Controlli Automatici A
Compito Completo
5 Dicembre 2007 - Esercizi

Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 2\,t^3 + 5\,e^{-b\,t}\,\sin(a\,t), \qquad x_2(t) = b\,\delta(t) + t^4\,e^{a\,t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{12}{s^4} + \frac{5\,a}{(s+b)^2 + a^2}, \qquad X_2(s) = b + \frac{24}{(s-a)^5}$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{a}{s(s-2)(s+b)}, \qquad G_2(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)}\;e^{-b\,s}$$

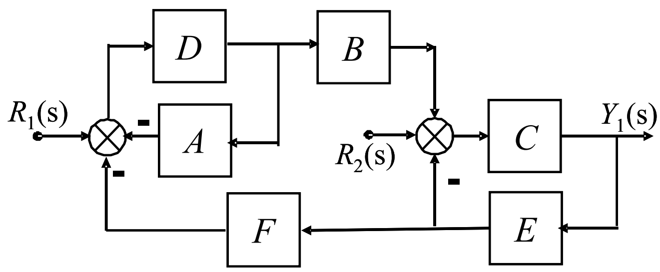
Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{a\left[-(b+2) + b\,e^{2\,t} - 2\,e^{-b\,t}\right]}{2b(b+2)}, \qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad t \le b \\ \cos(a\,(t-b)) & \text{per} \quad t > b \end{cases}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)} = \frac{BCD}{1+AD+CE+BCDEF+ACDE}$$

$$G_2(s) = \frac{Y_1(s)}{R_2(s)} = \frac{C(1+AD)}{1+AD+CE+BCDEF+ACDE}$$



c) In figura è mostrata la risposta $y(t)$ di un sistema lineare stabile quando in ingresso è presente un gradino $x(t) = 4$. Nei limiti della precisione del grafico:

c.1) determinare la posizione dei poli dominanti del sistema:

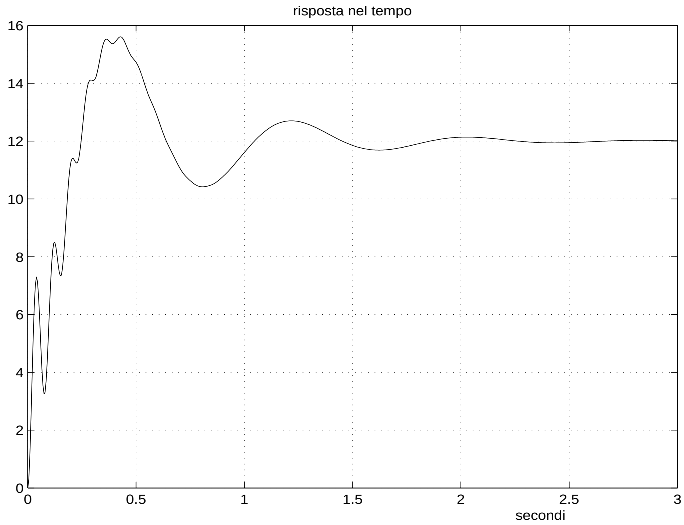
$$p_{1,2} \simeq -2 \pm 7.75\, j$$

c.2) determinare il guadagno statico del sistema:

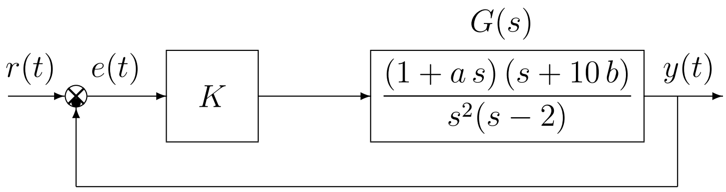
$$G(0) = 3$$

c.3) calcolare la massima sovraelongazione del sistema:

$$S\% \simeq 32\%$$



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$ sono mostrati in Fig. ??. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$

