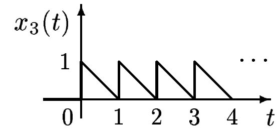
a) Calcolare le trasformate di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

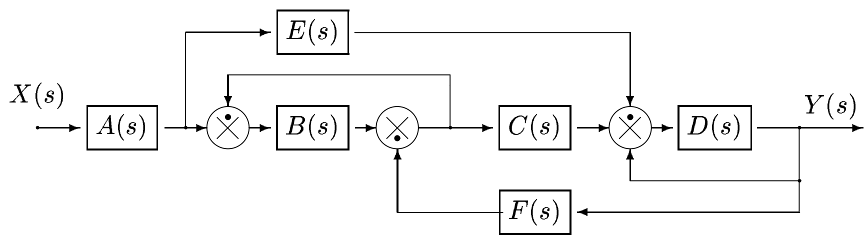
$$x_1(t) = 7\,e^{-6t}\sin(5\,t), \qquad x_2(t) = 2\,t^4\,e^{-9t},$$



b) Antitrasformare le seguenti funzioni di trasferimento

$$X_1(s) = \frac{2}{(s+3)^4}, \qquad X_2(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}, \qquad X_3(s) = \frac{7\,s}{(s+3)}$$

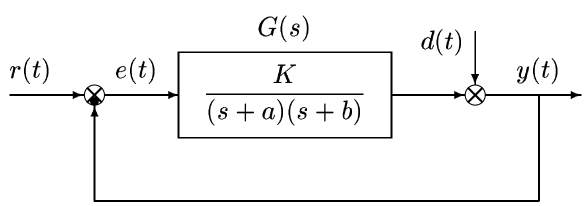
c) Relativamente al seguente schema a blocchi, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra l'ingresso $X(s)$ e l'uscita $Y(s)$:



d) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{4.5(s+0.1)(s+100)}{s(5s^2+3\,s+45)}$$

e) Sia dato il seguente sistema in retroazione:



e.1) Calcolare la trasformata di Laplace $Y(s)$ dell'uscita in funzione delle trasformate di Laplace $R(s)$ e $D(s)$ del riferimento e del disturbo. Trasformare il legame trovato nella corrispondente equazione differenziale che lega fra di loro le funzioni $y(t)$, $r(t)$ e $d(t)$.

e.2) Posto $a = 1$, $b = 3$, $K = 1$ e $d(t) = 0$, calcolare la risposta $y(t)$ del sistema al gradino unitario in ingresso: $r(t) = u(t)$.

e.3) Posto $a = 2$, $b = 2$, $K = 8$ e $r(t) = 0$, calcolare il valore a regime della variabile $e(t)$ in presenza del disturbo $d(t) = 4 + 2\sin(2t)$.

Nota: il sistema retroazionato è stabile.

a) Si ottengono le seguenti trasformate di Laplace

$$X_1(s) = \frac{35}{(s+6)^2+25}, \qquad X_2(s) = \frac{48}{(s+9)^5}, \qquad X_3(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s^2}\right)\frac{1}{1-e^{-s}}$$

b) Antitrasformando le funzioni $X(s)$ si ottiene:

$$x_1(t) = \frac{1}{3}t^3e^{-3t}, \quad x_2(t) = \frac{1}{5}\left[\frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+9}\right] = \frac{1}{5}\left[\cos(2t) - \cos(3t)\right], \quad X_3(s) = 7\left(\delta(t) - 3e^{-3t}\right)$$

c) La funzione di trasferimento $G(s)$ che descrive il sistema tra l'ingresso $x(t)$ e l'uscita $y(t)$ è la seguente

$$G(s) = \frac{A\,B\,C\,D - A\,E\,D\,[1+B]}{1+B+C\,D\,F - D - B\,D},$$

d) I diagrammi asintotici di Bode della funzione

$$G(s) = \frac{4.5(s+0.1)(s+100)}{s(5s^2+3\,s+45)}$$

sono mostrati in Fig. 1. Per i due poli complessi coniugati la pulsazione naturale è di ω_n=3 rad/sec, ed il coefficiente di smorzamento $\delta = \frac{1}{10}$.

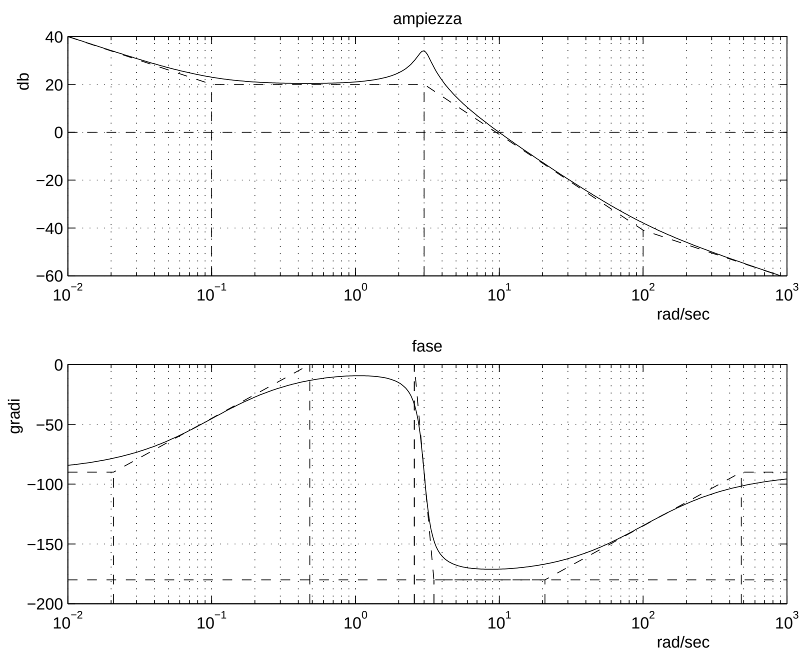


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G(s)$

e.1) La trasformata $Y(s)$ dell'uscita vale:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)}R(s) + \frac{1}{1+G(s)}D(s) \\ &= \frac{K\,R(s) + [s^2+(a+b)s+ab]D(s)}{s^2+(a+b)s+a\,b+K} \end{aligned}$$

La corrispondente equazione differenziale vale:

$$\ddot{y}(t) + (a+b)\dot{y}(t) + (a\,b+K)y(t) = K\,r(t) + \ddot{d}(t) + (a+b)\dot{d}(t) + a\,b\,d(t)$$

e.2) La trasformata $Y(s)$ dell'uscita quando $a=1$, $b=3$, $K=1$ e $d(t)=0$ ed in presenza di un gradino unitario in ingresso $r(t)=u(t)$ è:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}\frac{1}{s} = \frac{1}{s(s^2+4s+4)} = \frac{1}{s(s+2)^2}$$

Antitrasformando la funzione:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)^2} = \frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s+2)} - \frac{1}{2(s+2)^2}$$

si ottiene la corrispondente funzione $y(t)$, $t > 0$:

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\, e^{-2t} - \frac{1}{2}\, t\, e^{-2t}$$

e.3) In ambito trasformato, il legame che lega l'ingresso $d(t)$ all'uscita $e(t)$ è

$$E(s) = -\frac{1}{1+G(s)} D(s) = -\frac{1}{1+\frac{K}{(s+a)(s+b)}} D(s)$$

Posto $a = 2$, $b = 2$ e $K = 8$ si ottiene

$$E(s) = \underbrace{-\frac{1}{1+\frac{8}{(s+2)^2}}}_{G_d(s)} D(s)$$

Il valore a regime della variabile $e(t)$ in presenza del disturbo $d(t) = 4 + 2\sin(2t)$ si determina facilmente utilizzando la sovrapposizione degli effetti e il concetto di funzione di risposta armonica:

$$e_\infty(t) = G_d(0)4 + 2|G_d(j2)|\sin(2t+\varphi), \qquad \varphi = Arg[G_d(j2)]$$

