Controlli Automatici A - A.A. 2004/05
Compito Completo
14 Gennaio 2005 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 2(1 + t^2)\, e^{5\,t}, \qquad x_2(t) = 4 + 3\, e^{-3t} \sin(7\,t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2}{(s-5)} + \frac{4}{(s-5)^3}, \qquad X_1(s) = \frac{4}{s} + \frac{21}{(s+3)^2 + 7^2}$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

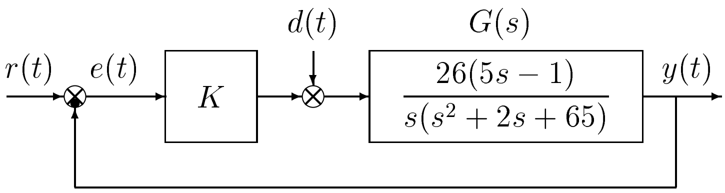
$$G_1(s) = \frac{3s+2}{s(s+1)(s+2)}, \qquad G_2(s) = 2 + \frac{18}{(s+4)^2 + 6^2}$$

Soluzione:

$$G_1(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}, \qquad \rightarrow \qquad g_1(t) = 1 + e^{-t} - 2\, e^{-2t}$$

$$G_2(s) = 2 + \frac{18}{(s+4)^2 + 6^2}, \qquad \rightarrow \qquad g_2(t) = 2\,\delta(t) + 3\, e^{-4t} \sin(6t)$$

c) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



c.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{26\,K\,(5s-1)}{s(s^2+2s+65)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 2s^2 + (65 + 130\,K)s - 26\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & (65 + 130\,K) & \rightarrow & \\
2 & 2 & -26\,K & \rightarrow & \\
1 & (65 + 130\,K) + 13\,K & & \rightarrow & K > -\frac{5}{11} \\
0 & -26\,K & & \rightarrow & K < 0
\end{array}$$

Quindi il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$K^* = 0.4545 = -\frac{5}{11} < K < 0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è

$$\omega^* = \sqrt{-13\,K^*} = \sqrt{\frac{65}{11}} = 2.43$$

c.2) Calcolare, in funzione di K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ in presenza del segnale di ingresso $r(t) = 2$ e del segnale di disturbo $d(t) = 3$.

Soluzione. Il sistema $G(s)$ è tipo 1 per cui segnale di ingresso $r(t) = 2$ non ha influenza sull'errore. La funzione di trasferimento che lega il segnale di disturbo $d(t) = 3$ all'errore a regime $e(t)$ è la seguente:

$$G_d(s) = \frac{-G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{-26\,(5s-1)}{s(s^2+2s+65) + 26\,K\,(5s-1)}$$

L'errore a regime richiesto non altro che il prodotto fra l'ampiezza $d(t) = 3$ del disturbo e il guadagno statico G_{d0} del sistema $G_d(s)$:

$$e(\infty) = 3\,G_{d0} = \frac{3}{K}$$

c.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 1. La posizione

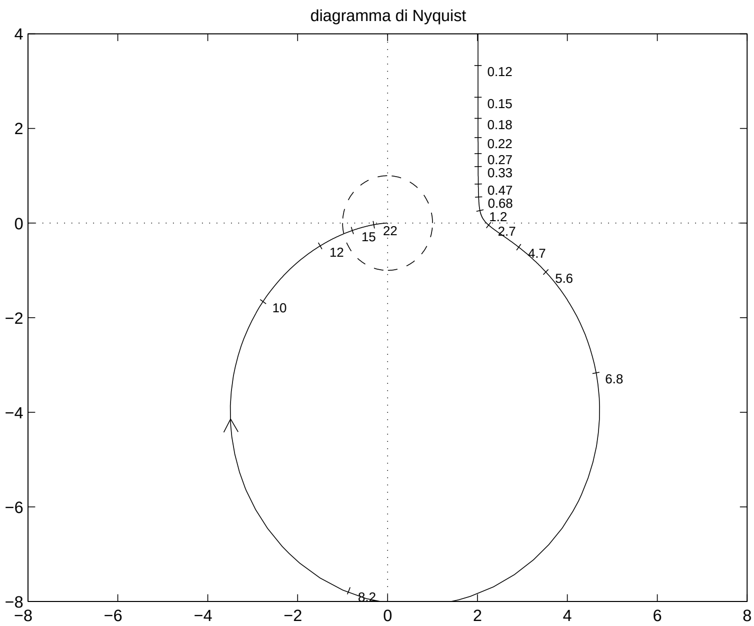


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

dell'asintoto verticale è la seguente:

$$\sigma_a = \frac{-26}{65}\left(-5 - \frac{2}{65}\right) = \frac{654}{325} \simeq 2$$