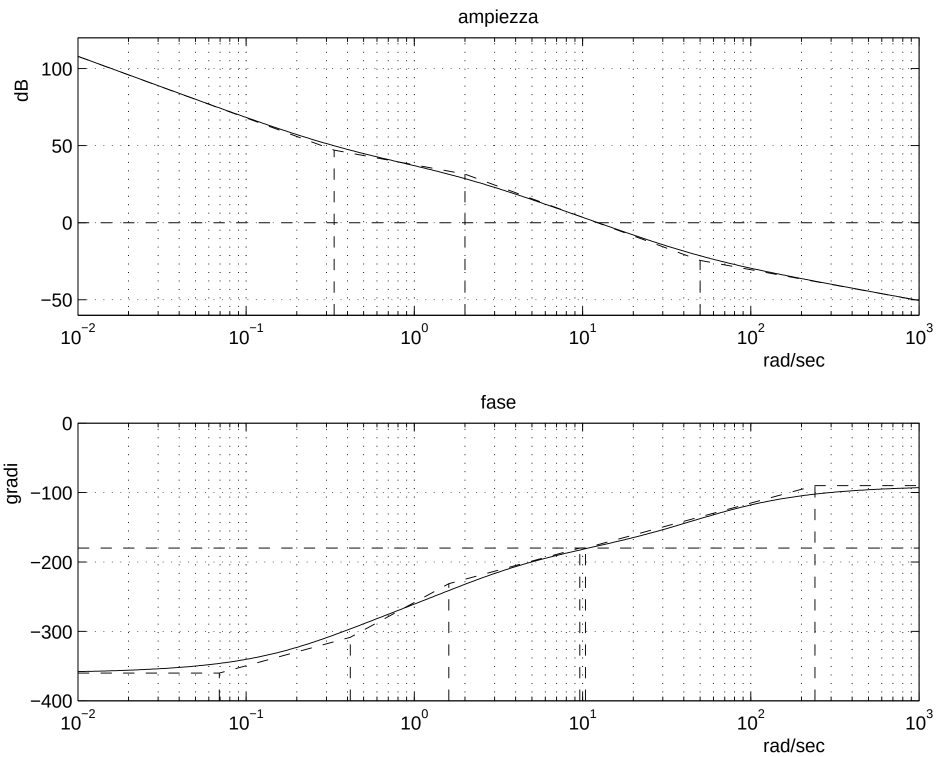


Figura 1: I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$

sono le seguenti:

$$G_0(s) = -\frac{5\,b}{s^2}, \qquad G_\infty(s) = \frac{a}{s}$$

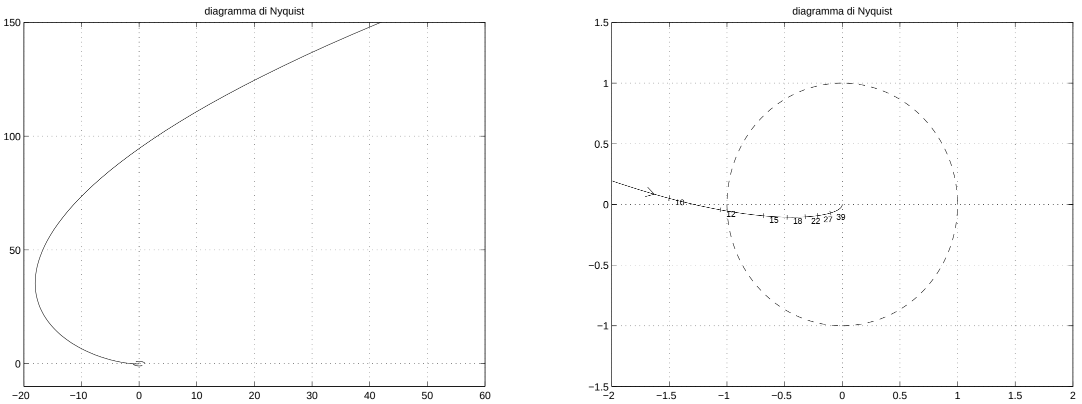


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$. Il secondo diagramma è uno zoom del primo nell'intorno dell'origine.