Essendo

$$G_d(j2) = -\frac{1}{1+\frac{8}{(2+j2)^2}} = -\frac{1}{1+\frac{2}{(1+j)^2}} = -\frac{1}{1-j} = -\frac{1}{2}\,(1+j)$$

si ha che

$$G_d(0) = -\frac{1}{3}, \qquad |G_d(j2)| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad Arg[G_d(j2)] = \frac{5}{4}\pi$$

per cui si ottiene

$$e_\infty(t) = -\frac{4}{3} + \sqrt{2}\sin(2t + \frac{5}{4}\pi) = -\frac{4}{3} - \sqrt{2}\sin(2t + \frac{\pi}{4})$$

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. In scala logaritmico-naturale ln (sia per moduli che per le pulsazioni), la pendenza γ del diagramma di Bode delle fasi della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{1-j15\omega}$ nel punto $\omega = \frac{1}{15}$ è

   ○ $\gamma = +4.81$;

   ○ $\gamma = -4.81$;

   ⊗ $\gamma = +1/2$;

   ○ $\gamma = -1/2$;

   ○ $\gamma = -20\,\mathrm{db/dec}$

2. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli

   ○ su di una retta uscente dall'origine

   ⊗ su di una retta parallela all'asse immaginario

   ○ su di una circonferenza con centro nell'origine

3. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\, e^{-t/\tau} + x$ (dove x e y sono i segnali di ingresso e di uscita) è

   ⊗ non trasformabile secondo Laplace

   ○ trasformabile secondo Laplace

   ○ stazionario

4. Per $\omega > 0$, il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1+j\tau\omega}{1-j\tau\omega}$ coincide con il diagramma "asintotico"

   ○ in nessun punto al finito

   ○ in un solo punto al finito $\omega = 1/\tau$

   ⊗ per tutti i valori di ω

5. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2s+3}{s^2+4}$ vale

   ○ $g(0^+) = 0$

   ○ $g(0^+) = 1$

   ⊗ $g(0^+) = 2$

   ○ $g(0^+) = 3$

6. Per $\delta < -1$, i poli del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$

   ⊗ sono reali distinti;

   ○ sono reali complessi coniugati;

   ○ sono entrambi stabili;

   ⊗ sono entrambi instabili;

7. Per $s = j\omega$, la fase φ del sistema $G(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$ è

   - ◯ $\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\frac{2}{\omega}$
   - ◯ $\varphi = -\frac{\pi}{2} - 2\arctan\frac{2}{\omega}$
   - ⊗ $\varphi = -\frac{\pi}{2} - 2\arctan\frac{\omega}{2}$

8. Se in un sistema del 2^o ordine varia la distanza dei poli dall'origine (a parità di direzione), allora variano i seguenti parametri del sistema:

   - ⊗ tempo di assestamento T_a
   - ◯ coefficiente di smorzamento δ
   - ⊗ larghezza di banda ω_f
   - ◯ picco di risonanza M_R

9. Si consideri la risposta di un sistema lineare di tipo 0 ad un ingresso a gradino. Il tempo si salita T_s è il tempo occorrente per

   - ◯ raggiungere il 50% del valore finale
   - ◯ raggiungere il 63.2% del valore finale
   - ⊗ passare dal 10 al 90% del valore finale
   - ◯ raggiungere il punto di massima sovraelongazione

10. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$, il valore finale $(t \to \infty)$ della risposta impulsiva $g(t)$ vale:

   - ◯ $h(\infty) = 0$
   - ◯ $h(\infty) = 1$
   - ⊗ $h(\infty) = \frac{1}{6}$
   - ◯ $h(\infty) = \infty$

11. La massima sovraelongazione % del sistema $G(s) = \frac{1}{1+2s+s^2}$ in risposta ad un ingresso a gradino è

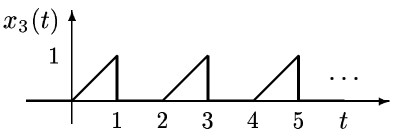
   - ⊗ $S = 0\,\%$
   - ◯ $S = 1\,\%$
   - ◯ $S = 10\,\%$
   - ◯ $S = 100\,\%$

12. La funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ di un sistema lineare a fase minima è completamente nota

   - ⊗ se è nota l'equazione differenziale del sistema
   - ⊗ se è noto il diagramma di Bode delle ampiezze
   - ◯ se è nota la posizione di tutti i poli del sistema

a) Calcolare le trasformate di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

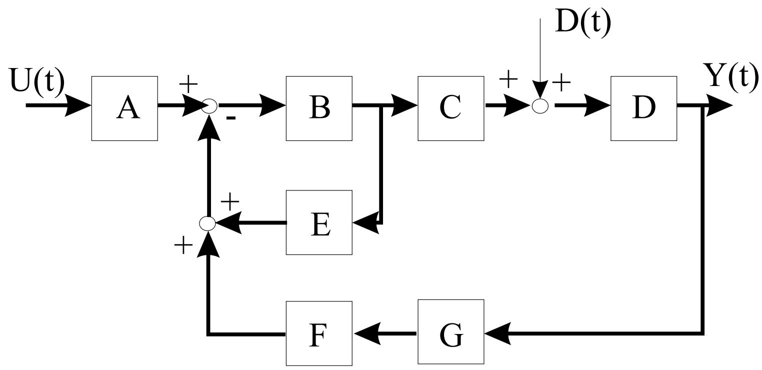
$$x_1(t) = 6e^{-3t}\cos 2t, \qquad x_2(t) = 20t^3\, e^{-3t},$$



b) Antitrasformare le seguenti funzioni di trasferimento:

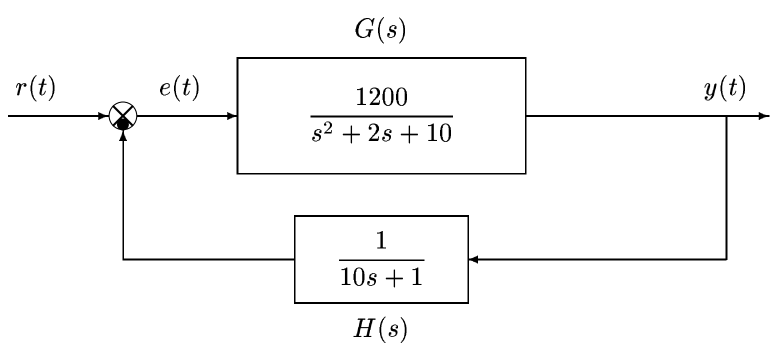
$$X_1(s) = \frac{21}{(s+1)^2}, \qquad X_2(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}, \qquad X_3(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+10}$$

c) Sia dato il seguente schema a blocchi:



Calcolare (a) lo schema ridotto fra U e Y, (b) lo schema ridotto tra D e Y.

d) Sia dato il seguente sistema in retroazione:



1) Tracciare i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $G(s)H(s)$. E' sufficiente tracciare le approssimazioni asintotiche a spezzata.

