Controlli Automatici A - A.A. 2003/04

Compito Completo

7 Gennaio 2004 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle seguenti domande.

a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 2\, e^{5t} \sin(8\, t), \qquad\qquad x_2(t) = 2\, t^2\, e^{-4\, t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{16}{(s-5)^2 + 64}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{4}{(s+4)^3}$$

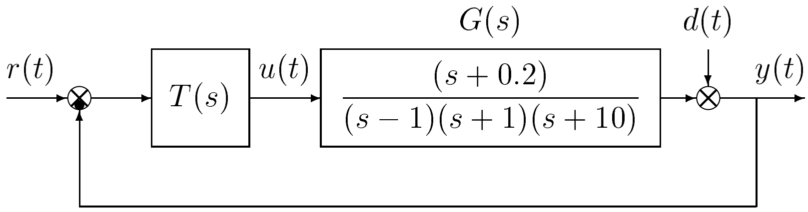
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}, \qquad\qquad G_2(s) = \frac{e^{-3\, s}}{s^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = 2 - e^{-t}, \qquad\qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ t-3 & t \geq 3 \end{cases}$$

c) Sia dato il seguente sistema in retroazione:



c.1) Posto $T(s) = K$, determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+0.2)}{(s-1)(s+1)(s+10)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 10s^2 + (K-1)s + 0.2K - 10 = 0$$

La corrispondente tabella di Routh ha la seguente struttura

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & K-1 \\
2 & 10 & 0.2K - 10 \\
1 & 10(K-1) - 0.2K + 10 & \\
0 & 0.2K - 10 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
\rightarrow & 1 > 0 \\
\rightarrow & 10 > 0 \\
\rightarrow & K > 0 \\
\rightarrow & K > 50
\end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$K > 50 = K^*$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è $\omega^* = 0$.

c.2) Posto $T(s) = 100$, si determini l'andamento a regime $y_\infty(t)$ dell'uscita $y(t)$ corrispondente ad un riferimento nullo $r(t) = 0$ e ad un disturbo costante $d(t) = 3$ agente sul sistema.

Soluzione. Per calcolare il valore a regime $y_\infty(t)$ occorre calcolare la funzione di trasferimento $G_y(s)$ tra l'ingresso $d(t)$ e l'uscita $y(t)$:

$$G_y(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + \dfrac{100(s+0.2)}{(s-1)(s+1)(s+10)}} = \frac{(s^2-1)(s+10)}{(s^2-1)(s+10) + 100(s+0.2)}$$

Il valore a regime $y_\infty(t)$ corrispondente al disturbo costante $d(t) = d_0 = 3$ si determina calcolando il guadagno statico della funzione $G_y(s)$:

$$y_\infty(t) = G_y(s)|_{s=0}\, d_0 = G_y(0)\, 3 = -3$$

c.3) Posto $T(s) = 100$, disegnare qualitativamente il diagramma polare "completo" di Nyquist del guadagno di anello $T(s)\, G(s)$. Calcolare esattamente le eventuali intersezioni con l'asse reale.

<u>Soluzione</u>. Posto $T(s) = 100$, il guadagno di anello del sistema è

$$T(s)\, G(s) = \frac{100(s+0.2)}{(s-1)(s+1)(s+10)}$$

Il corrispondente diagramma di Nyquist per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1. Il guadagno