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ sono:

$$\varphi_0 = -2\,\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1/a$ e il guadagno γ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 10\,b$ hanno il seguente valore:

$$\beta = \frac{10\,a^2\,b}{2} = 5\,a^2\,b, \qquad\qquad \gamma = \frac{a}{10\,b}$$

d.2) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K\,(1 + a\,s)\,(s + 10\,b)}{s^2(s-2)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (a\,K - 2)s^2 + (1 + 10ab)K\,s + 10b\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cccl}
3 & 1 & (1+10ab)K & \rightarrow & 1 > 0 \\
2 & a\,K - 2 & 10b\,K & \rightarrow & K > -\frac{2}{a} \\
1 & (a\,K-2)(1+10ab)K - 10b\,K & & \rightarrow & Ka(1+10ab) > 10b + 2 + 20ab \\
0 & 10b\,K & & \rightarrow & K > 0
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$K > K^* = \frac{10b + 2 + 20ab}{a(1+10ab)}$$

Nel caso $a = 3$ e $b = 5$ si ha $K^* = 0.777$. La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è

$$\omega^* = \sqrt{K^*(1+10ab)} = \sqrt{\frac{10b + 2 + 20ab}{a}}$$

Nel caso $a = 3$ e $b = 5$ si ha $\omega^* = 10.83$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $b = 5$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. **??**. Il diagramma di Nyquist non ha asintoti verticali. Vi è un'unica intersezione σ_1^* con il semiasse reale negativo. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto a.2:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad \sigma_1^* = -1.287$$

Il corrispondente valore di ω_1^* è quello determinato al punto a.2: $\omega^* = 10.83$.

d.4) Calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 5\,t$.

Soluzione: l'errore a regime richiesto è sicuramente nullo perchè il sistema è di tipo 2 mentre l'ingresso è di tipo a rampa:

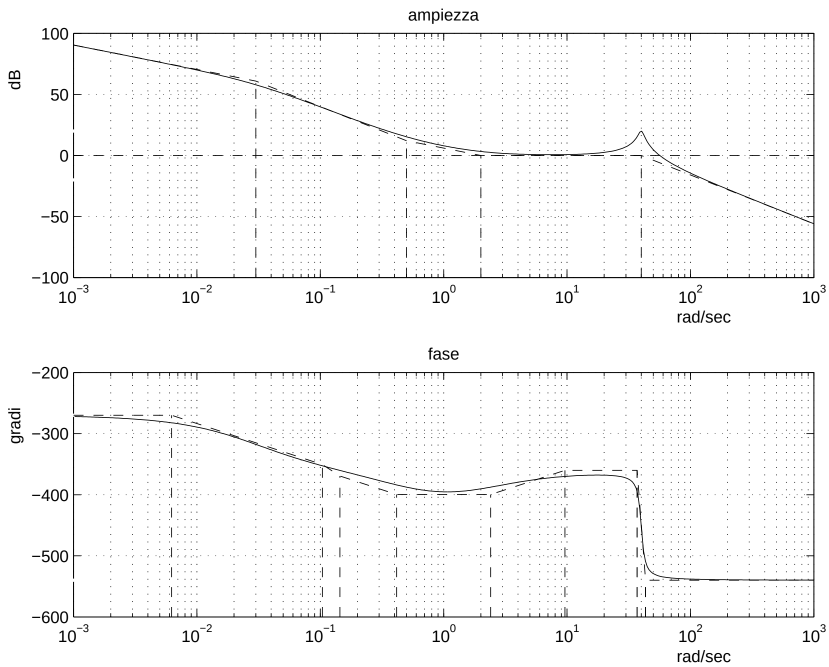
$$K_v = \infty \qquad \rightarrow \qquad e(\infty) = \frac{R_0}{K_v} = 0$$

