Sistema elementare del primo ordine

- Un sistema del primo ordine può essere posto nella forma:

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau\, s}$$

- L'unico parametro che caratterizza il sistema è la *costante di tempo* τ.
- Se $\tau > 0$ il polo p del sistema è a parte reale negativa (il sistema è stabile):

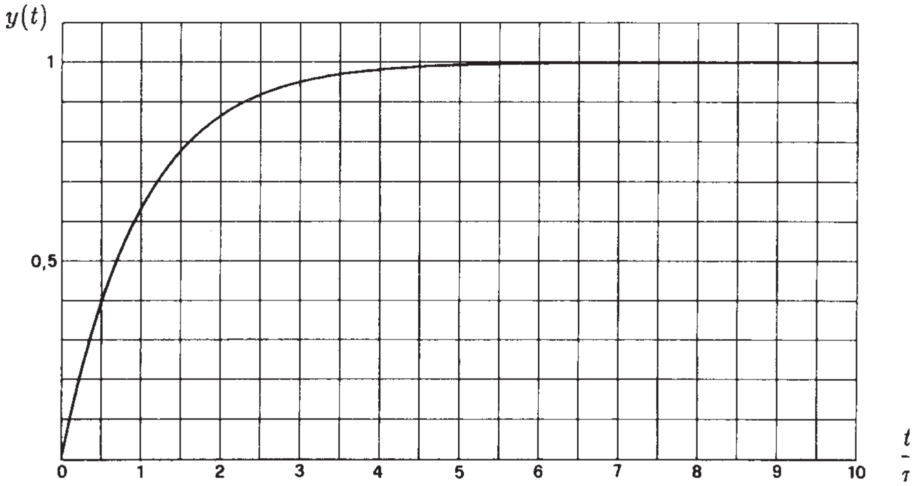
$$p = -\frac{1}{\tau}$$

- La risposta del sistema al gradino unitario è la seguente:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\,(1+\tau\, s)}\right] = \frac{1}{\tau}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\,(s+\frac{1}{\tau})}\right] \\ &= \frac{1}{\tau}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{s+\frac{1}{\tau}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right] = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

- Andamento temporale (la scala dei tempi è normalizzata rispetto a τ):

$t\!=\!\tau \;\rightarrow\; 63,2\%$
$t\!=\!2\tau \;\rightarrow\; 86.5\%$
$\underline{t\!=\!3\tau} \;\rightarrow\; \underline{95.0\%}$
$t\!=\!5\tau \;\rightarrow\; 99.3\%$
$t\!=\!7\tau \;\rightarrow\; 99.9\%$

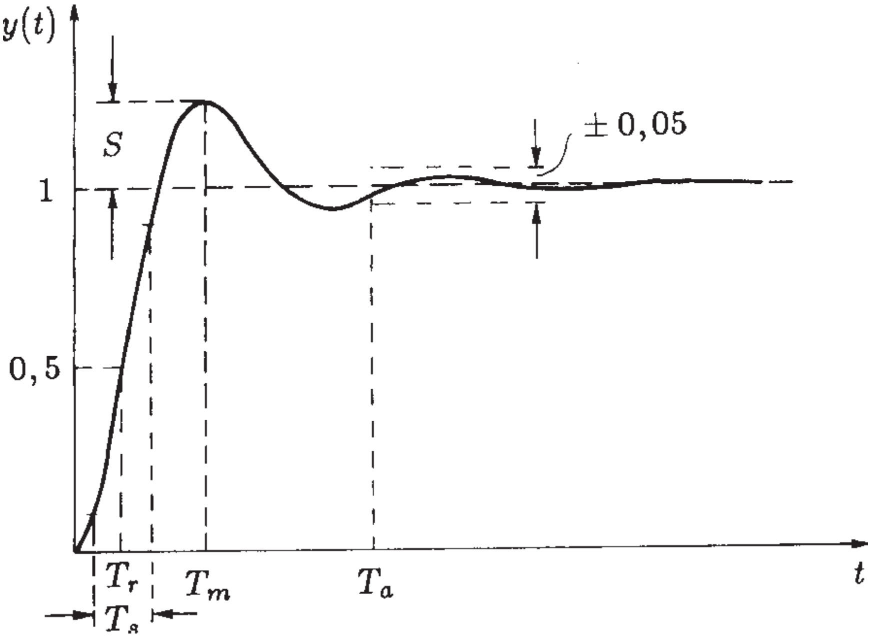


- La risposta $y(t)$ al gradino di tutti i sistemi dinamici del primo ordine è di tipo *aperiodico*: si raggiunge il valore finale senza mai superarlo.
- Dopo tre costanti di tempo il sistema ha già raggiunto il 95% del valore finale. Il tempo di assestamento T_a del sistema è:

$$\boxed{T_a = 3\,\tau = \frac{3}{|p|}}$$

Sistema elementare del secondo ordine

- Spesso i sistemi in retroazione, anche se di ordine elevato, presentano una risposta analoga a quella dei sistemi del secondo ordine.
- Ciò accade nel caso di sistemi a *poli dominanti* cioè sistemi caratterizzati dalla presenza di una coppia di poli complessi coniugati più vicini all'asse immaginario rispetto a tutti gli altri poli.
- Il contributo dei poli dominanti nell'espressione del transitorio è notevolmente più importante di quello degli altri poli.



- I parametri più importanti che descrivono il transitorio sono i seguenti:
  1. *Massima sovraelongazione* S: differenza fra il valore massimo dell'uscita e il valore finale. È espresso in % del valore finale.
  2. *Tempo di ritardo* T_r: tempo per raggiungere il 50 % del valore finale.
  3. *Tempo di salita* T_s: tempo occorrente perché l'uscita passi dal 10 al 90 % del valore finale.
  4. *Tempo di assestamento* T_a: tempo occorrente perché l'uscita rimanga entro il ± 5 % del valore finale.
  5. *Istante di massima sovraelongazione* T_m: istante al quale si presenta la massima sovraelongazione.