2) (facoltativo) Calcolare il valore a regime (per $t \to \infty$) della variabile $e(t)$ quando in ingresso è presente un gradino unitario $r(t) = 1$.

a) Si ottengono le seguenti trasformate di Laplace:

$$X_1(s) = 6\frac{s+3}{(s+3)^2+4}, \qquad X_2(s) = \frac{120}{(s+3)^4}, \qquad X_3(s) = \frac{1-e^{-s}(1+s)}{s^2}\frac{1}{1+e^{-2s}}$$

b) Antitrasformando le funzioni $X(s)$ si ottiene, per $t > 0$:

$$x_1(t) = 21\,t\,e^{-t}, \qquad x_2(t) = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2t}(1+2t)\right), \qquad x_3(t) = \frac{5}{3}\,e^{-t}\cos(3t + \arctan\frac{4}{3})$$

c) Le funzioni ingresso-uscita che descrivono lo schema a blocchi si ottengono applicando la regola di Mason:

$$\frac{Y(t)}{U(t)} = \frac{ABCD}{1+BE+BCDGF}, \qquad \frac{Y(t)}{D(t)} = \frac{D(1+BE)}{1+BE+BCDGF},$$

d.1) Il guadagno di anello è:

$$G(s)H(s) = \frac{120}{(\frac{s^2}{10}+\frac{1}{5}s+1)(1+10s)}$$

Al denominatore sono presenti due poli complessi coniugati caratterizzati da una pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{10}$ rad/sec e da un coefficiente di smorzamento $\delta = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

I diagrammi asintotici di Bode sono mostrati in Fig. 2.

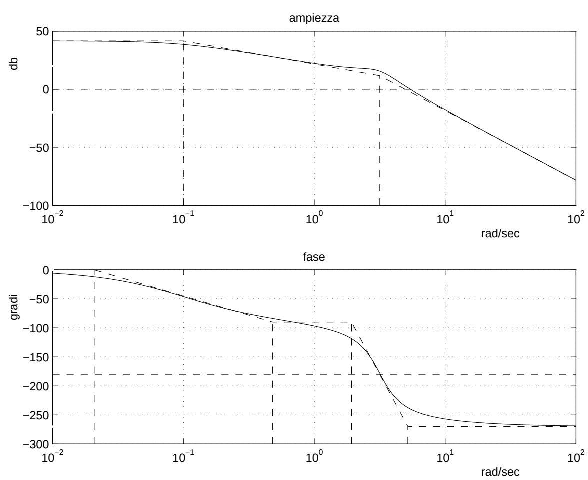


Figura 2: Diagrammi asintotici di Bode del guadagno di anello $G(s)H(s)$

d.2) La funzione di trasferimento che lega l'ingresso di riferimento $r(t)$ all'errore $e(t)$ è:

$$G(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

La trasformata $E(s)$ del segnale errore è:

$$E(s) = G(s)R(s) = \frac{(s^2+2s+10)(10s+1)}{(10s+1)(s^2+2s+10)+1200}\,\frac{1}{s}$$

Applicando il teorema del valore finale si ottiene il valore dell'errore a regime:

$$e_r = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\frac{(s^2+2s+10)(10s+1)}{(10s+1)(s^2+2s+10)+1200} = \frac{1}{121}$$

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. L'equazione differenziale $\ddot{y} = -t^2 y + x$ (dove x e y sono i segnali di ingresso e di uscita) è

   ◯ stazionaria

   ⊗ è lineare

2. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   ◯ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni con parametri che variano nel tempo

   ⊗ permette di calcolare la risposta forzata del sistema

   ⊗ permette di calcolare la risposta libera del sistema

3. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli

   ◯ su di una retta uscente dall'origine

   ⊗ su di una retta parallela all'asse immaginario

   ◯ su di una circonferenza con centro nell'origine

4. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace

   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to \infty$

   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$

   ◯ del segnale $x(t) = t^2 e^{-3t}$

5. La funzione di risposta armonica di un sistema lineare $G(s)$ può essere determinata "sperimentalmente"

   ◯ se il sistema $G(s)$ è semplicemente stabile

   ⊗ se il sistema $G(s)$ è asintoticamente stabile

   ◯ anche se il sistema è instabile

6. Si ponga la funzione $\sin 2t$ in ingresso al sistema $G(s) = \frac{2}{s+2}$. A regime, l'ampiezza A e la fase φ della sinusoide $A \sin(2t + \varphi)$ in uscita valgono

   ◯ $A = 1/2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

   ◯ $A = 1/2$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

   ◯ $A = 1/\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

   ⊗ $A = 1/\sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

7. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2s+3}{s^2+4}$ vale

   ◯ $g(0^+) = 0$

   ◯ $g(0^+) = 1$

   ⊗ $g(0^+) = 2$

   ◯ $g(0^+) = 3$

8. La massima sovraelongazione in % del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è

   ◯ $S = 0\,\%$

   ◯ $S = 1\,\%$

   ⊗ $S = 100\,\%$

9. In scala logaritmica naturale (sia per il modulo che per la pulsazione), la pendenza γ del diagramma di Bode delle fasi della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega}$ nel punto $\omega = \frac{1}{\tau}$ è

   ◯ $\gamma = -1$

   ⊗ $\gamma = -\frac{1}{2}$

○ $\gamma = -4.81$

10. Il tempo di assestamento T_a ($\pm 5\%$ del valore finale) del sistema $G(s) = \frac{1}{s+1}$ è

 ○ $T_a = 1$

 ⊗ $T_a = 3$

 ○ $T_a = \frac{1}{3}$

11. Si consideri la risposta di un sistema lineare di tipo 0 ad un ingresso a gradino. Il tempo si salita T_s è il tempo occorrente per

 ○ raggiungere il 50% del valore finale

 ○ raggiungere il 63.2% del valore finale

 ⊗ passare dal 10 al 90% del valore finale

12. La risposta impulsiva $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2}{s(s^2+0.8s+1)}$

 ○ tende a 0 per t tendente all'infinito: $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$

 ○ tende a 1 per t tendente all'infinito: $\lim_{t\to\infty} g(t) = 1$

 ⊗ presenta una sovraelongazione rispetto al valore finale

 ⊗ è nulla per t tendente a 0: $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$

13. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza $M_R > 1$

 ○ se $0 < \delta < 1$

 ○ se $0 < \delta < 0.5$

 ⊗ se $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$

14. Il coefficiente di smorzamento δ di un sistema del 2^o ordine caratterizzato da una coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$ ($\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$) è

 ○ $\delta = \frac{\omega}{\omega_n}$

 ⊗ $\delta = \frac{\sigma}{\omega_n}$

 ○ $\delta = \arctan \frac{\omega}{\sigma}$

15. Per $\omega > 0$, il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione $G(j\omega) = \frac{1+j\tau\omega}{1-j\tau\omega}$ coincide con il diagramma "asintotico"

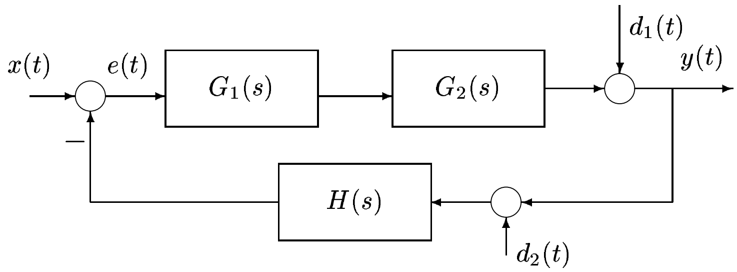
 ○ in nessun punto al finito

 ○ in un solo punto al finito $\omega = 1/\tau$

 ⊗ per tutti i valori di ω

Controlli Automatici I - Diploma
Compito del 6 aprile 1998 - Esercizi

1. Sia dato il seguente sistema:



Siano:

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2}, \qquad G_2(s) = \frac{s+0.1}{(s+1)}, \qquad H(s) = \frac{1+s}{(s+100)}$$

(a) Determinare l'andamento dei diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi (è sufficiente tracciare l'andamento asintotico) del guadagno di anello $G_1(s)G_2(s)H(s)$.