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = a\,\sin(100\,b\,t + \frac{\pi}{4})$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

$$G(s) \simeq \frac{1600(s-0.5)(s+2)}{s(s+0.03)(s^2+4\,s+40^2)}$$



La risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = a\,\sin(100\,b\,t + \frac{\pi}{4})$ è la seguente:

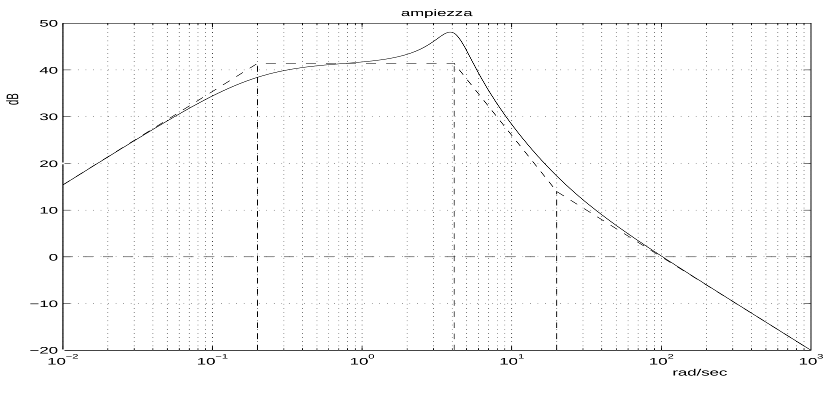
$$y_\infty(t) = a\,|G(100\,b\,j)|\,\sin(100\,b\,t + \frac{\pi}{4} + \text{Arg}G(100\,b\,j))$$

Per $a = 3$ e $b = 5$ si ha:

$$y_\infty(t) = 3,|G(500\,j)|\,\sin(500\,t + \frac{\pi}{4} + \text{Arg}G(500\,j)) = 0.0193\,\sin(500\,t + \frac{\pi}{4} - 179.7^o)$$

f) Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli mostrato in figura. Sapendo che il sistema è a fase minime, stimare "indicativamente" la fase del sistema in corrispondenza delle seguenti pulsazioni:

$$\omega_1 = 0.02 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 \simeq \frac{\pi}{2}$$
$$\omega_2 = 1 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 \simeq 0$$
$$\omega_3 = 4 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 \simeq -\frac{\pi}{2}$$
$$\omega_4 = 100 \quad \rightarrow \quad \varphi_4 \simeq -\frac{\pi}{2}$$



Controlli Automatici - Primo Compito
5 Dicembre 2007 - Domande
Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad "a" e "b" i valori assegnati e si risponda alle domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t) + a\,\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = 4\,\ddot{x}(t) + b\,x(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4\,s^2 + b}{s^3 + a\,s^2 + 3\,s + 2}$$

2. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{a\,(s^2+1)}{(s+b)^2(2\,s-1)} \quad \rightarrow \quad y_0 = \frac{a}{2} \qquad y_\infty = \nexists$$

3. Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $x(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della derivata":

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\,X(s) - x(0)$$

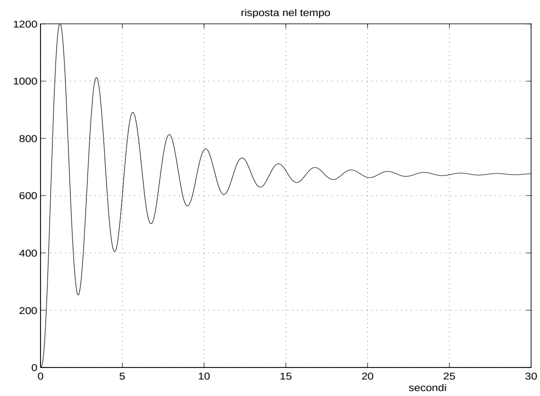
4. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{(2 + 0.04\,s)(s^2 + 90\,s + 8100)}{(3 + 0.2\,s)(1 + 0.04\,s)(s^2 + 0.4\,s + 8)}$$