- Funzione di trasferimento di un tipico sistema del secondo ordine (a meno di un fattore costante):

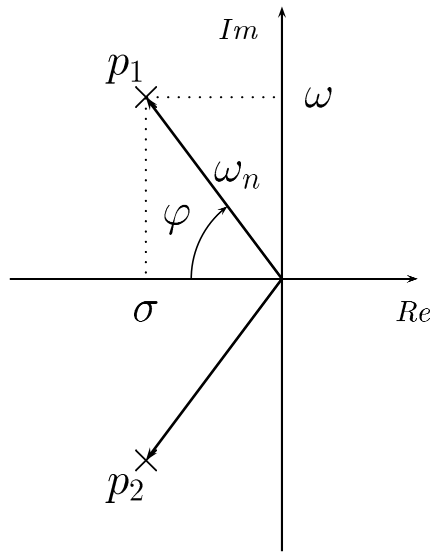
$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\,\delta\,\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2}$$

dove $\delta = \cos\varphi$ è il *coefficiente di smorzamento* e ω_n è la *pulsazione naturale* del sistema.

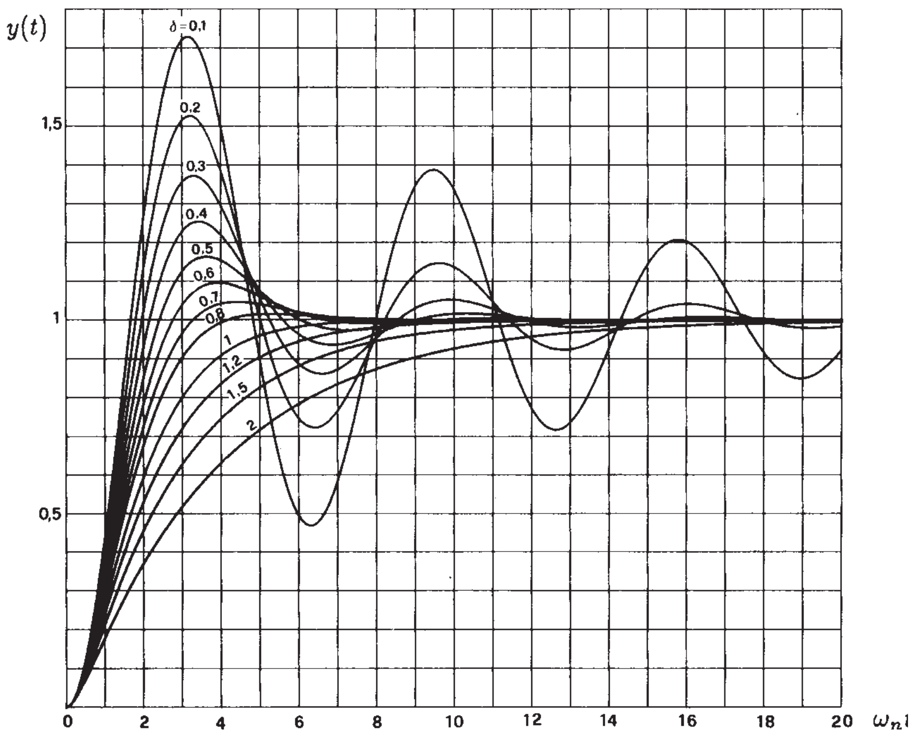
- La risposta al gradino unitario è la seguente:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s\,(s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2)}\right] \\ &= 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\,\mathrm{sen}\,(\omega\,t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &:= \omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ \sigma &:= -\delta\omega_n \\ \varphi &:= \arctan\tfrac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \end{aligned}$$



- L'andamento della funzione $y(t)$ al variare di δ è il seguente (la scala dei tempi è normalizzata rispetto ad ω_n):



- Per $\delta = 1$ non si ha alcuna sovraelongazione: $y(t)$ tende asintoticamente al valore finale senza mai superarlo.

- Determinazione dei punti di massimo e di minimo. Si deriva rispetto al tempo:

$$\frac{dy}{dt} = -A\, e^{-\delta\omega_n t}\, \omega\, \cos(\omega\, t + \varphi) + A\, \delta\, \omega_n\, e^{-\delta\omega_n t}\, \mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

Ponendo la derivata uguale a zero, si ottiene

$$-\omega_n \sqrt{1-\delta^2}\, \cos(\omega t + \varphi) + \delta\, \omega_n\, \mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi) = 0$$

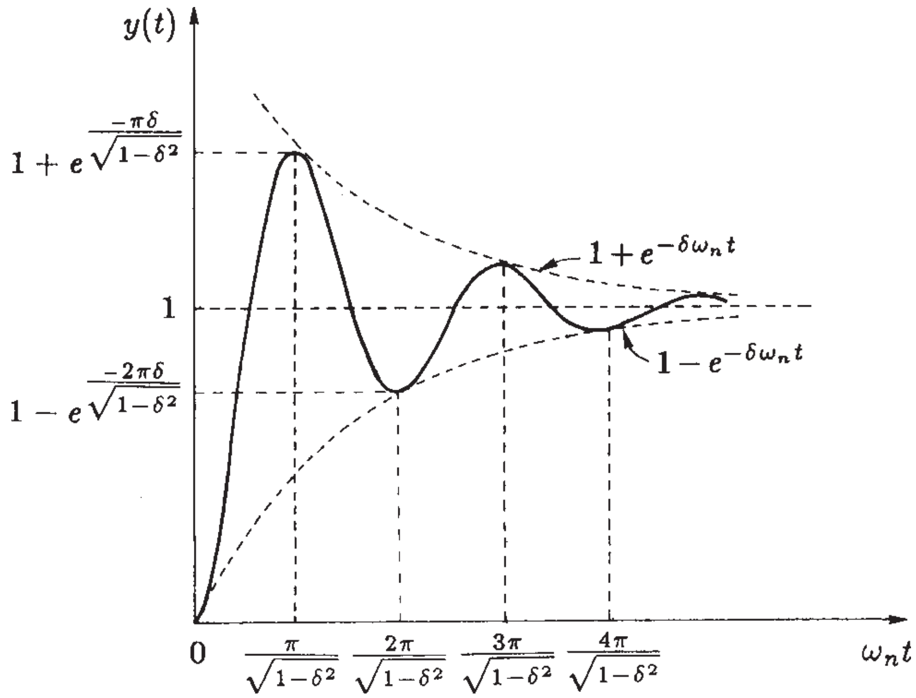
da cui si ricava

$$\tan(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \qquad \leftrightarrow \qquad \omega t = n\, \pi$$

(per $n = 0, 1, \ldots$), cioè:

$$\boxed{t = \frac{n\, \pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} = \frac{n\, \pi}{\omega}}$$