Vi è un'unica intersezione σ_1^* con il semiasse reale negativo. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto c.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = \frac{11}{5} = 2.2$$

Il corrispondente valore di ω_1^* è quello determinato al punto c.1: $\omega_1^* = 2.43$.

c.4) Posto $K = 20$, tracciare qualitativamente i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode della funzione $20\,G(s)$ sono mostrati in Fig. 2. Sul diagramma asintotico, il valore β del guadagno in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$ è il seguente:

$$\beta = \frac{20 \cdot 26}{0.2 \cdot 65} = 40 \simeq 32 \text{ db}$$

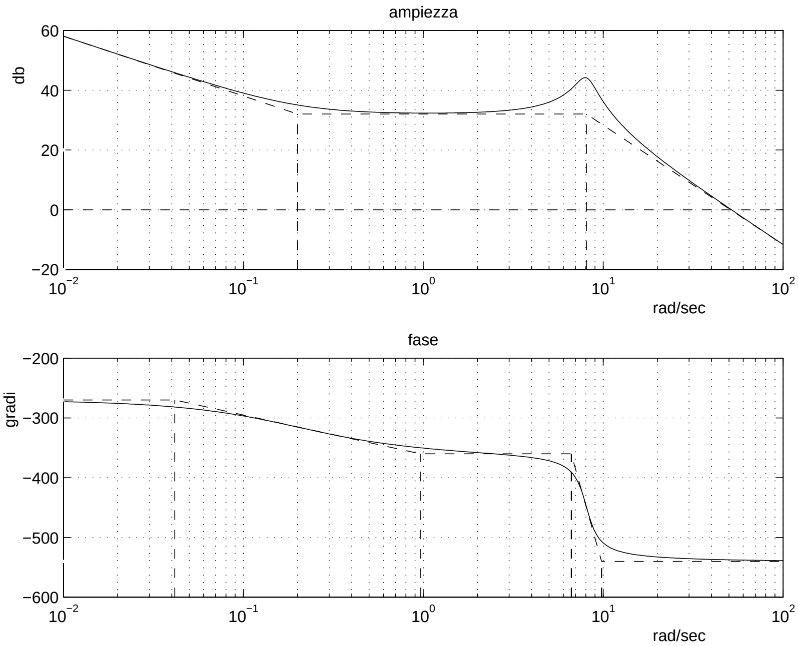
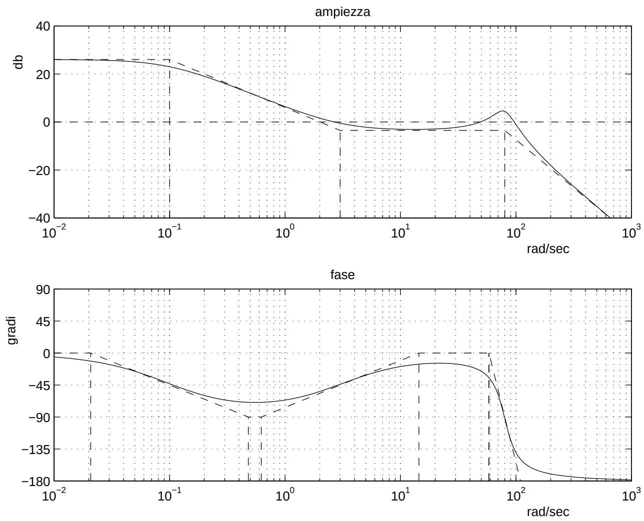


Figura 2: I diagrammi di Bode della funzione $20\,G(s)$.

d) Si faccia riferimento al sistema $G(s)$ il cui diagramma di Bode dei moduli è mostrato in figura. Sapendo che $G(s)$ è un sistema a fase minima e nei limiti della precisione consentita dal grafico:

d.1) calcolare l'espressione analitica della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{20(1+\frac{s}{3})}{(1+\frac{s}{0.1})(1+\frac{0.4\,s}{80}+\frac{s^2}{80^2})}$$



d.2) Utilizzando la formula di Bode e/o la funzione $G(s)$ calcolata al punto precedente, disegnare l'andamento qualitativo del diagramma delle fasi della funzione $G(s)$. (Vedi soluzioni riportata a fianco).