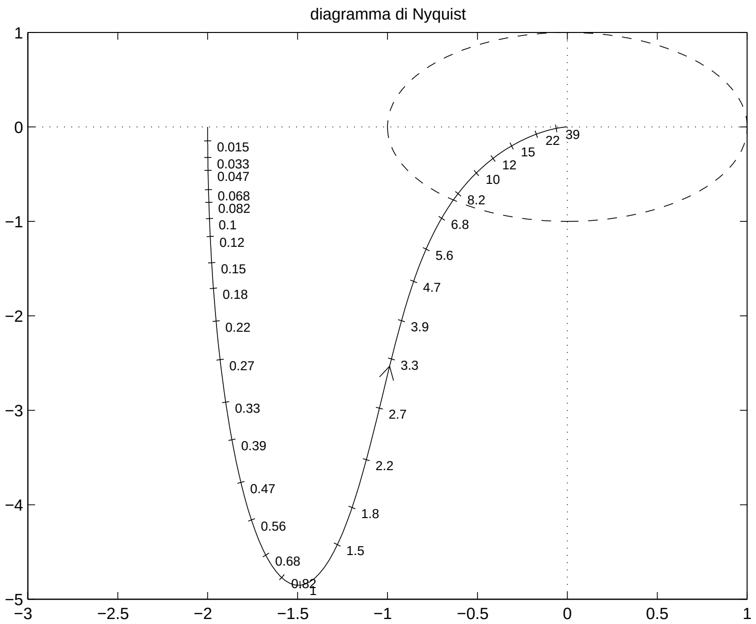


Figura 1: Diagramma di Nyquist del guadagno di anello $T(s)\, G(s)$.

statico è $T(0)\, G(0) = -2$. Dall'analisi di stabilità svolta al punto a) si termina facilmente che l'unica intersezione σ_1 con l'asse reale si ha nel punto $\sigma_1 = -2$ in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 0$.

c.4) Posto $T(s) = 100$, tracciare qualitativamente i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $T(s)\, G(s)$.

<u>Soluzione</u>. Posto $T(s) = 100$, il guadagno di anello del sistema è

$$T(s)\, G(s) = \frac{K(s+0.2)}{(s-1)(s+1)(s+10)}$$

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $T(s)\, G(s)$ sono mostrati in Fig. 2. Il valore assoluto del guadagno statico del sistema è $|T(0)\, G(0)| = 2 = 6$ db.

d) Sia dato il seguente sistema $G_1(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s+0.2)}{(s-1)(s+10)(1-0.5s)}$$

d.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per valori negativi ($K < 0$) del parametro K. Calcolare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione dei punti di diramazione e le intersezioni con l'asse immaginario solo in modo "qualitativo". Nel tracciare il luogo delle radici si tenga conto del fatto che esiste un solo

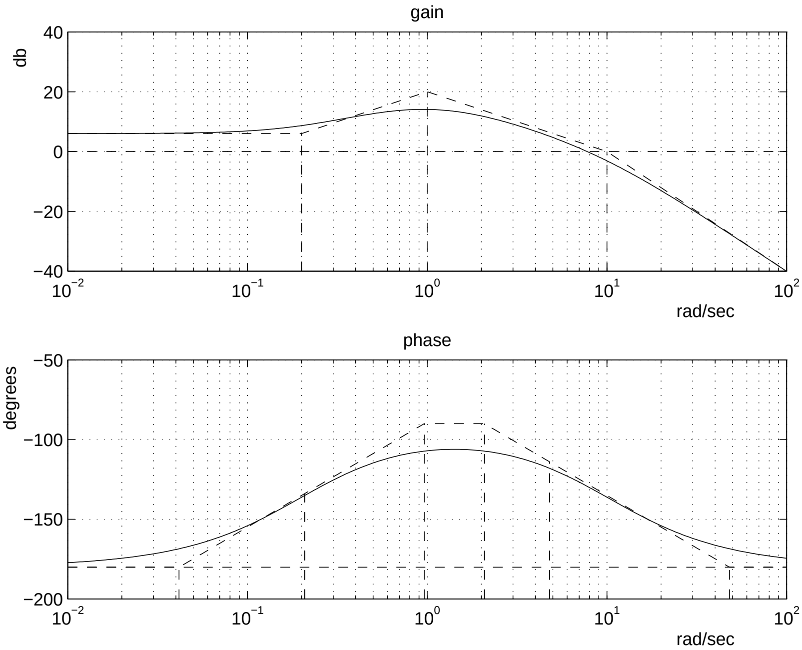


Figura 2: Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $T(s)\,G(s)$.

punto di diramazione sull'asse reale.