- L'andamento temporale dei massimi e dei minimi è il seguente:



- Valori dell'uscita in corrispondenza dei massimi e minimi:

$$y(t)\Big|_{\substack{\max\\ \min}} = 1 - \frac{e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}}\,\mathrm{sen}\,(n\,\pi + \varphi)$$

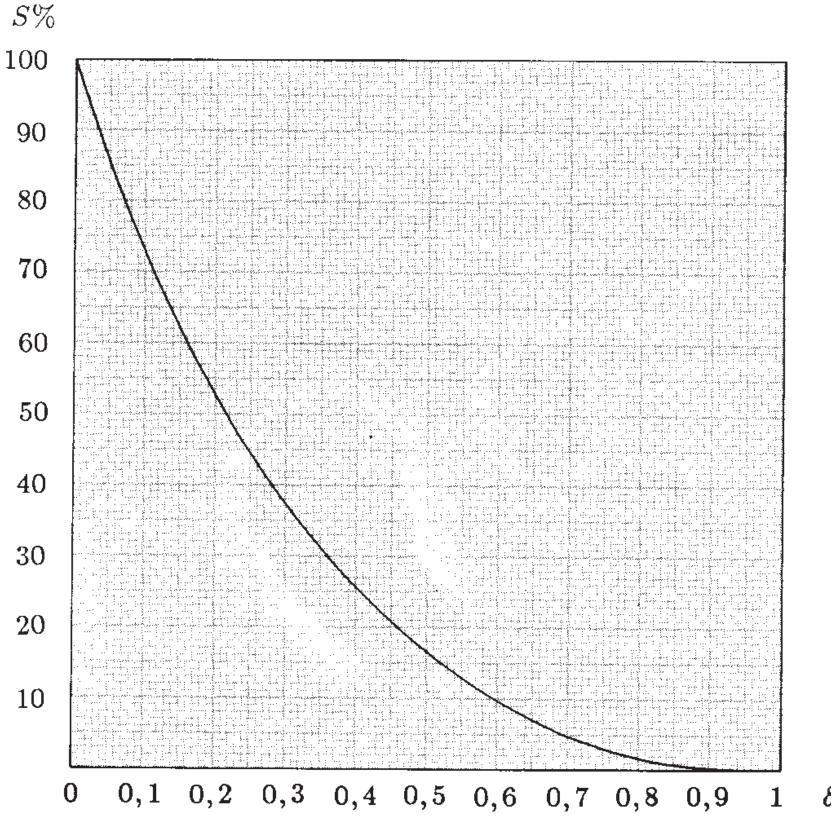
da cui si ottiene

$$y(t)\Big|_{\substack{\max\\ \min}} = 1 - (-1)^n\, e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

- La massima sovraelongazione è data dalla relazione

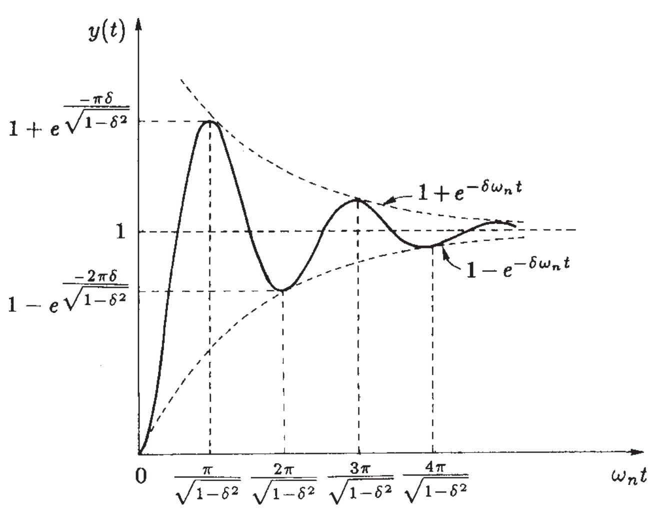
$$S = 100\,\frac{(y_{\max} - y_\infty)}{y_\infty} \qquad \boxed{S = 100\; e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}$$

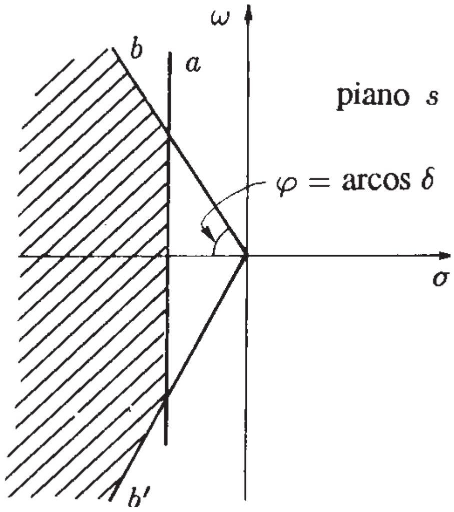
- La massima sovraelongazione S è funzione unicamente del coefficiente di smorzamento δ ed è uguale al 100 % quando tale coefficiente è nullo:



- La pulsazione naturale ω_n non influenza la massima sovraelongazione S.

- La massima sovraelongazione non supera un valore assegnato se i poli del sistema sono compresi nel settore delimitato da due rette b e b' univocamente determinate dal coefficiente di smorzamento δ.





- Un limite superiore per il tempo di assestamento T_a si ricava dalla relazione

$$e^{-\delta\omega_n T_a} = 0.05$$

da cui si deduce

$$\delta\,\omega_n\,T_a = 3\ , \quad \text{cioè} \quad \boxed{T_a = \frac{3}{\delta\,\omega_n} = \frac{3}{|\sigma|}}$$

- Il tempo di assestamento non è superiore al valore assegnato T_a se

$$\delta\,\omega_n \geq \frac{3}{T_a}$$

dove $\delta\,\omega_n$ è il modulo della parte reale σ dei poli del sistema.

- Il vincolo sul tempo di assestamento è rispettato se i poli del sistema sono posizionati a sinistra di una retta verticale a.

- Entrambe le specifiche, sul tempo di assestamento e sulla massima sovraelongazione, sono rispettate se i poli del sistema sono posizionati all'interno della zona tratteggiata.

