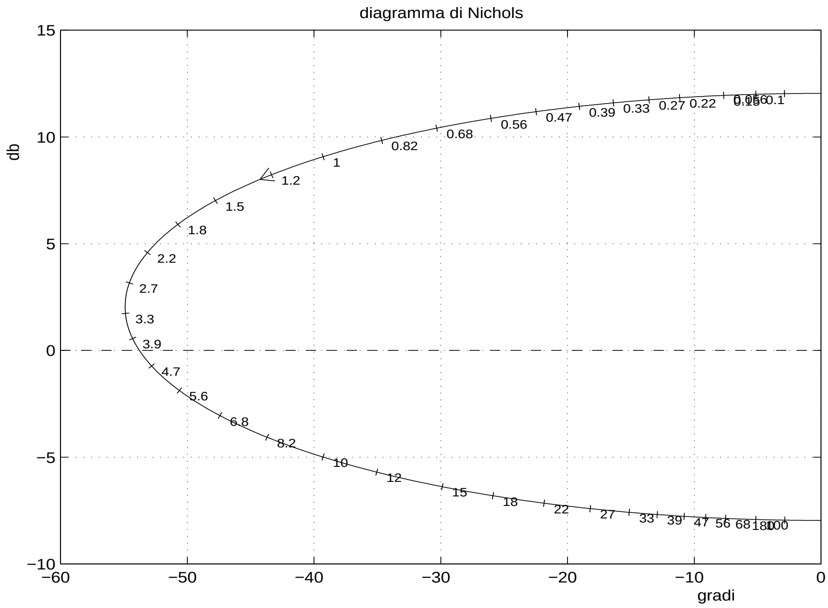
$$y_\infty(t) = 2\,|G(j\,0.1\,a)|\,a\,\sin[0.1\,b\,t + \pi/6 + \mathrm{Arg}G(j\,0.1\,a)]$$

f) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ il cui diagramma di Nichols è mostrato in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

f.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:
$x(t) = a + 2\,\cos(0.5\,b\,t)$;

f.2) calcolare per quale valore di ω si ha il massimo sfasamento tra un segnale sinusoidale in ingresso e il corrispondente segnale sinusoidale in uscita:

$$\omega = 3.3 \text{ rad/s}$$



La risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale $x(t) = a + 2\,\cos(0.5\,b\,t)$ è la seguente:

$$y_\infty(t) = 4\,a + 2\,|G(j\,0.5\,b)|\,\cos[0.5\,b\,t + \text{Arg}G(j\,0.5\,b)]$$

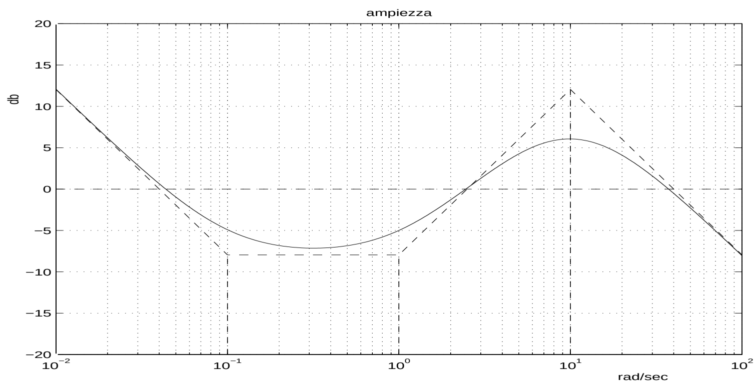
g) Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli mostrato in figura. Sapendo che il sistema è a fase minima, stimare "indicativamente" la fase del sistema in corrispondenza delle seguenti pulsazioni:

$$\omega_1 = 0.01 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 \simeq -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega_2 = 0.1 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 \simeq -\frac{\pi}{4}$$

$$\omega_3 = 10 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 \simeq 0$$

$$\omega_4 = 100 \quad \rightarrow \quad \varphi_4 \simeq -\frac{\pi}{2}$$



Controlli Automatici - Primo Compito
9 Novembre 2005 - Domande
Compito Nr. $\boxed{a = 3}$ $\boxed{b = 5}$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad "a" e "b" i valori assegnati e si risponda alle domande. Per ciascuno dei test a soluzione multipla, segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test contengono più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate.

1. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3\,s^2 + b}{s(s^2 + 2\,s + a)} \qquad \rightarrow \qquad \dddot{y}(t) + 2\,\ddot{y}(t) + a\,\dot{y}(t) = 3\,\ddot{x}(t) + b\,x(t)$$

2. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è l'andamento temporale $g_1(t)$ corrispondente ad una coppia di poli complessi coniugati posizionati in $p_{1,2} =$ "b" $\pm j$ "a" con grado di molteplicità $r = 2$ (indicare in modo simbolico i parametri non noti):

$$g_1(t) = M\,t\,e^{b\,t}\cos(a\,t + \varphi)$$

3. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema del secondo ordine caratterizzato da una pulsazione naturale ω_n pari ad "b", un coefficiente di smorzamento $\delta = 0.4$ e un guadagno statico pari a "a":

$$G(s) = \frac{b}{1 + \frac{0.8}{a}s + \frac{s^2}{a^2}} = \frac{b\,a^2}{a^2 + 0.8\,a\,s + s^2}$$

4. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{b\,s + 3}{(s + b)(s - a) + 2} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = b$$

5. Calcolare il valore il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

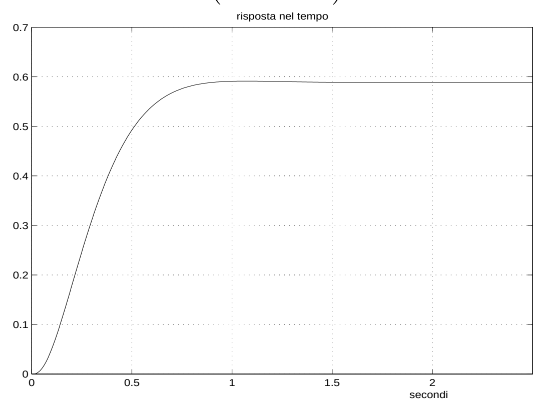
$$Y(s) = \frac{s - a}{(b\,s + 3)\,s} \qquad \rightarrow \qquad y_\infty = -\frac{a}{3}$$

6. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G_1(s)$. Calcolare il guadagno statico il tempo di assestamento T_a, il periodo T dell'oscillazione smorzata (se esiste) e la massima sovraelongazione $S\% = 100\,e^{-\delta\pi/\sqrt{1-\delta^2}}$ (se esiste):

$$G_1(s) = \frac{100}{[(s + b)^2 + a^2](0.1\,s + b)}$$

$$K_0 = \frac{100}{(a^2 + b^2)b}, \qquad T_a = \frac{3}{b}$$

$$T = \frac{2\pi}{a}, \qquad \delta = \cos(\arctan\frac{a}{b})$$



7. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{e^{-b\,s}}{s(a - s)} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} M(\omega) = & \frac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = & -b\,\omega - \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\omega}{a} \end{cases}$$

8. Calcolare la trasformata $Y(s)$ del segnale di uscita corrispondente all'equazione differenziale $3\,\dot{y}(t) + 4\,b\,y(t) = 2\,x(t)$, in presenza di un ingresso nullo $x(t) = 0$ e con condizione iniziale $y(0) = a$ (fare i calcoli mantenendo i parametri in forma simbolica).

$$Y(s) = \frac{3\,a}{3\,s + 4\,b}, \qquad\qquad y(t) = a\,e^{-\frac{4\,b}{3}t}$$

9. Il picco di risonanza M_R di un sistema del 2^o ordine è:

   ◯ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$
   ◯ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$
   ◯ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$
   ⊗ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$

10. Un sistema che realizza un ritardo puro

   ⊗ è un sistema lineare tempo invariante
   ◯ è un sistema lineare tempo variante
   ◯ è un sistema non lineare tempo invariante

11. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza $M_R > 1$

   ⊗ se e solo se $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$
   ◯ se e solo se $0 < \delta < 0.5$
   ◯ se e solo se $0.5 < \delta < 1/\sqrt{2}$
   ◯ se e solo se $0 < \delta < 1$

12. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema lineare tempo invariante può essere determinata sperimentalmente per punti

   ◯ solo se il sistema è a fase minima
   ◯ solo se il sistema è stabile
   ⊗ solo se il sistema è asintoticamente stabile
   ◯ anche se il sistema è instabile

13. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, il coefficiente di smorzamento δ rimane costante al variare della posizione dei poli su

   ⊗ una retta uscente dall'origine
   ◯ una retta parallela all'asse immaginario
   ◯ una circonferenza con centro nell'origine

14. La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema asintoticamente stabile e a fase minima è completamente determinata

   ⊗ dal diagramma di Bode delle ampiezze
   ⊗ dalla risposta impulsiva $g(t)$ del sistema
   ⊗ dalla risposta $h(t)$ del sistema al gradino unitario

15. Per $\omega = 1/\tau$, il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{1-j\tau\omega}$

   ◯ vale $1/2$
   ⊗ vale $1/\sqrt{2}$
   ⊗ vale $\simeq -3$ db.
   ◯ ha guadagno unitario