(b) Determinare l'andamento qualitativo del diagramma di Nyquist del guadagno di anello.

2. Con i dati del problema 1:

(a) Determinare il valore di regime (per $t \to \infty$) del segnale errore $e(t)$ quando il disturbo $d_2(t)$ è un gradino unitario e tutti gli altri ingressi nulli.

(b) Determinare il valore di regime (per $t \to \infty$) dell'uscita $y(t)$ quando il disturbo $d_1(t)$ è una parabola ($d_1(t) = t^2$) e tutti gli altri ingressi nulli.

3. Si consideri la seguente equazione differenziale:

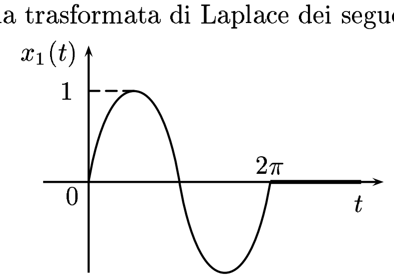
$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = 10[\dot{x}(t) + x(t)]$$

con condizioni iniziali nulle. Si determinino i parametri a, b in modo tale che per ingresso $x(t)$ a gradino unitario:

- il valore di regime di $y(t)$ sia 0.1;
- il tempo di assestamento della risposta sia $T_a = 0.5s$.

4. Calcolare l'andamento a regime del segnale $y(t)$, soluzione dell'equazione differenziale precedente, come risposta al segnale $x(t) = 5\sin(5\,t + \frac{\pi}{180^o}50^o)$.

5. Determinare la trasformata di Laplace dei seguenti segnali, nulli per $t < 0$:



$$x_2(t) = e^{-5\,(t-3)}\ , \qquad x_3(t) = \tfrac{1}{4}\,t^5$$

6. Calcolare l'antitrasformata $x(t)$ delle seguenti funzioni $X(s)$:

$$X_4(s) = \frac{1}{(s-4)^3}, \qquad X_5(s) = \frac{s-10}{(s+1)^2+4}$$

Nome: ____________________

Controlli Automatici I - Diploma
Compito del 6 aprile 1998 - Domande teoriche

Per ciascuno dei seguenti quesiti, segnare con una crocetta le risposte che si ritengono corrette. Alcuni quesiti hanno più risposte corrette, e si considerano superati quando queste sono segnate tutte.

1. Il sorpasso percentuale S di un sistema del 2^o ordine stabile e privo di zeri dipende:
   - ○ solo dalla pulsazione naturale ω_n;
   - ⊗ solo dal coefficiente di smorzamento δ;
   - ○ solo dalla parte reale dei poli;
   - ○ solo dalla parte immaginaria dei poli.
2. Sia dato un sistema $G(s)$ senza zeri e con tre poli $p_1 = 0,\ p_2 = 2j,\ p_3 = -2j$. La risposta di $G(s)$ per $t \to \infty$ ad un segnale ad impulso:
   - ○ tende a zero;
   - ○ tende a un valore costante non nullo;
   - ○ tende all'infinito;
   - ⊗ è una oscillazione non smorzata.
3. Il sistema $G(s) = \frac{s}{(s-a)(s-b)}$, $a, b > 0$, che presenta uno zero nell'origine e due poli reali positivi:
   - ○ complessivamente ha una variazione di fase di -90^o (in ritardo);
   - ⊗ complessivamente ha una variazione di fase di 180^o (in anticipo);
   - ○ complessivamente ha una variazione di fase di 270^o (in anticipo);
   - ○ ha un diagramma di Nyquist che inizia verso l'asse Im positivo.
4. Il diagramma di Nyquist del sistema $G(s) = e^{-2s}\frac{(s+1)}{(s+10)}$
   - ⊗ inizia da un punto dell'asse reale
   - ○ termina sull'asse reale (non nell'origine);
   - ○ effettua due giri in senso orario attorno all'origine;
   - ⊗ effettua infiniti giri in senso orario attorno all'origine;
5. La soluzione a regime di una equazione differenziale lineare a parametri costanti:
   - ○ non dipende dalle condizioni iniziali;
   - ○ dipende sempre dalle condizioni iniziali;
   - ⊗ non dipende dalle condizioni iniziali se il sistema è stabile.
6. Il sistema $G(s) = \frac{(s+a)}{(s+b)}$, con $a, b > 0$:
   - ○ in una certa banda di frequenze sfasa in anticipo se $a > b$;
   - ⊗ in una certa banda di frequenze sfasa in ritardo se $a > b$;
   - ○ non sfasa né in anticipo né in ritardo per alcuna frequenza.
7. I diagrammi di Bode di $G(s) = (s-3)$:
   - ○ si ottengono ribaltando attorno all'asse delle frequenze i diagrammi di Bode di $G(s) = (s+3)$;
   - ⊗ si ottengono ribaltando attorno all'asse delle frequenze i diagrammi di Bode di $G(s) = (s-3)^{-1}$;
   - ⊗ il diagramma delle ampiezze è lo stesso di $G(s) = (s+3)$, quello delle fasi è ribaltato.
8. La frequenza di oscillazione a regime del sistema descritto dall'equazione differenziale
   $a\ddot{y}(t) + y(t) = x(t)$ con $a > 0$, e $\dot{y}(0^-) = y(0^-) = 0,\ x(t) =$ impulso:
   - ○ aumenta se a cresce;
   - ⊗ diminuisce se a cresce;
   - ○ non dipende da a.

Controlli Automatici I - Diploma
Compito del 6 aprile 1998 - Soluzioni

1. I diagrammi di Bode di $G_1(s)G_2(s)H(s) = \frac{10(s+0.1)}{(s^2(s+100))}$ sono riportati in Fig. 3, mentre quelli di Nyquist in Fig. 4.

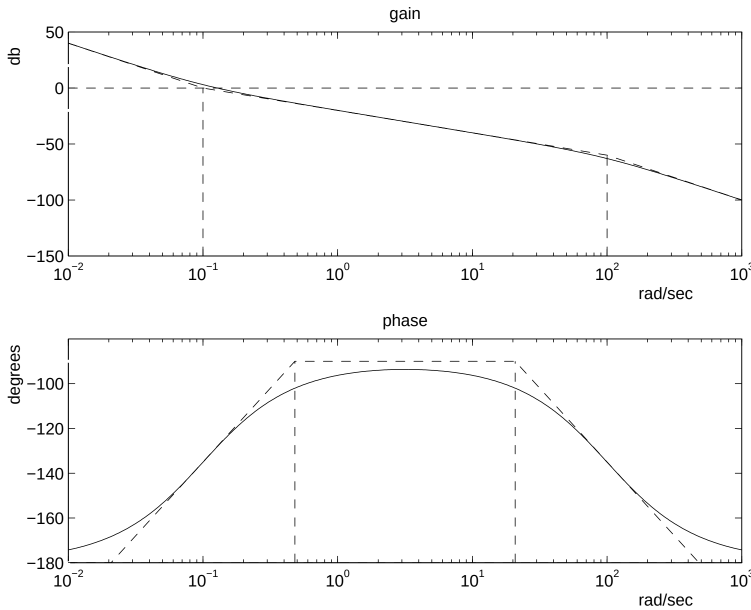


Figura 3: Diagrammi di Bode.