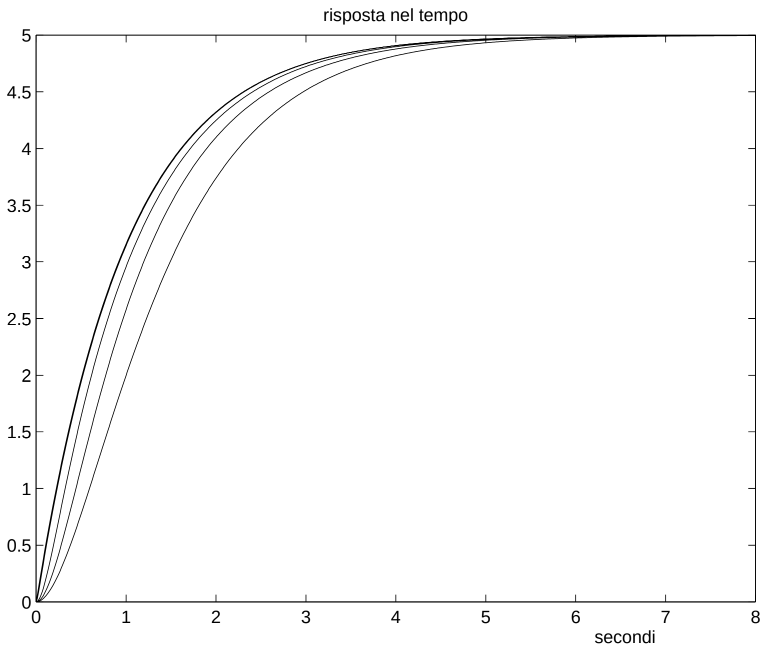
Sistemi a polo dominante

- I seguenti sistemi del secondo ordine hanno tutti guadagno statico $G_i(0) = 5$, hanno tutti un polo in -1 e differiscono per la posizione del secondo polo posizionato, rispettivamente, in -2, -4, -10, -100 e -1000:

$$G_1(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}, \quad G_2(s) = \frac{20}{(s+1)(s+4)}, \quad G_3(s) = \frac{50}{(s+1)(s+10)}$$

$$G_4(s) = \frac{500}{(s+1)(s+100)}, \quad G_5(s) = \frac{5000}{(s+1)(s+1000)}, \quad \left[G(s) = \frac{5}{(s+1)}\right]$$

- La risposta al gradino unitario di questi sistemi è la seguente:



- Nel grafico l'andamento più lento è quello relativo al sistema $G_1(s)$, quello più veloce è relativo al sistema $G_5(s)$.

- Nel caso di sistemi stabili, si definisce **polo dominante** il polo che si trova più vicino all'asse immaginario.

- La risposta del sistema cambia "abbastanza poco" quando i poli non "dominanti" sono a parte reale molto più negativa del polo "dominante".

- I poli che si trovano una decade "più in basso" rispetto al polo dominante influenzano poco la risposta temporale del sistema.

Deformazione lineare K del piano s

- I sistemi $G_i(s)$ posti nella forma *"a costanti di tempo"*:

$$G_1(s) = \frac{5}{(1+s)(1+\frac{s}{2})}, \quad G_2(s) = \frac{5}{(1+s)(1+\frac{s}{4})}, \quad G_3(s) = \frac{5}{(1+s)(1+\frac{s}{10})}$$

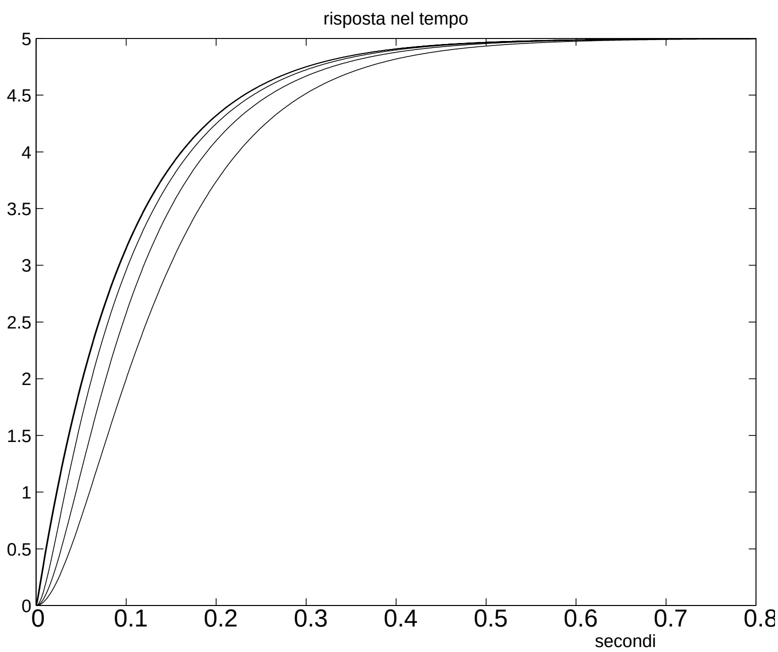
$$G_4(s) = \frac{5}{(1+s)(1+\frac{s}{100})}, \quad G_5(s) = \frac{5}{(1+s)(1+\frac{s}{1000})}, \quad \left[G(s) = \frac{5}{(1+s)}\right]$$

- Se si moltiplica per un fattore $K = 10$ tutti i poli di $G_i(s)$ si ottiene:

$$\bar{G}_1(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{20})}, \quad \bar{G}_2(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{40})}, \quad \bar{G}_3(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{100})}$$

$$\bar{G}_4(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{1000})}, \quad \bar{G}_5(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{10000})}, \quad \left[G(s) = \frac{5}{(1+\frac{s}{10})}\right]$$

- Gli andamenti temporali alla risposta al gradino sono i seguenti:



- A parte la riduzione di un fattore $K = 10$ della scala dei tempi, gli andamenti ottenuti sono identici a quelli del caso precedente.
- **Moltiplicare per un fattore K tutti i poli di un sistema $G(s)$ equivale a renderlo più "veloce" dello stesso fattore K.**