Calcolare inoltre:
1) il guadagno statico K_0 del sistema;
2) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino;
3) il periodo T dell'eventuale oscillazione smorzata presente nella risposta al gradino:

$$K_0 = 675, \qquad T_a \simeq 15\,\text{s}, \qquad T \simeq 2.22\,\text{s}$$

La coppia di poli dominanti del sistema è data dal termine $(s^2 + 0.4\,s + 8)$.



5. Calcolare la posizione σ_a dell'asintoto verticale del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(2 + b\,s)(s^2 + 6\,s + 3)}{s(s^3 + 2\,s^2 + 12\,s - a)} \quad \rightarrow \quad \sigma_a = -\frac{6}{a}\left(\frac{b}{2} + 2 - \frac{12}{a}\right)$$

6. Nell'applicazione del criterio di Routh, le radici dell'equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla

○ sono tutte radici a parte reale nulla

⊗ sono radici anche dell'equazione caratteristica di partenza

⊗ sono radici simmetriche rispetto all'origine del piano complesso

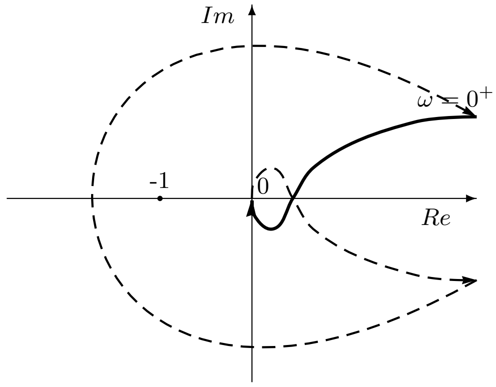
7. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $\dot{y}(t) + a\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = b$.

$$y(t) = b\,e^{-a\,t}, \qquad t > 0$$

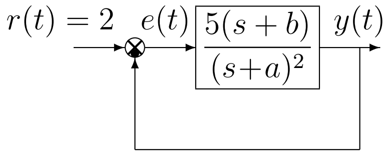
8. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con 2 poli nell'origine e tutti gli altri a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

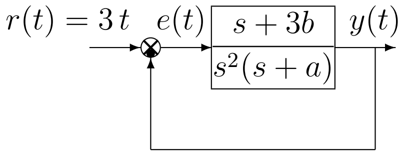
Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

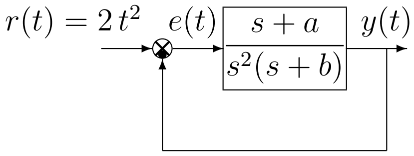
○ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;
○ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
⊗ $(K < 0,\ |K| << 1)$;



9. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:







$e(\infty) = \dfrac{2a^2}{a^2+5b}$ $\qquad$ $e(\infty) = 0$ $\qquad$ $e(\infty) = \dfrac{4\,b}{a}$

10. Il criterio di Routh per lo studio della stabilità di un sistema retroazionato

○ è un criterio solo necessario
⊗ è un criterio necessario e sufficiente
○ è un criterio solo sufficiente
○ può essere utilizzato solo per sistemi che ad anello aperto siano stabili

11. Enunciare il criterio di Nyquist nella sua formulazione più generale valida anche per sistemi instabili ad anello aperto).