<u>Soluzione</u>. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+0.2)}{(-0.5)(s-1)(s-2)(s+10)} = 0$$

Posto $K_1 = K/(-0.5)$ si ottiene:

$$1 + \frac{K_1(s+0.2)}{(s-1)(s-2)(s+10)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + K_1 G_2(s) = 0$$

Per valori negativi di K il parametro K_1 assume valori positivi. L'andamento del luogo delle radici al variare del parametro $K_1 > 0$ è mostrato in Fig. 3. Il centro degli asintoti σ_a

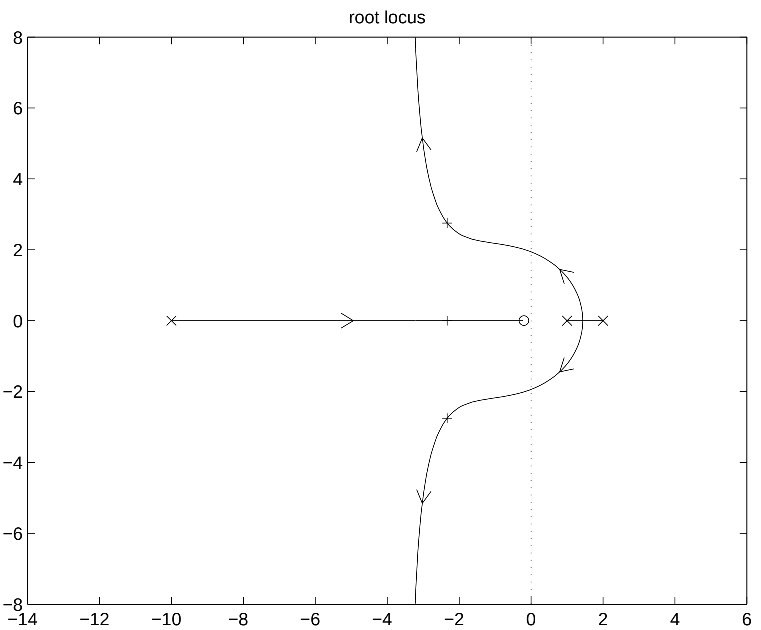


Figura 3: Luogo delle radici della funzione $G_2(s)$ al variare del parametro $K_1 > 0$.

è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}\,(-10 + 1 + 2 + 0.2) = -3.4$$

d.2) Si determini inoltre il valore di K per il quale si ha la condizione di minimo tempo di assestamento.

Soluzione. In questo caso, la condizione di minimo tempo di assestamento T_a coincide con la condizione di allineamento della tre radici. Per calcolare il valore σ_0 corrispondente a tale condizione è utile, in questo caso, utilizzare il teorema del baricentro:

$$\sum_{i=1}^{3} \bar{p}_i = \sum_{i=1}^{3} p_i \qquad \rightarrow \qquad 3\sigma_0 = -10 + 1 + 2 \qquad \leftrightarrow \qquad \sigma_0 = -\frac{7}{3}$$

Il valore $\bar{K}_1$ corrispondente a questa condizione di allineamento si ottiene dall'equazione caratteristica per $s = \sigma_0$:

$$\bar{K}_1 = -\left.\frac{1}{G_2(s)}\right|_{s=\sigma_0} = \left.\frac{(s-1)(s-2)(s+10)}{2(s+0.2)}\right|_{s=\sigma_0} = -\frac{7475}{288} = -25.9548$$