Sistemi a "poli" dominanti

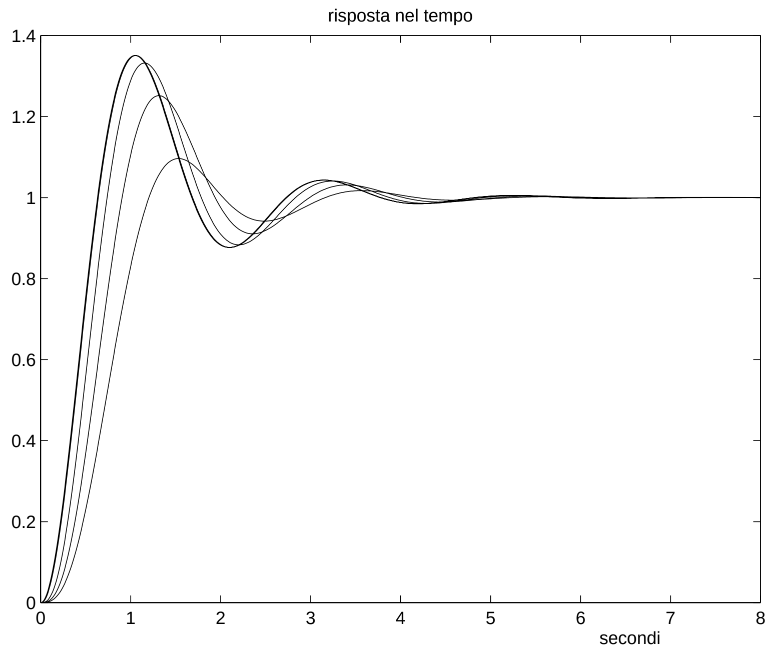
- Le stesse considerazioni valgono anche per sistemi "dominati" da una coppia di poli complessi coniugati.
- Si definiscono "**poli dominanti**" di un sistema asintoticamente stabile i due poli complessi coniugati che si trovano più vicino all'asse immaginario rispetto ad un qualunque altro polo del sistema.
- La risposta al gradino unitario dei seguenti sistemi:

$$G_1(s) = \frac{10}{[(s+1)^2+3^2](1+\frac{s}{2})}, \quad G_2(s) = \frac{10}{[(s+1)^2+3^2](1+\frac{s}{4})}$$

$$G_3(s) = \frac{10}{[(s+1)^2+3^2](1+\frac{s}{10})}, \quad G_4(s) = \frac{10}{[(s+1)^2+3^2](1+\frac{s}{100})}$$

$$G_5(s) = \frac{10}{[(s+1)^2+3^2](1+\frac{s}{1000})}, \qquad \left[G(s) = \frac{10}{[(s+1)^2+3^2]}\right]$$

è quella riportata nel seguente grafico:



- Anche in questo caso, i poli che si trovano una decade "più in basso" rispetto alla coppia di "poli dominanti'' influenzano poco la risposta temporale del sistema.

Sistema dinamico del secondo ordine

- Un qualunque sistema dinamico del secondo ordine privo di zeri:

$$G(s) = \frac{c}{s^2 + a\,s + b}$$

può sempre essere trasformato nel modo seguente:

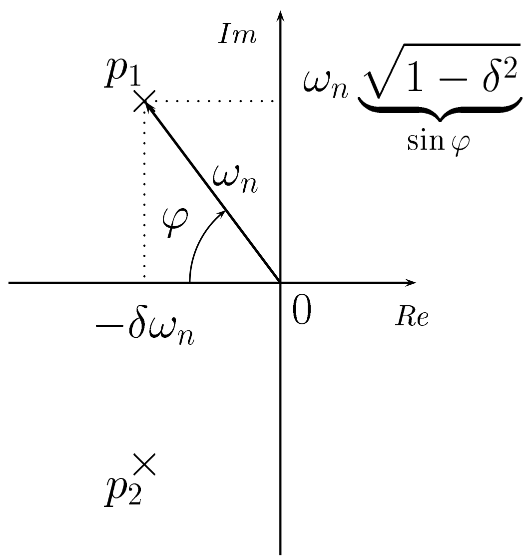
$$G(s) = K\,\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- La pulsazione naturale ω_n, il coefficiente di smorzamento δ e il guadano statico K sono definiti come segue:

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{b}, \qquad \delta = \frac{a}{2\sqrt{b}}}, \qquad K = \frac{c}{b} = G(s)|_{s\to 0}$$

- Il significato geometrico dei parametri sul piano complesso è il seguente:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ &= \sigma \pm j\omega \\ \delta &= \cos\varphi \\ \sigma &= -\delta\,\omega_n \\ \omega &= \omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ \omega_n &= \sqrt{\sigma^2+\omega^2} = |p_1| = |p_2| \end{aligned}$$



- Sul piano complesso s, la *pulsazione naturale* ω_n è la distanza dei poli complessi coniugati $p_{1,2}$ dall'origine.

- Il *coefficiente di smorzamento* δ è uguale al coseno dell'angolo φ che il segmento $\overline{p_1 0}$ forma con il semiasse negativo.

- Nel seguito, si considera solo il caso $K = 1$.

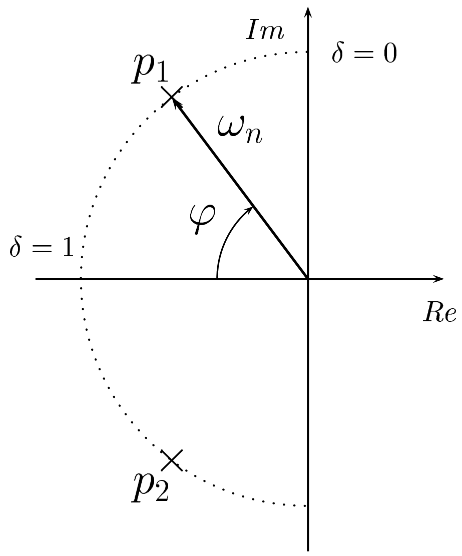
Pulsazione naturale ω_n costante

- Mantenere costante ω_n e far variare δ vuol dire spostare i poli del sistema lungo una circonferenza di raggio ω_n:

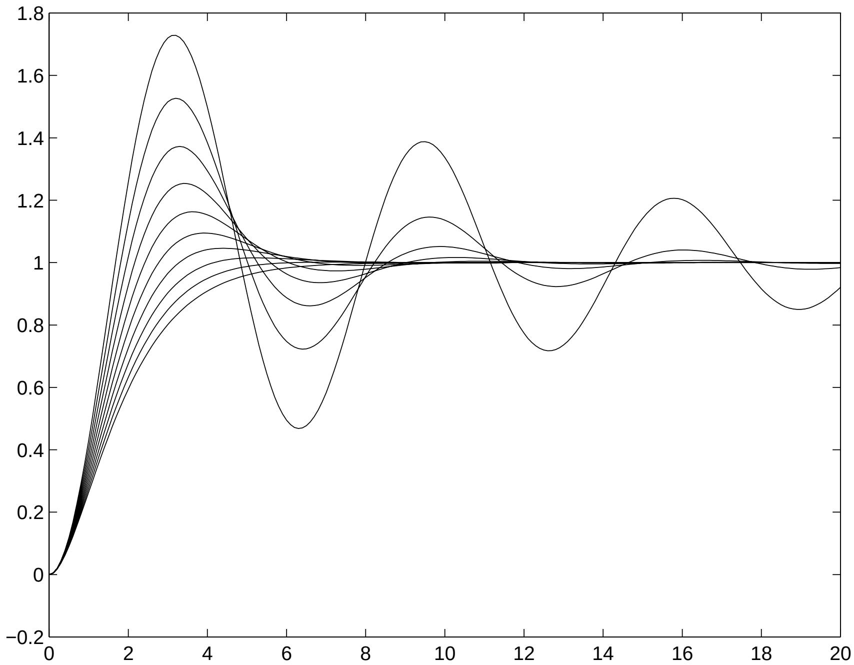
$0 < \delta < 1$

$\frac{\pi}{2} > \varphi > 0$

ω_n costante



- La risposta del sistema $G(s)$ al gradino unitario al variare del parametro $\delta \in [0.1,\ 0.2,\ \ldots,\ 1]$ è mostrata nel seguente grafico:



- Il coefficiente δ influenza direttamente la massima sovraelongazione $S\%$:

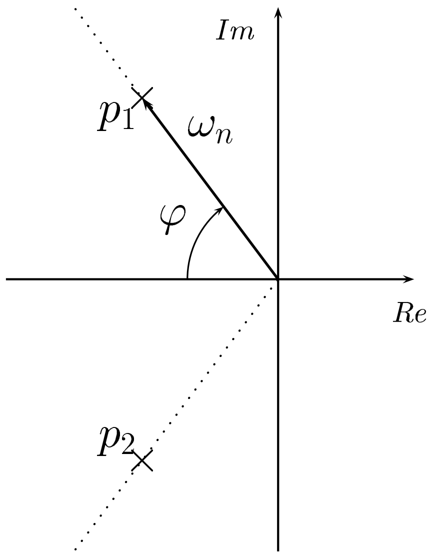
$$\boxed{S\% = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}$$

Coefficiente di smorzamento δ costante

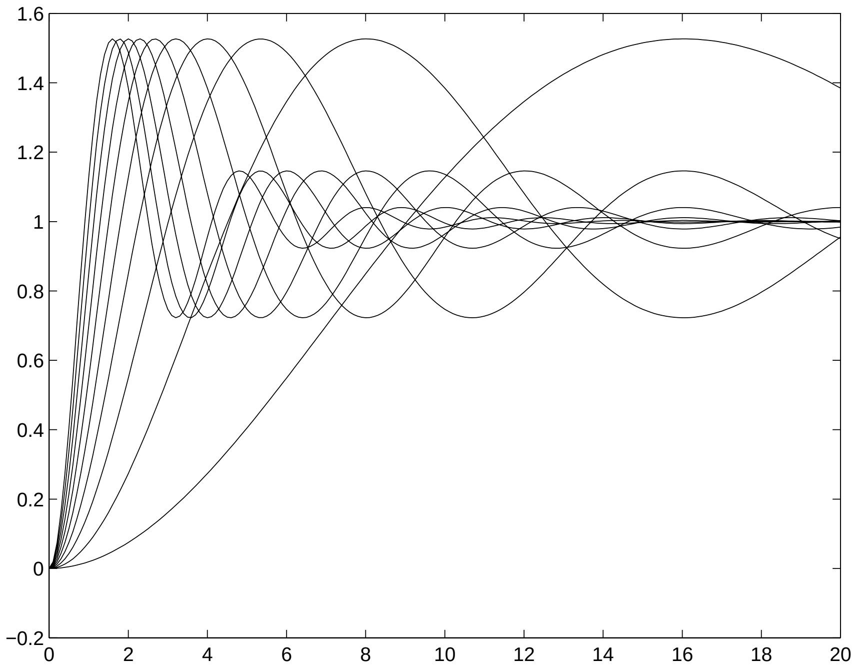
- Mantenere costante δ e far variare ω_n vuol dire spostare i poli del sistema lungo una retta uscente dall'origine che forma un angolo $\varphi = \arccos \delta$ con il semiasse reale negativo:

δ costante

$\omega_n > 0$



- Se si mantiene costante $\delta = 0.2$ e si fa variare $\omega_n \in [0.2,\ 0.4,\ \ldots,\ 2]$ si ottengono i seguenti andamenti temporali:



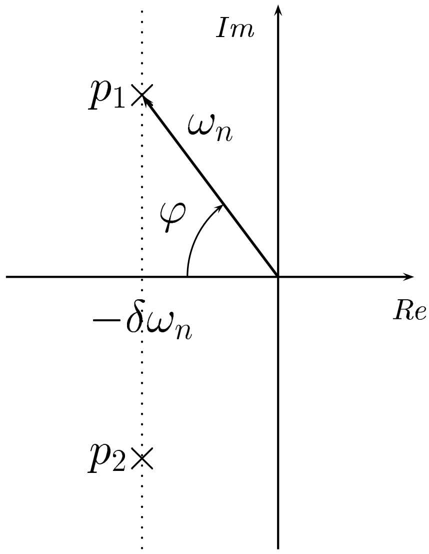
- Cambiare ω_n equivale, in pratica, a cambiare l'asse dei tempi: più ω_n è elevato, più l'asse dei tempi è contratto.