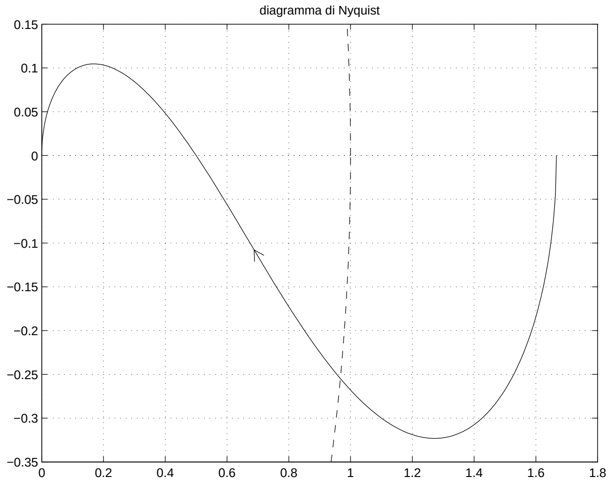
Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ ...
non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio
condizione ...
necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli della funzione $F(j\omega)$ a parte reale positiva.

12. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con un elevato guadagno statico d'anello

⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$
○ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$
⊗ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sull'uscita del sistema

13. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \dfrac{-(s+5)}{(s+1)(s-3)}$

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:



⊗ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
○ $(K < 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;

Calcolare inoltre il valore limite K^*:

$$K^* = -2$$

14. I diagrammi di Nichols:

○ hanno sia l'asse delle ascisse che l'asse delle ordinate in scala logaritmica;
⊗ hanno l'asse delle ascisse in scala lineare e l'asse delle ordinate in scala logaritmica;
○ hanno l'asse delle ascisse in scala logaritmica e l'asse delle ordinate in scala lineare;
⊗ sull'asse delle ascisse viene riportata la fase della funzione di risposta armonica;
○ sull'asse delle ascisse viene riportato il modulo della funzione di risposta armonica;

15. La posizione dei due poli di un sistema del 2^o ordine privo di zeri è univocamente determinata se sono note le seguenti informazioni:

⊗ il coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a
○ la massima sovraelongazione S e il picco di risonanza M_R
⊗ il picco di risonanza M_R e pulsazione di risonanza ω_R

16. La formula di Bode per il calcolo della fase di un sistema a partire dal diagramma delle ampiezze

○ è valida per tutti sistemi lineari stabili
⊗ è valida per tutti i sistemi lineari a fase minima
○ è una formula approssimata
⊗ è una formula esatta

17. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza maggiore di uno, $M_R > 1$,

○ se $0 < \delta < 1$
○ se $0 < \delta < \frac{1}{2}$
⊗ se $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$

18. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $K > 0$:

$$G(s) = \frac{4\,e^{-t_0 s}}{s+2} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} M(\omega) = & \dfrac{4}{\sqrt{\omega^2 + 2^2}} \\ \varphi(\omega) = & -\,t_0\,\omega - \arctan\dfrac{\omega}{2} \end{cases}$$

19. I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici:

1) Indicare il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ.

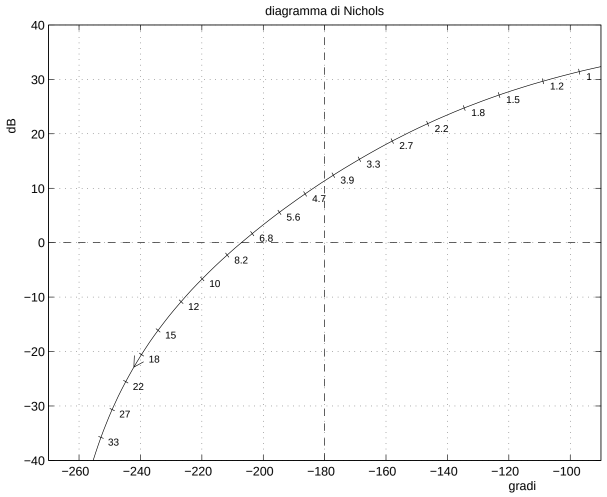
2) Calcolare per quali valori del guadagno $K_p > 0$ il sistema $K_p G(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile. Nota: i valori espressi in db vanno convertiti in valori numerici.