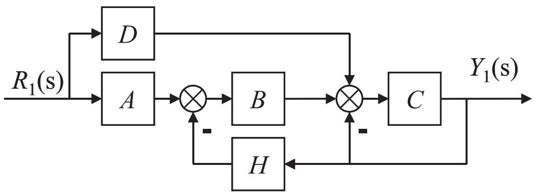
d.3) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

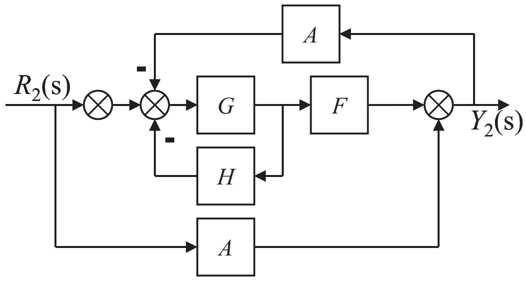
$x(t) = 4 + 20\sin(200\,t + \pi/3)$;

Soluzione:

$$y_\infty(t) = 4(20) + 20(0.125)\sin(200\,t - 170^o + \pi/3)$$

e) Applicando la formula di Mason, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$ e $G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{R_2(s)}$ dei seguenti 2 schemi a blocchi:





$$G_1(s) = \frac{ABC + DC}{1 + C + BCH}$$

$$G_2(s) = \frac{GF + A(1 + GH)}{1 + GH + GFA}$$

f) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi: $G_1(s)$ stabile asintoticamente e $G_2(s)$ con un polo nell'origine e tutti gli altri poli a parte reale negativa. Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici:

f.1) Indicare il margine di ampiezza $M_{a,i}$ e il margine di fase $M_{f,i}$.

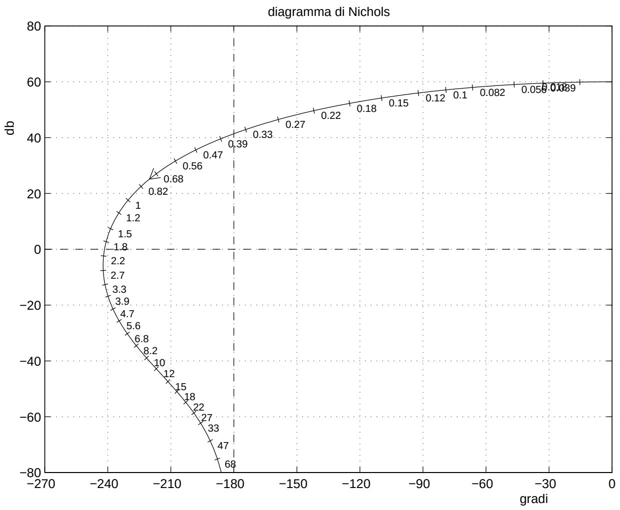
f.2) Calcolare per quali valori del guadagno $K_{p,i}$ il sistema $K_{p,i}\, G_i(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile. Nota: il sistema $G_2(s)$ ha un asintoto verticale in $\sigma_a = 1$.

f.3) Determinare per $G_1(s)$ la larghezza di banda ω_f del sistema non retroazionato e per $G_2(s)$ la larghezza di banda ω_{0f} del sistema retroazionato.

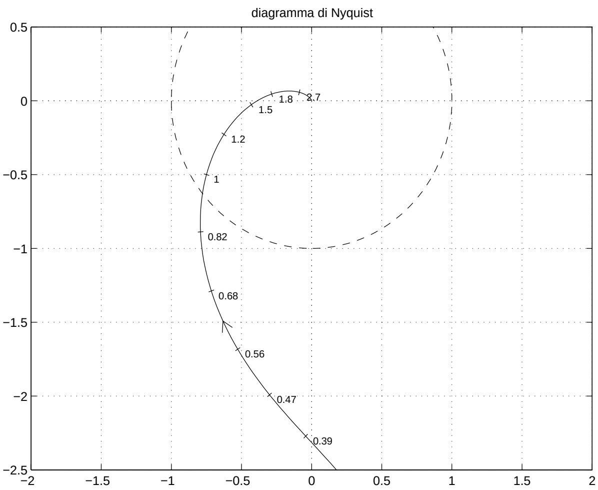
f.4) Determinare la pulsazione $\omega_{1,i}$ dell'oscillazione persistente che si ha nel sistema retroazionato quando K assume il valore limite massimo di stabilità determinato al punto f.2.

f.5) Calcolare il valore della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ in corrispondenza del valore di pulsazione indicato.