Tempo di assestamento costante

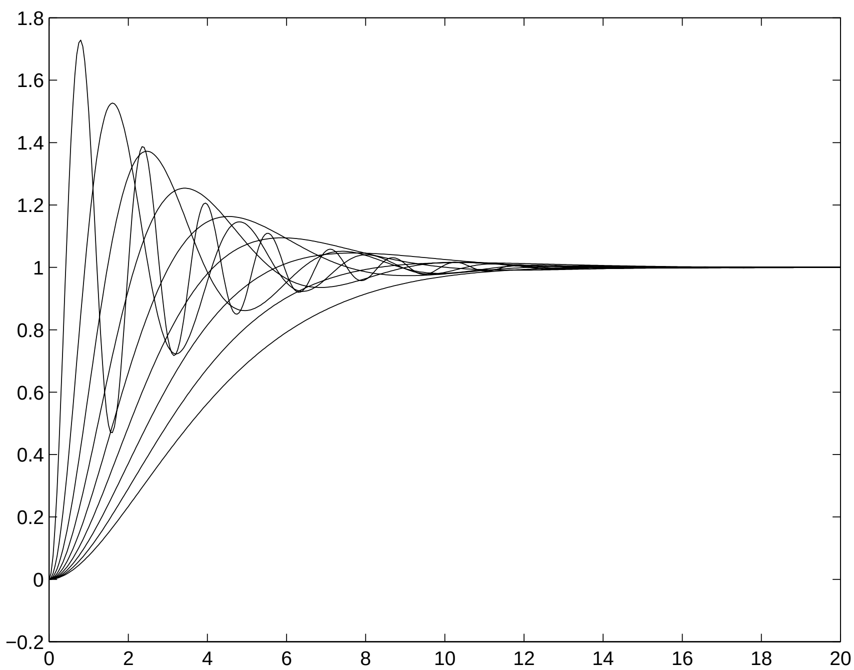
- Mantenere costante il prodotto $\delta\omega_n$ e far variare (per esempio) δ, vuol dire spostare i poli del sistema lungo una retta verticale di ascissa $-\delta\omega_n$:

δ varia

$\delta\omega_n$ costante



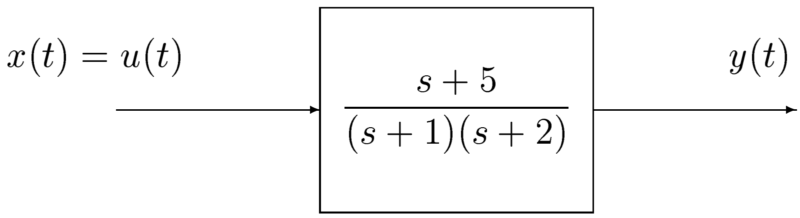
- Gli andamenti temporali che si ottengono facendo variare $\delta \in [0.1 : 0.9]$, mantenendo però costante il prodotto $\delta\omega_n = 0.4$ sono i seguenti:



- Il tempo di assestamento T_a (5%) è inversamente proporzionale a $\delta\omega_n$:

$$\boxed{T_a = \frac{3}{\delta\omega_n}}$$

Esempio. Calcolare la risposta al gradino unitario del seguente sistema:



- Il calcolo della trasformata del segnale di uscita è immediato:

$$X(s) = \frac{1}{s} \qquad \rightarrow \qquad Y(s) = G(s)X(s) = \frac{s+5}{s(s+1)(s+2)}$$

Per ottenere $y(t)$ occorre "antitrasformare" la funzione $Y(s)$.

- Valore iniziale della funzione $y(t)$:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,Y(s) = 0$$

- Valore finale della funzione $y(t)$:

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \frac{5}{2}$$

- Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+1)} + \frac{K_3}{(s+2)}$$

dove

$$K_1 = s\,Y(s)|_{s=0} = \left.\frac{s+5}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{5}{2}$$

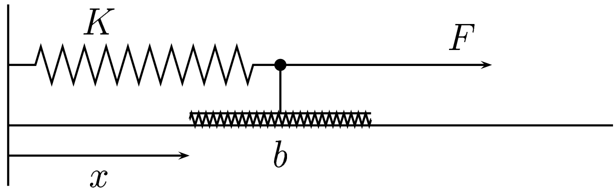
$$K_2 = (s+1)\,Y(s)|_{s=-1} = \left.\frac{s+5}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -4$$

$$K_3 = (s+2)\,Y(s)|_{s=-2} = \left.\frac{s+5}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{3}{2}$$

- Si ricava quindi che la risposta forzata del sistema è:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{5}{2} - 4e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

Esempio. Calcolare la risposta al gradino del seguente sistema molla-smorzatore.



- Descrizione mediante un'equazione differenziale:

$$0 = F - b\,\dot{x} - K\,x \qquad \rightarrow \qquad b\,\dot{x} + K\,x = F$$

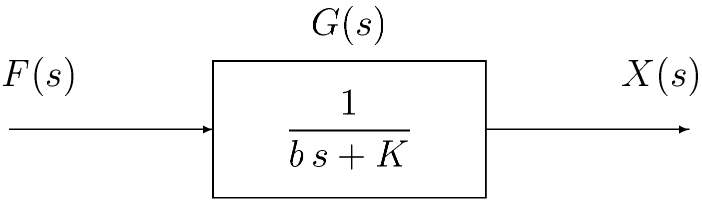
- Utilizzando le trasformate di Laplace ($x(0) = 0$) si ha:

$$b\,s\,X(s) + K X(s) = F(s)$$

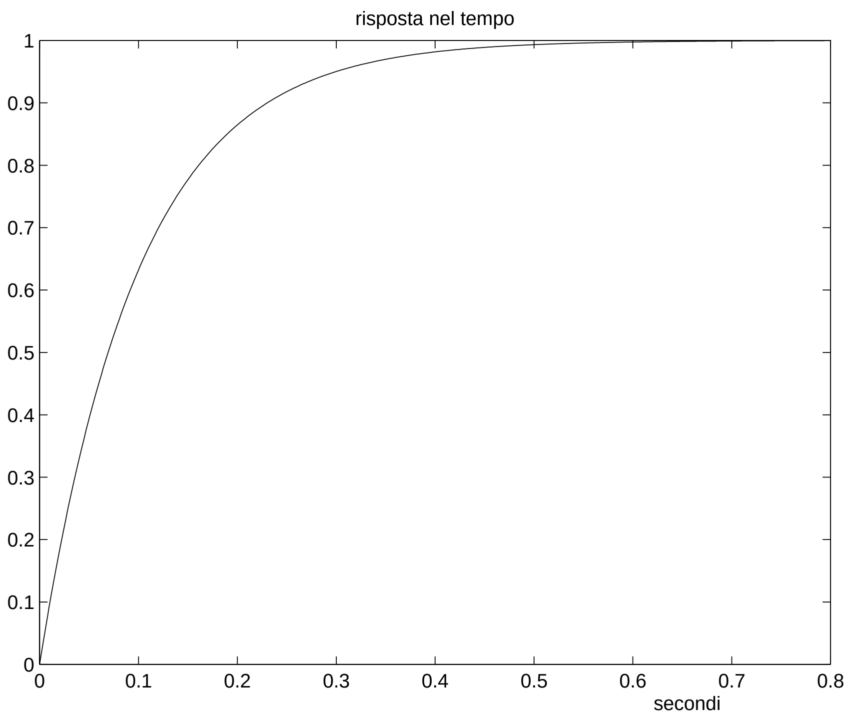
da cui si ottiene:

$$X(s) = \frac{1}{b\,s + K} F(s)$$

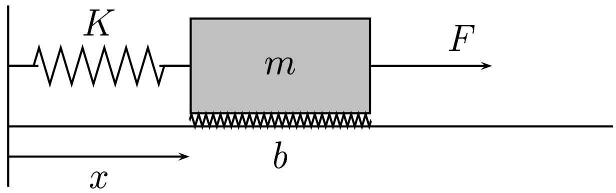
- Il sistema può quindi essere rappresentato nel modo seguente:



- In questo caso la risposta al gradino è di tipo aperiodico ($K = 1$, $b = 0.1$):



Esempio. Sistema massa-molla-smorzatore.



- Variabili e parametri:

$x(t)$	:	posizione	m	:	massa
$\dot{x}(t)$	:	velocità	K	:	rigidità della molla
$\ddot{x}(t)$	:	accelerazione	b	:	Coefficiente di attrito lineare
$F(t)$	:	forza applicata			

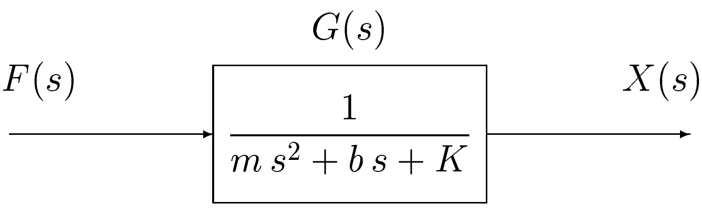
- Descrizione mediante un'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}[m\dot{x}] = F - b\,\dot{x} - K\,x \qquad \rightarrow \qquad m\ddot{x} + b\,\dot{x} + K\,x = F$$

Utilizzando le trasformate di Laplace ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$) si ha:

$$m\,s^2 X(s) + b\,s\,X(s) + K\,X(s) = F(s) \qquad \leftrightarrow \qquad X(s) = \frac{F(s)}{m\,s^2 + b\,s + K}$$

Il sistema può quindi essere rappresentato nel modo seguente:



- Posto $m = 1$, $b = 3$ e $K = 2$, calcolare la risposta del sistema ad un gradino di forza $F(t) = 10$. Si procede nel seguente modo:

$$F(s) = \frac{10}{s} \qquad \rightarrow \qquad X(s) = G(s)F(s) = \frac{10}{s(s^2 + 3\,s + 2)}$$

Operando la scomposizione in fratti semplici, si ha che:

$$X(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5}{s} - \frac{10}{(s+1)} + \frac{5}{(s+2)}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$x(t) = 5 - 10\,e^{-t} + 5\,e^{-2t}$$

- Posto $m = 1$, $b = 2$ e $K = 10$, calcolare la risposta del sistema ad un gradino di forza $F(t) = 10$. Si procede nel seguente modo:

$$F(s) = \frac{10}{s} \qquad \rightarrow \qquad X(s) = G(s)F(s) = \frac{10}{s(s^2 + 2\,s + 10)}$$

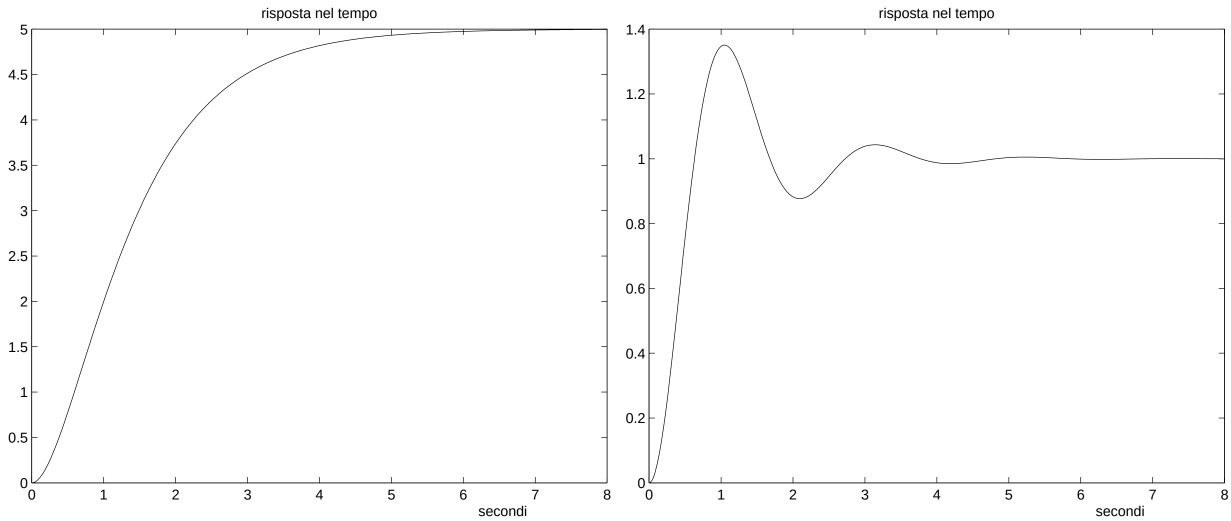
Operando la scomposizione in fratti semplici si ha che:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{10}{s[(s+1)^2 + 3^2]} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2 + 3^2} \\ &= \frac{1}{s} - \left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{1}{3}\frac{3}{(s+1)^2 + 3^2}\right] \end{aligned}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$x(t) = 1 - e^{-t}[\cos(3\,t) + \frac{1}{3}\sin(3\,t)]$$

- Nel primo caso, l'andamento temporale era di tipo aperiodico; in questo caso l'andamento temporale è di tipo oscillatorio smorzato:



- I termini esponenziali con coefficienti a parte reale molto negativa si annullano più rapidamente.

- La risposta dinamica del sistema è dominata dal polo, o dalla coppia di poli, più vicino all'asse immaginario.