3) Determinare per quale valore K_φ del guadagno il sistema $K_\varphi G(s)$ presenta un margine di fase pari a $M_\varphi = (30 + 3a)$

4) Determinare per quale valore K_α del guadagno il sistema $K_\alpha G(s)$ presenta un margine di ampiezza pari a $M_\alpha = (3 + b)$

Per $a = 3$ e $b = 5$ i valori richiesti sono i seguenti:

$G_1(j\omega)$



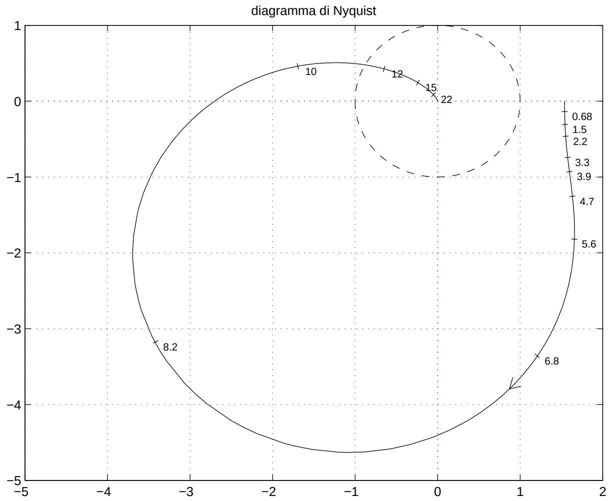
1) $M_\alpha = 0.27$, $M_\varphi = -27.15$ gradi

2) $0 < K_1 < 0.27$

3) $K_\varphi = -22.9$ db $= 0.0716$

4) $K_\alpha = -29.4$ db $= 0.0338$

$G_2(j\omega)$



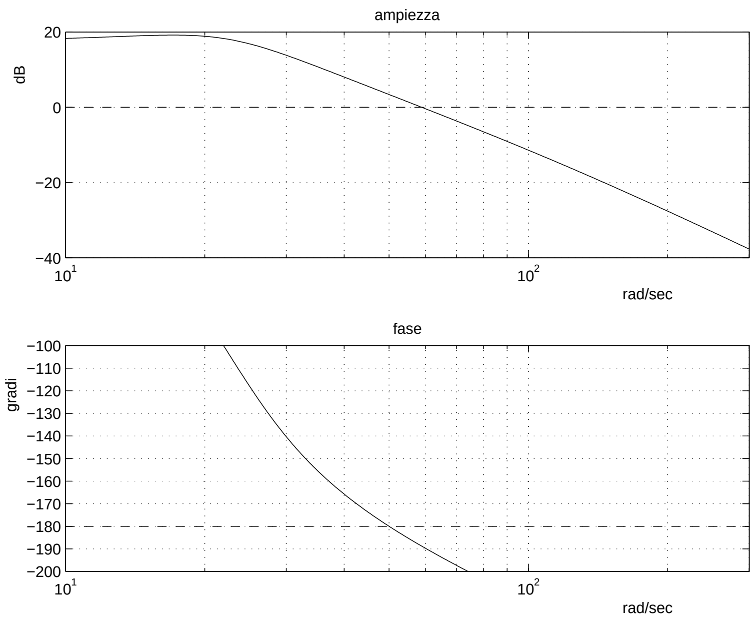
1) $M_\alpha = 0.37$, $M_\varphi = -28.56$ gradi

2) $0 < K_2 < 0.37$

3) $K_\varphi = -13.1$ db $= 0.222$

4) $K_\alpha = -26.7$ db $= 0.0462$

$G_3(j\omega)$



1) $M_\alpha = 0.6757$

$M_\varphi = -8.816$ gradi

2) $0 < K_1 < 0.6757$

3) $K_\varphi = -13.7$ db $= 0.206$

4) $K_\alpha = -21.5$ db $= 0.0845$