Il corrispondente valore di $\bar{K}$ è il seguente:

$$\bar{K} = -0.5\,\bar{K}_1 \qquad \rightarrow \qquad \bar{K} = 12.9774$$

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in Fig. 4

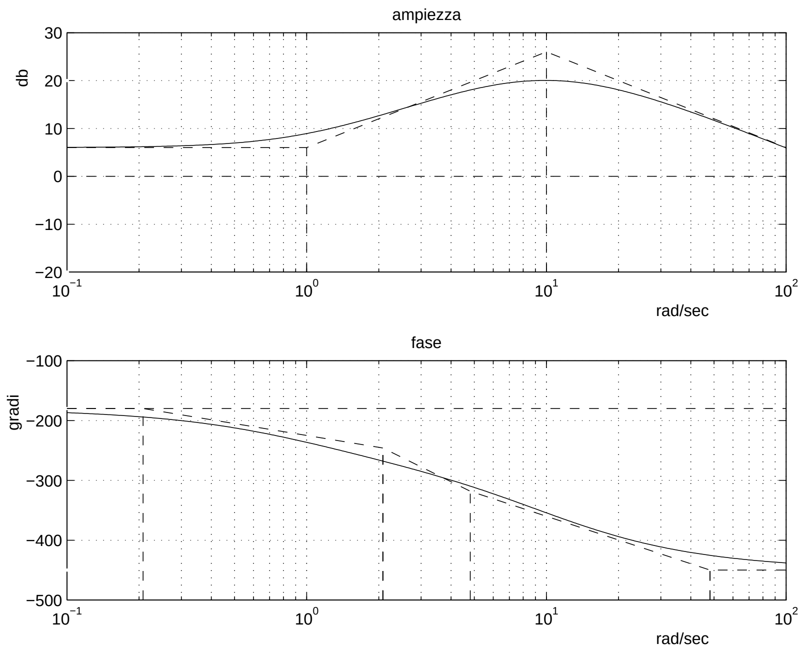


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 3 + 2\sin(10\,t)$;

Soluzione. Si applica la sovrapposizione degli effetti.

$$\begin{aligned} y(t) &= 3\,G(0) + 2\,|G(j\,10)|\sin[10\,t + \arg G(j\,10)] \\ &= 3(-2) + 2\,(10.05)\sin[10\,t + (0.09967)] \\ &= -6 + 20.1\sin(10\,t + 0.09967) \end{aligned}$$

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

Soluzione. In $\omega = 1$ è presente uno zero instabile. In $\omega = 10$ è presente un doppio polo stabile.

$$G(s) = \frac{200(s-1)}{(s+10)^2}$$

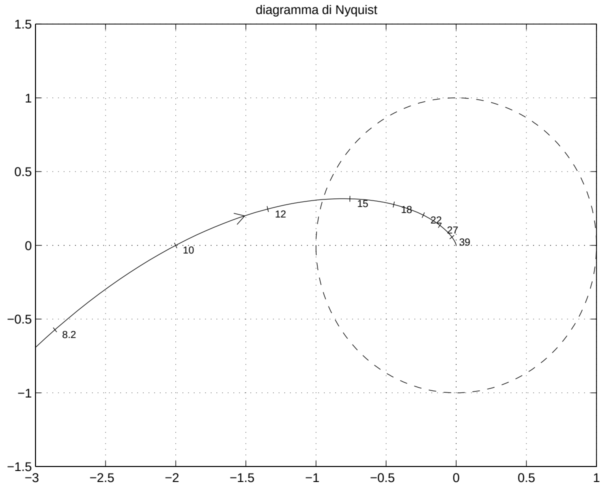
f) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi $G_1(s)$ e $G_2(s)$ a fase minima e di tipo 1. Per ciascuno dei due sistemi, nei limiti della precisione consentita dai grafici:

f.1) Indicare il margine di ampiezza $M_{a,i}$ e il margine di fase $M_{f,i}$.