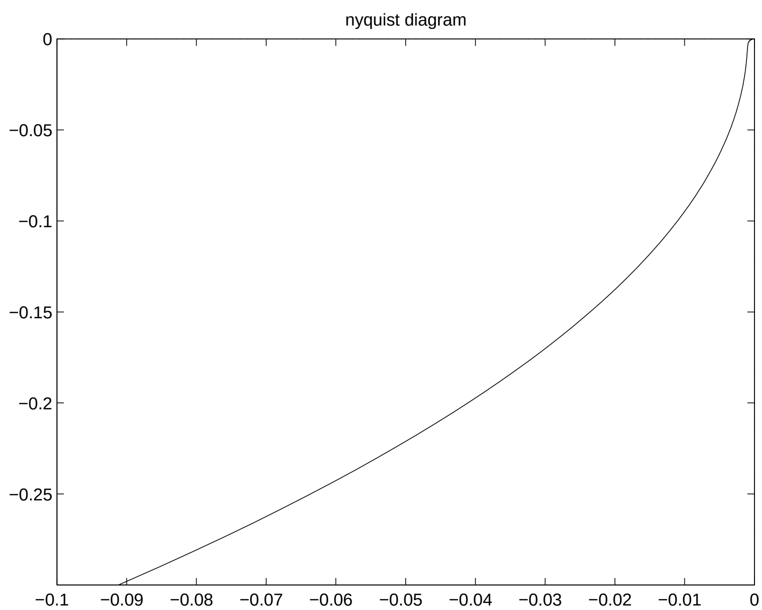


Figura 4: Diagramma di Nyquist.

2.a) La funzione di trasferimento tra $D_2(s)$ e $E(s)$ è data da:

$$\frac{E(s)}{D_2(s)} = G_{ed}(s) = -\frac{H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} = -\frac{s^2\,(1+s)}{s^3+100s^2+10s+1}$$

per cui

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sG_{ed}(s)\frac{1}{s} = 0$$

2.b) La funzione di trasferimento tra $D_1(s)$ e $Y(s)$ è data da:

$$\frac{Y(s)}{D_1(s)} = G_{yd}(s) = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{s^2(s+100)}{s^3+100s^2+10s+1}$$

per cui

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG_{yd}(s)\frac{2}{s^3} = 200$$

3) L'equazione differenziale corrisponde alla trasformata di Laplace

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10(s+1)}{s^2 + a\ s + b}$$

per cui, se il segnale di ingresso è un gradino unitario ($X(s) = 1/s$)

$$0.1 = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = \frac{10}{b} \qquad \longrightarrow \qquad b = 100 \quad (= \omega_n^2)$$

inoltre, dato che deve essere

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = 0.5 \qquad \longrightarrow \qquad \delta = 3/5 = 0.6 \qquad \longrightarrow \qquad a = 2\delta\omega_n = 12$$

4) Dal problema precedente, si ha

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10(s+1)}{s^2 + 12s + 100}$$

da cui

$$|G(j5)| \simeq 0.5309, \qquad \phi(5) \simeq 40.03^o$$

quindi

$$y(t) = 5|G(j5)|\sin[5t + 50^o\,\frac{\pi}{180^o} + \phi(5)] \simeq 2.6544\sin(5t + 90.03^o\,\frac{\pi}{180^o})$$

5 Le funzioni sono:

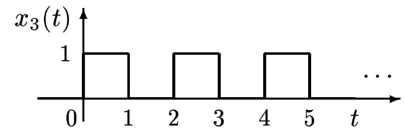
$$X_1(s) = \frac{(1 - e^{-2\pi s})}{s^2+1}, \qquad X_2(s) = \frac{e^{-15}}{s+5} \;\; (X_2(s) = \frac{e^{-3s}}{s+5}), \qquad X_3(s) = \frac{30}{s^6}$$

2. Le funzioni sono:

$$x_4(t) = \frac{1}{2}\,t^2\,e^{4t} \qquad\qquad x_5(t) = \frac{5\,\sqrt{5}}{2}\,e^{-t}\,\sin(2t - \arctan\frac{2}{11})$$

a) Calcolare le trasformate di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = e^{-5t} \sin 2t, \qquad x_2(t) = t^2\, e^{-2t},$$



b) Antitrasformare le seguenti funzioni di trasferimento

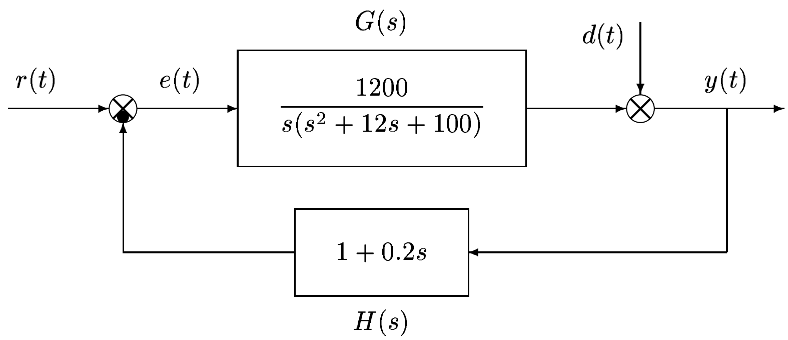
$$X_1(s) = \frac{2}{(s+3)^4}, \qquad X_2(s) = \frac{4}{s(s+2)^2}, \qquad X_3(s) = \frac{s+5}{(s+1)^2+4}$$

c) Sia data la seguente equazione differenziale

$$\ddot{y} + 4y = 8x$$

calcolare la risposta $y(t)$ del sistema ad un gradino unitario in ingresso $x(t) = 1$, $t > 0$ a partire da condizioni iniziali nulle.

d) Sia dato il seguente sistema in retroazione:



Tracciare i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $G(s)H(s)$. E' sufficiente tracciare le approssimazioni asintotiche a spezzata.

e) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist del guadagno di anello $G(s)H(s)$ del sistema retroazionato definito al punto d). Determinare con esattezza l'ascissa σ_a dell'asintoto verticale.

f) Calcolare il valore a regime $y(\infty)$ dell'uscita $y(t)$ corrispondente ad un ingresso di disturbo a rampa $d(t) = t$ e $r(t) = 0$. Nota: il sistema retroazionato è stabile per cui è possibile utilizzare il teorema del valore finale.

g) Calcolare il valore a regime della variabile $e(t)$ corrispondente al seguente segnale di riferimento: $r(t) = 2 + \sin t$ e $d(t) = 0$. Nota: il sistema retroazionato è stabile.