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



$M_{a,1} = 0.0085 = -41.4$ db

$M_{f,1} = -61.57$ gradi

$0 < K_{p,1} < 0.0085$

$\omega_f = 0.1$

$\omega_{1,1} = 0.3561$ rad/sec

$G(j\,1.2) = 4.475\,\angle 125.2^o$

$M_{a,2} = 2.577 = 8.221$ db

$M_{f,2} = 38.88$ gradi

$0 < K_{p,2} < 2.577$

$\omega_{f0} \simeq 0.92$

$\omega_{2,1} = 1.575$ rad/sec

$G(j\,0.82) = -0.7925 - 0.8875i$

Controlli Automatici A
Compito Completo
14 Gennaio 2005 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle seguenti domande.Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Calcolare la funzione di trasferimento corrispondente alla seguente equazione differenziale dove $u(t)$ è il segnale di ingresso e $x(t)$ è il segnale di uscita:

$$2\,\dot{u}(t) + 4\,u(t) = 3\,\ddot{x}(t) + 5\,\dot{x}(t) + x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{2\,s + 4}{3\,s^2 + 5\,s + 1}$$

2. Il diagramma di Bode delle fasi di un ritardo puro $G(s) = e^{-t_0 s}$ è di tipo:

○ lineare crescente
○ lineare decrescente
○ esponenziale crescente
⊗ esponenziale decrescente

3. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione ed avente un elevato guadagno di anello risulta poco sensibile

⊗ ai disturbi additivi agenti sull'ingresso del sistema
⊗ ai disturbi additivi agenti sull'uscita del sistema
⊗ alle variazioni parametriche di $G(s)$
○ alle variazioni parametriche di $H(s)$

4. Il tempo di assestamento di un sistema del 2^o ordine stabile

○ dipende solo dalla pulsazione naturale
○ dipende solo dal coefficiente di smorzamento
⊗ dipende solo dalla parte reale dei poli
○ dipende solo dalla parte immaginaria dei poli

5. Sia dato il seguente sistema $G(s)$:

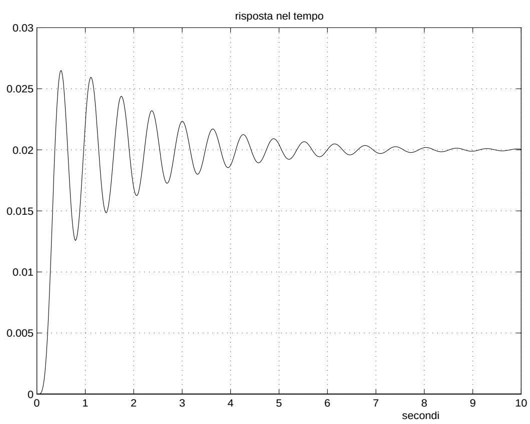
$$G(s) = \frac{800(2\,s + 30)}{(0.2\,s + 3)(2\,s + 10)(\mathbf{s^2 + s + 100})(s^2 + 20s + 400)}$$

Calcolare il guadagno statico G_0 del sistema, disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G(s)$ stimando qualitativamente il tempo di assestamento T_a e il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata:

$$G_0 = 0.02$$

$$T_a = 6 \text{ s}$$

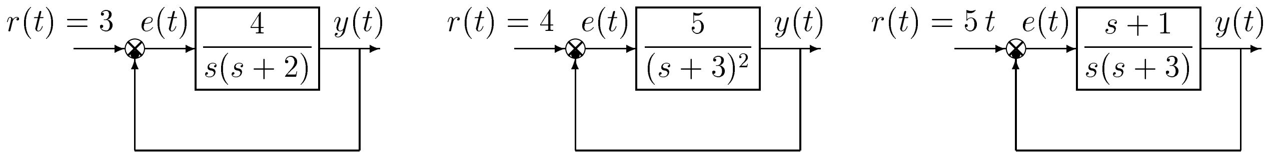
$$T_\omega = 0.63 \text{ s}$$



6. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$ e sia $f(0^-)$ il valore che la funzione $f(t)$ assume all'istante $t = 0^-$. Il teorema della trasformata della derivata generalizzata afferma che