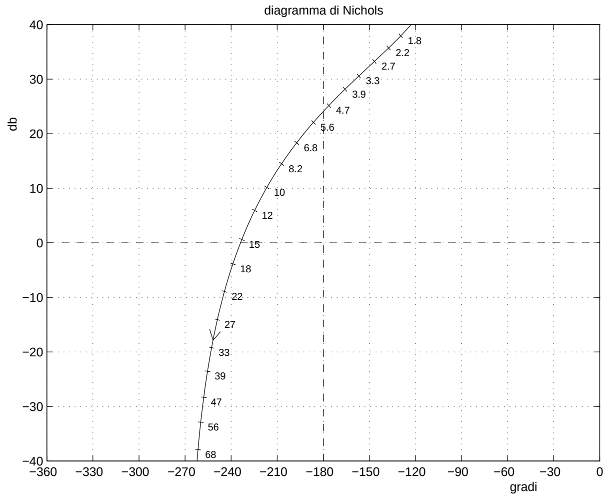
f.2) Calcolare per quali valori del guadagno $K_{p,i} > 0$ il sistema $K_{p,i}\ G_i(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile. Nota bene: i valori espressi in db vanno convertiti in valori numerici.

f.3) Determinare per quali valori di $\omega > 0$ il luogo delle radici della funzione $G_i(s)$ interseca l'asse immaginario.

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



$M_{a,1} = 0.5$

$M_{f,1} = -18.1$ gradi

$0 < K_{p,1} < 0.5$

$\omega_1 = 10$ rad/sec

$M_{a,2} = 0.0625 = -24.08$ db

$M_{f,2} = -53.91$ gradi

$0 < K_{p,1} < 0.0625$

$\omega_1 = 5$ rad/sec

Controlli Automatici A
Compito Completo
7 Gennaio 2004 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle seguenti domande. Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente l'equazione differenziale:

$$\dddot{y} + 2\,\ddot{y} + 5\,\dot{y} + 4\,y = \ddot{x} + 3\,x \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+3}{s^3+2\,s^2+5\,s+4}$$

2. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ e il grado di molteplicità ν della coppia di poli complessi coniugati corrispondente all'andamento temporale $g_1(t) = 2\,t\,e^{3\,t}\sin(4\,t)$:

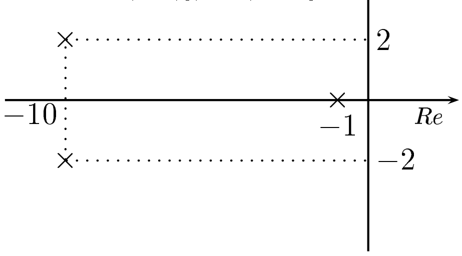
$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = \; 3 \; \pm j\; 4 \qquad\qquad \nu = 2$$

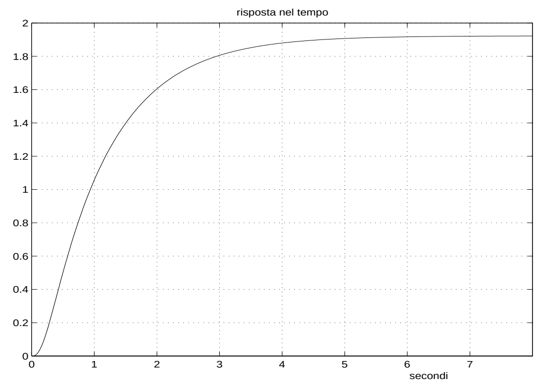
3. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{(2\,s+1)(3\,s+1)}{s(s+1)(s+2)(s+5)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = 0$$

4. Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G_1(s)$. Calcolare il guadagno statico ($K_0 = 1.923$) e fornire una stima del tempo di assestamento ($T_a = 3$ s).

$G_1(s) = \frac{200}{(s+1)[(s+10)^2+2^2]}$





5. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{e^{-t_0 s}}{s} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{1}{\omega} \\[2ex] \varphi(\omega) = -t_0\omega - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

6. Stimare qualitativamente il tempo di assestamento T_a del seguente sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{(s+45)(s+476)}{(s+4773)(s+16)(s+99)(s^2+20s+200)} \qquad \rightarrow \qquad T_a = \frac{3}{10} = 0.3$$

7. La pulsazione di oscillazione ω della risposta al gradino unitario del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+6s+10}$ è:

⊗ $\omega = 1$
○ $\omega = 3$
○ $\omega = \sqrt{10}$

8. Calcolare la posizione σ_a dell'asintoto verticale del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(\,s + 10)^2}{s(4s^2 + 3\,s + 10)} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_a = \frac{100}{10}\,(0.2 - 0.3) = -1$$

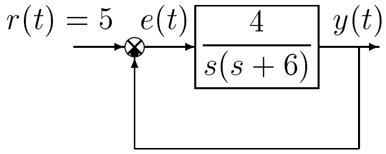
9. Completare la seguente prima formulazione del criterio di Nyquist (quella valida per i sistemi asintoticamente stabili ad anello aperto).

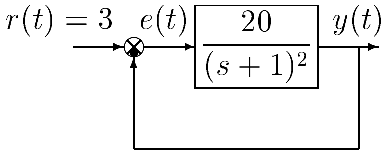
   Criterio di Nyquist. *Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ abbia tutti i poli a patre reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione*

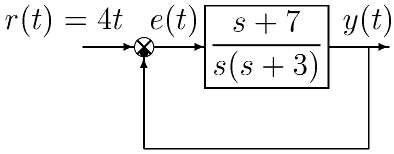
   ○ *solo necessaria* ○ *solo sufficiente* ⊗ *necessaria e sufficiente*

   affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che "il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ non circondi né tocchi il punto critico $-1+j0$".

10. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:





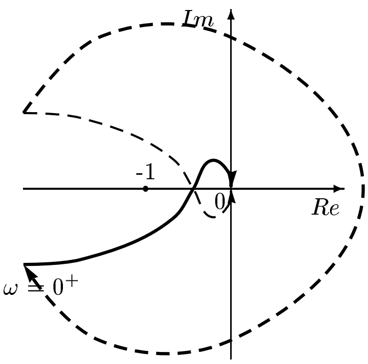


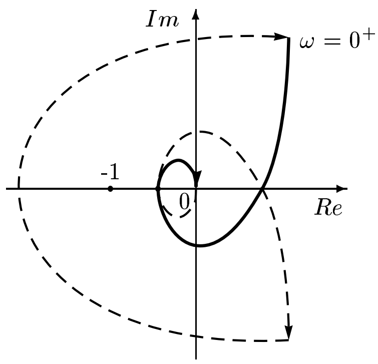
$e(\infty) = 0$ $\qquad$ $e(\infty) = \frac{1}{7} = 0.143$ $\qquad$ $e(\infty) = \frac{12}{7} = 1.714$

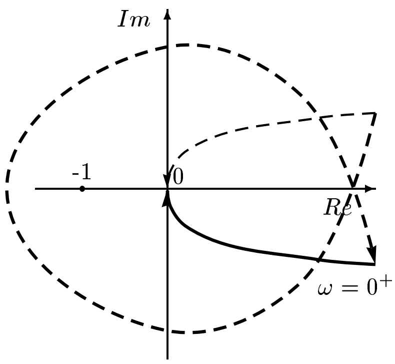
11. Calcolare il centro degli asintoti σ_0 del luogo delle radici della seguente funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s - 6)}{(s^2 + 4\,s + 8)(s + 2)} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_0 = \frac{1}{2}\,(-4 - 2 - 6) = -6$$

12. Chiudere all'infinito i seguenti diagrammi di Nyquist. Nota: tutti i diagrammi di Nyquist fanno riferimento a sistemi con tutti i poli a parte reale negativa eccezion fatta per un polo semplice o doppio nell'origine.







13. Un sistema $G(s)$ retroazionato è asintoticamente stabile:

   ○ se e solo se il suo margine di ampiezza M_a è positivo;
   ⊗ se e solo se il suo margine di fase M_φ è positivo;
   ⊗ se e solo se il suo margine di ampiezza M_a è maggiore di 1;
   ○ se e solo se il suo margine di fase M_φ è maggiore di $\frac{\pi}{2}$;