a) Si ottengono le seguenti trasformate di Laplace:

$$X_1(s) = \frac{2}{(s+5)^2+4}, \qquad X_2(s) = \frac{2}{(s+2)^3}, \qquad X_3(s) = \frac{1}{1+e^{-s}}\frac{1}{s}$$

b) Antitrasformando le funzioni $X(s)$ si ottengono le funzioni, per $t > 0$:

$$x_1(t) = \frac{1}{3}t^3 e^{-3t}, \qquad x_2(t) = 1 - e^{-2t} - 2te^{-2t}, \qquad \begin{aligned} x_3(t) &= e^{-t}\left[\cos 2t + 2\sin 2t\right] \\ &= \sqrt{5}e^{-t}\cos[2t + \arctan 2] \end{aligned}$$

c) La funzione di trasferimento $G(s)$ che descrive il sistema e le trasformate dei segnali di ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ sono le seguenti

$$G(s) = \frac{8}{s^2+4}, \qquad X(s) = \frac{1}{s}, \qquad Y(s) = \frac{8}{s(s^2+4)}$$

L'antitrasformata $y(t)$ del segnale di uscita è:

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2+4} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = 2(1-\cos 2t)$$

d) Il guadagno di anello è:

$$G(s)H(s) = \frac{1200(1+0.2s)}{s(s^2+12s+100)}$$

Oltre al polo nell'origine, al denominatore sono presenti due poli complessi coniugati caratterizzati da una pulsazione naturale ω_n=10 rad/sec e da un coefficiente di smorzamento $\delta = \frac{3}{5}$. Per ω=5 rad/sec il diagramma asintotico delle ampiezze passa per il punto:

$$G(j5)H(j5) \simeq \lim_{s\to 0} \frac{1200(1+0.2s)}{5(s^2+12s+100)} = \frac{1200}{5\cdot 100} = 2.4 = 7.6\ dB$$

I diagrammi asintotici di Bode sono mostrati in Fig. 5.

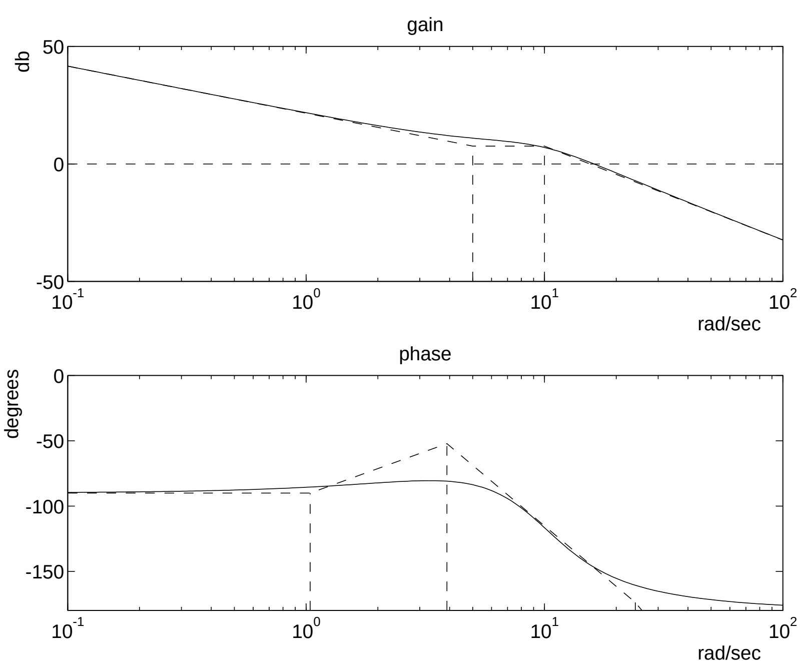


Figura 5: Diagrammi asintotici di Bode del guadagno di anello $G(s)H(s)$

e) Il diagramma di Nyquist del sistema è mostrato in Fig. 6. L'ascissa σ_a dell'asintoto verticale si calcola nel seguente modo:

$$\sigma_a = \frac{1200}{100}\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{25}\right) = \frac{24}{25}$$

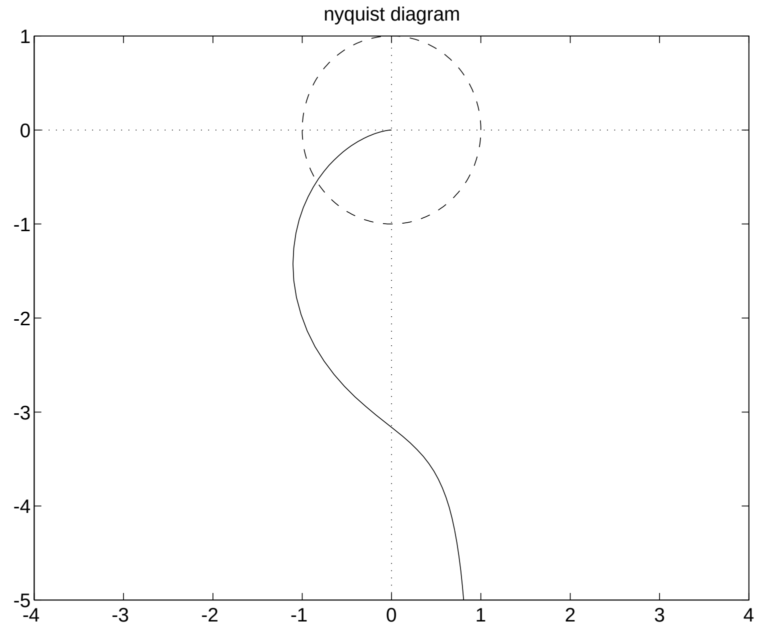


Figura 6: Diagramma di Nyquist del guadagno di anello $G(s)H(s)$

f) La funzione di trasferimento che lega l'ingresso di disturbo $d(t)$ all'uscita $y(t)$ è

$$G(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{s(s^2+12s+100)}{s(s^2+12s+100)+1200(1+0.2s)}$$

La trasformata $Y(s)$ del segnale di uscita è

$$Y(s) = G(s)D(s) = \frac{s(s^2+12s+100)}{s(s^2+12s+100)+1200(1+0.2s)}\,\frac{1}{s^2}$$

Applicando il teorema del valore finale si ottiene il valore dell'uscita a regime

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2+12s+100}{s(s^2+12s+100)+1200(1+0.2s)} = \frac{1}{12}$$

g) La funzione di trasferimento che lega l'ingresso di riferimento $r(t)$ alla variabile $e(t)$ è la stessa del punto precedente

$$G(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(s^2+12s+100)}{s(s^2+12s+100)+1200(1+0.2s)}$$

Per calcolare il valore a regime della variabile $e(t)$ corrispondente al segnale $r(t) = 2 + \sin t$ in ingresso è bene utilizzare il concetto di funzione di risposta armonica. A tale fine si calcolano i due vettori $G(0)$ e $G(j)$:

$$G(0) = 0$$

$$G(j) = \left.\frac{s^3+12s^2+100s}{s^3+12s^2+340s+1200}\right|_{s=j} = \frac{-12+99j}{1188+339j}$$

Il valore a regime della variabile $e(t)$ è quindi il seguente

$$e(t) = M\sin(t+\varphi)$$

dove

$$M = \left|\frac{-12+99j}{339j+1188}\right| = 0.081 \qquad \varphi = \arg\left[\frac{-12+99j}{339j+1188}\right] = 81^o = 1.413 \text{ rad}$$

Controlli Automatici - Diploma - 14 Aprile 1997 - Domande teoriche

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\, e^{-t/\tau} + x$ (dove x e y sono i segnali di ingresso e di uscita) è
   - ⊗ lineare
   - ○ non lineare
   - ○ stazionario
   - ⊗ non stazionario