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\,F(s) - f(0^-)$$

7. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:

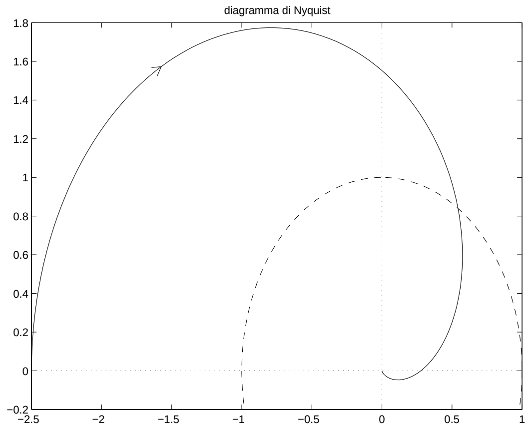


$e(\infty) = 0$ $\qquad$ $e(\infty) = \frac{18}{7} = 2.57$ $\qquad$ $e(\infty) = 15$

8. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \dfrac{-10}{(s+1)(s+2)^2}$

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

○ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
⊗ $(K < 0,\ |K| << 1)$;
⊗ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;



9. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati sotto, relativi ad un sistema a fase minima $G_3(s)$. Leggere il margine di ampiezza M_A e il margine di fase M_f del sistema:

$M_A \simeq 8.231$ (18.31 db), $\qquad$ $M_f \simeq 31.87$ gradi

10. Calcolare per quali valori del guadagno K il sistema $K\,G_3(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile.

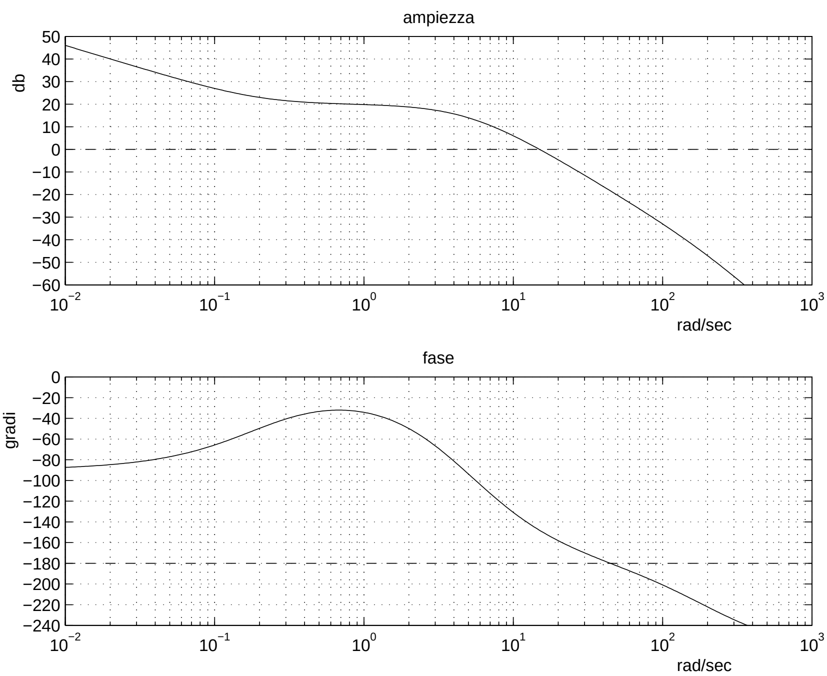
$$0 < K < 8.231$$

11. Determinare per quale valore di K il margine di fase M_φ del sistema $K\,G_3(s)$ posto in retroazione unitaria risulta $M_\varphi = 60^o$:

$$K \simeq 0.36$$

12. Determinare per quale valore di K il margine di ampiezza M_A del sistema $K\,G_3(s)$ posto in retroazione unitaria risulta $M_A = 20$:

$$K \simeq 0.41$$



13. Determinare la larghezza di banda ω_{f0} e il tempo di salita T_s del sistema $G_3(s)$ posto in retroazione unitaria:

$\omega_{f0} = 14.98$ rad/sec $\qquad$ $T_s \simeq 0.0668$