2. Il tempo di assestamento di un sistema $G(s)$ del 2^o ordine stabile e privo di zeri
   - ○ dipende solo dalla pulsazione naturale ω_n
   - ⊗ dipende solo dalla parte reale dei poli
   - ○ dipende solo dalla parte immaginaria dei poli

3. Per un sistema $G(s)$ del 2^o ordine stabile e privo di zeri, il legame che lega la massima sovraelongazione S al coefficiente di smorzamento δ è:
   - ○ $S = 200 e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$
   - ○ $S = 704 e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$
   - ○ $S = 100 e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$
   - ⊗ $S = 153 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$

4. Dato il sistema $G(s) = \frac{(s+2)}{s(s+3)}$, il valore iniziale ($t = 0$) della corrispondente risposta impulsiva $g(t)$ è:
   - ⊗ $g(0) = 1$
   - ○ $g(0) = \frac{2}{3}$
   - ○ $g(0) = \infty$

5. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione ed avente un elevato guadagno di anello risulta poco sensibile
   - ⊗ alle variazioni parametriche della funzione $G(s)$
   - ○ alle variazioni parametriche della funzione $H(s)$
   - ⊗ ai disturbi additivi agenti sul sistema

6. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di un sistema lineare, da esso si può dedurre quello delle fasi
   - ○ solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle
   - ○ solo se l'intersezione con l'asse a guadagno unitario è unica
   - ⊗ solo se il sistema è a fase minima

7. Il diagramma di Nyquist di un sistema con ritardo puro tende all'origine con tangente
   - ○ verticale
   - ○ orizzontale
   - ⊗ non determinabile

8. Il diagramma di Nichols del sistema $G(j\omega) = K$ (dove K costante positiva) è:
   - ⊗ un punto
   - ○ una retta orizzontale
   - ○ una retta verticale

“Controlli Automatici I” - Diploma - Modena - 1 Aprile 1996

1) Calcolare l’antitrasformata $x(t)$ delle seguenti funzioni $X(s)$:

$$X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}, \qquad X(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+4}$$

2) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) = 10[\dot{x}(t) + x(t)], \qquad \text{dove} \qquad x(t) = e^{-5t}\ , t > 0$$

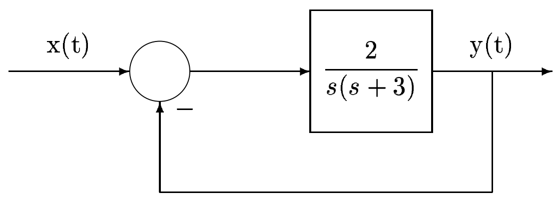
a partire da condizioni iniziali nulle: $\dot{y}(0^-) = 0$, $y(0^-) = 0$.

3) La dinamica di un accelerometro a massa unitaria è descritta dall’equazione

$$\ddot{y}(t) + F\,\dot{y}(t) + K\,y(t) = a(t)$$

dove F è il coefficiente di attrito dello smorzatore, K è la rigidità della molla e $a(t)$ è il segnale di ingresso (accelerazione). Determinare i valori di F e di K in modo tale che il sistema abbia guadagno statico 0.25 e sia caratterizzato da una coppia di poli reali coincidenti.

4) Calcolare la risposta a regime y(t) del seguente sistema quando è presente in ingresso il segnale sinusoidale $x(t) = \sin(2t)$



5) Tracciare i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della seguente funzione di trasferimento $G(s)$

$$G(s) = \frac{10(s-10)^2}{s(s+20)(s+100)}$$

E’ sufficiente tracciare le approssimazioni asintotiche a spezzata.

Risoluzione dei quesiti

1) L'antitrasformata $x(t)$ del primo segnale $X(s)$ è immediata

$$x(t) = t\, e^{-3t}\ , t > 0$$

Per antitrasformare il secondo segnale è bene riscrivere $X(s)$ nel seguente modo:

$$X(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

L'antitrasformazione è ora immediata:

$$x(t) = e^{-t}\left[\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]\ , t > 0$$

Ricordando che vale la seguente relazione

$$\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\ \sin(\omega t + \arctan\frac{\alpha}{\beta})$$

la funzione $x(t)$ può essere espressa anche nel modo seguente

$$x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-t}\ \sin(2t + \arctan 2)\ , t > 0$$

2) Dall'equazione differenziale data si ricava la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+3)}$$

La trasformata del segnale di ingresso $x(t)$ è

$$X(s) = \frac{1}{s+5}$$

Quindi la trasformata del segnale di uscita è

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+3)(s+5)} = \frac{2}{3}\frac{1}{s} + \frac{10}{3}\frac{1}{s+3} - \frac{4}{s+5}$$

Utilizzando la scomposizione in fratti semplici ed antirasformando si ottiene

$$y(t) = \frac{2}{3} + \frac{10}{3}e^{-3t} - 4\,e^{-5t}\ , t > 0$$

3) All'equazione differenziale data corrisponde la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + F\,s + K}$$

Le relazioni corrispondenti ad un guadagno statico unitario e a poli reali coincidenti sono:

$$\frac{1}{K} = 0.25 \qquad\qquad \Delta = F^2 - 4K = 0$$

dalle quali si ottiene

$$K = 4, \qquad\qquad F = 4$$

4) La funzione di trasferimento del sistema retroazionato è

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 3\,s + 2} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Il sistema è asintoticamente stabile. Per calcolare la risposta a regime in risposta ad un segnale sinusoidale è sufficiente utilizzare la funzione di risposta armonica:

$$G(j2) = \frac{1}{(-1+3j)} = -\frac{1}{10}\,(1+3j)$$

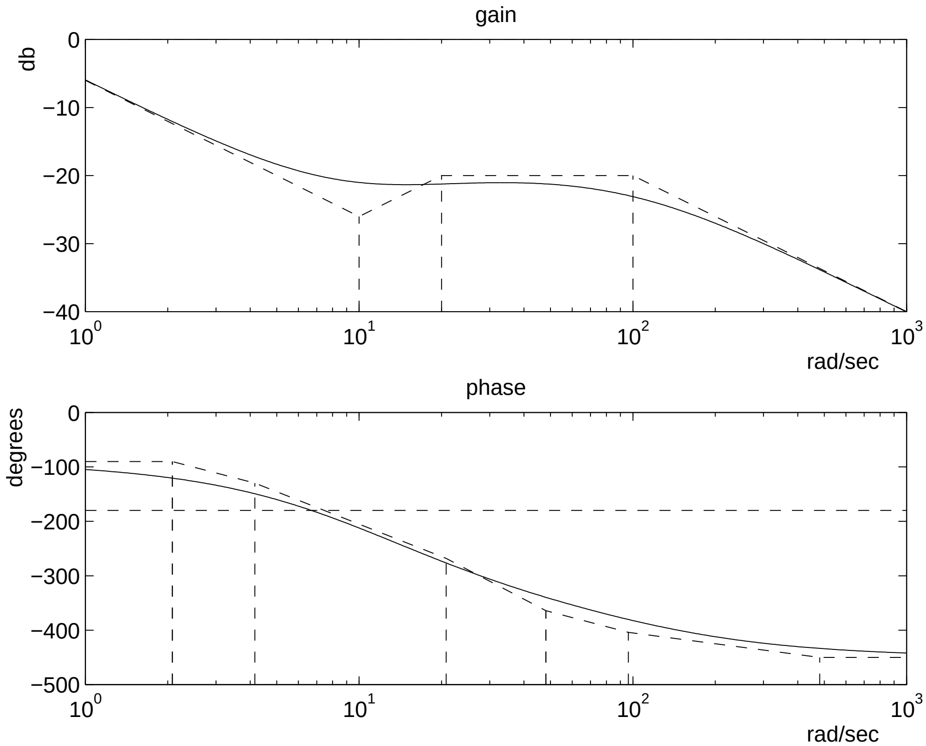
La risposta a regime è quindi la seguente:

$$y(t) = -\frac{1}{\sqrt{10}}\sin\left(2t + \arctan 3\right)$$

5) I diagrammi asintotici di Bode della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10(s-10)^2}{s(s+20)(s+100)}$$

sono mostrati nella seguente figura.

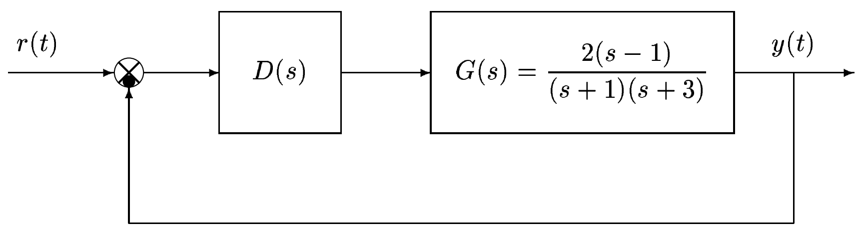


Il guadagno del diagramma asintotico alla pulsazione $\omega = 10$ è

$$|G(j10)|_a = \left|\frac{10(-10)^2}{10(20)(100)}\right| = \frac{1}{20} \simeq 26\,\mathrm{dB}$$

"Controlli Automatici I" - Diploma - Modena - 22 Aprile 1996

Sia dato il seguente sistema dinamico:



1. Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$; dire se, in base al criterio di Nyquist, il sistema $G(s)$ retroazionato è stabile;

2. Posto $D(s) = K$ determinare i valori di K che garantiscono la stabilità del sistema retroazionato.

3. Posto $D(s) = \frac{1}{s}$, disegnare qualitativamente il diagramma polare "completo" della funzione $D(s)G(s)$ determinando esattamente il valore σ_0 dell'asintoto verticale.

4. Posto $D(s) = \frac{K}{s}$, determinare il valore di K tale da garantire un errore a regime $e(\infty) = 0.5$ in risposta al seguente segnale di ingresso: $r(t) = 2\,t$.

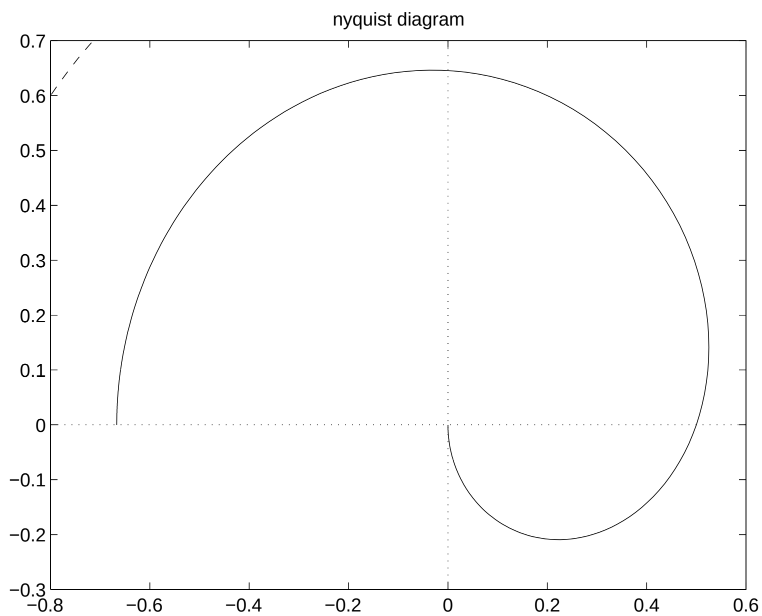
5. Sempre per $D(s) = \frac{K}{s}$, determinare il valore di K che garantiscono la stabilità del sistema retroazionato.

Soluzione dei quesiti

1) Il diagramma di Nyquist della funzione

$$G(s) = \frac{2(s-1)}{(s+1)(s+3)}$$

è mostrato in figura Per $\omega = 0$ il punto di partenza è $G(0) = -\frac{2}{3}$. In base al criterio di Nyquist si può



affermare che il sistema retroazionato è stabile.

2) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{2K(s-1)}{(s+1)(s+3)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^2 + (4+2K)s + 3 - 2K = 0$$

Imponendo che tutti e tre i coefficienti siano positivi si trova che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per

$$-2 < K < \frac{3}{2}$$

3) Posto $D(s) = \frac{1}{s}$ il guadagno di anello del sistema diventa

$$D(s)G(s) = \frac{2(s-1)}{s(s+1)(s+3)}$$

Il corrispondente diagramma di Nyquist è il seguente L'ascissa σ_a dell'asintoto verticale è

$$\sigma_0 = \frac{-2}{3}\left(-1 - 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{14}{9}$$

4) L'errore a regime per ingresso a rampa, $r(t) = 2t$, è il seguente

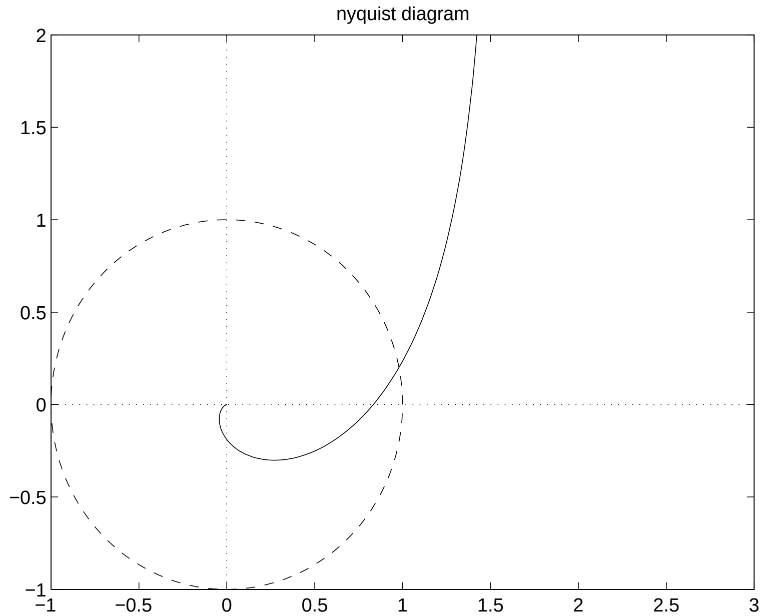
$$e(\infty) = \frac{2}{K_v} = -\frac{3}{K} = 0.5 \qquad \rightarrow \qquad K = -6$$

5) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{2K(s-1)}{s(s+1)(s+3)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 4s^2 + (3+2K)s - 2K = 0$$

Per studiare la stabilità del sistema occorre utilizzare il criterio di Routh

$$\begin{array}{c|ll}
3 & 1 & 3+2K \\
2 & 4 & -2K \\
1 & 4(3+2K)+2K & \\
0 & -2K &
\end{array}$$



Imponendo che tutti i coefficienti della prima colonna siano positivi si ricava

$$-\frac{6}{5} < K < 0$$